数理逻辑与数学基础习题集

〔波〕W. 马克　J. 奥尼茨凯维奇　著

$$\sum_{i=1}^{n} ix^i=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}\ \text{for}\ x\neq 1$$

$$1+\frac{1}{a_1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{j}(a_i+1)}{\prod_{i=1}^{j+1}a_i}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i+1)}{\prod_{i=1}^{n+1}a_i}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\cos i\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$\prod_{i=0}^{n}\cos(2^i\cdot\theta)=\frac{\sin(2^{n+1}\cdot\theta)}{2^{n+1}\cdot\sin\theta}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot i!=(n+1)!-1$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x^{2^{i-1}})=1+\sum_{i=1}^{2^n-1}x^i$$

$$\bigwedge_x\bigwedge_y[2y<y+x\Rightarrow y<\tfrac{1}{2}(x+y)]$$

$$A_t=\left\{x:\frac{t}{t+1}\leqslant x<\frac{t+1}{t+2}\right\}$$

$$\bigcap_{t\in T}(A_t\cap B_t)=\bigcap_{t\in T}A_t\cap\bigcap_{t\in T}B_t$$

中国人民大学出版社

数理逻辑
与数学基础习题集

［波］W．马克　J．奥尼茨凯维奇　著

张金马　李　进　译

中国人民大学出版社

WIKTOR MAREK and JANUSZ ONYSZKIEWICZ
ELEMENTS OF LOGIC AND
FOUNDATIONS OF MATHEMATICS
IN PROBLEMS
D.REIDEL PUBLISHING COMPANY, 1982

本书根据莱德尔出版公司1982年版译出

数理逻辑与数学基础习题集
〔波〕W.马克 J.奥尼茨凯维奇 著
张金马 李 进 译

中国人民大学出版社出版发行
（北京西郊海淀路39号）
中国人民大学出版社印刷厂印刷
（北京鼓楼西大石桥胡同61号）
新 华 书 店 经 销

开本：850×1168毫米32开 印张：11
1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷
字数：268 000 册数：1—5 000

ISBN 7-300-00671-x

O·22 定价：4.00元

目　　录

原著者序

集合论作为数学分析基础的研究成果于19世纪脱颖而出。由于它们的普遍性，很快地，集合论的概念和方法深深地渗透到每个数学分支中。现在，集合论被认为是最基础的数学理论。按照伟大的法国数学家丹乔伊的说法，集合论是自牛顿和莱布尼兹以来无法估价的突破。

数理逻辑的历程也是蔚为壮观的——仅提及它在心理学、语言学和计算机科学方面的应用就足以说明这一点。

逻辑的和集合论的概念原本就是既基本又相当直观的概念。结果，最近数学教育的全过程都转向与它们相结合并广泛地使用它们。

这些研究与发展同可利用的文献是很不相匹配的。这些文献不能被没有经过广泛数学训练的人所利用。目前，多数的集合论与数理逻辑的教科书都把重点放在理论上，而没有给出足够的例子以及使掌握新概念的学生完全可以熟悉的简单的习题。

我们这本书的想法就是提供一个能覆盖所有基本集合论概念和逻辑概念的各色各样的练习。多数典型的习题我们都给出了答案，对较困难的习题我们做了提示以帮助和启发读者。每章中，习题都是按照它们的难易程度编排的。每一组类型的习题开始都是很容易的，它们当中的大多数习题，二年级大学生都可以回答。我们使本书包括这么多容易的习题，对尚未接触过问题所涉及的概念的人是有裨益的。有时，我们也给出一些性质类似的习题。我们的想法还包含着这样的意思：通过解所有的习题，能使

学生增强运用和掌握新概念的信心。这一点对无人指导、单凭自学的人尤为重要。我们也相信，容易的习题会使我们的书对中学也适用。

第九章是有特殊性质的一章，它采用的习题要求前面几章中的各种知识。这些练习可以用来检验学生的进步。

这本书没有给出集合论和逻辑学的完整的说明，它只作为辅助读物。虽然如此，为了方便读者，所有定义和结论都在每章的开头给出或者编入相应的习题中。更深入的内容，要更多地借助其他一些结论。读者可以在像库拉托夫斯基和莫斯托夫斯基的教科书《集合论》中找到这些材料。

本书的结尾还给出了布尔代数和数学归纳法的练习。我们决定包含这些课题是为了使本书尽可能丰富。

某些较深的习题加注了星标。

译 者 的 话

编写一本系统全面、技巧多样的习题集并不比写一本理论专著来得容易，这也许是至今国内尚没有一本完整的数学基础与逻辑基础习题集的原因。

近年来，随着计算机科学的发展，集合论和数理逻辑的一些内容开始在离散数学的书籍中得到介绍。但无论从理论的完整性还是从训练的全面性来说都尚嫌不足。特别是面对文科的有关教材中更存在着重视理论阐述，缺乏能力训练的现象。

读者面前的这本书表面上看只是一本按标码排列的习题集，可实际上它是有关数学基础与逻辑基础的纲领性的教科书。作者以其深厚的理论功底和丰富的解题技巧为我们铺设了一条通向理论前沿的道路。全书由浅入深，循序渐进，这对于立志从事逻辑与数学研究的读者是一本难得的理论与实践相结合的指导书。我们认为，独立解答本书提供的典型习题是掌握有关内容的必不可少的手段。而且实际上，本书列举的不少习题本身就是前辈学者理论突破的记录。因此，习题训练也就是对理论学习的深化和补充。为了如上的目的，我们翻译了本书，希望对于数学专业、逻辑专业、理论计算机专业以及语言学、心理学等有关专业的读者提供一份可靠的资料。

本书原版自1972年以来已在将近20个国家流传使用足以说明它的影响和价值。细心的读者在使用本书时一定会体会到原作者理论概括的严谨和习题精选的匠心，并从中得到教益。倘能如此，那将是对译者劳动的最大安慰。

本书采用了波兰符号（如量词符号）与波兰记法，与我国国内通用符号不尽相同，但只要读者仔细阅读每章前面的理论说明并稍加训练，是不难掌握的。

本书译自《PWN—Polish Scientific publishers—Warszawa》1982年英文版。书中第一章至第七章由张金马译出，王珊校。第八章至第十三章及两个增补章由李进译出，肖艳校。全书译文由张金马最后定稿。

由于书中使用符号较多，涉及英文、德文和希腊文，虽然我们尽力改正了原书中的一些印刷错误，但限于水平尚未发现的错误仍在所难免，敬请读者教正。

最后，我们还要感谢中国人民大学出版社本书的责任编辑沈小农同志。他为本书付出了巨大的劳动，否则本书的尽快问世是不可能的。

1987年12月30日

习　题

第一章　命题演算

一个赋值是指由命题变量集到{0，1}集的一个函数映射。这里 0 表示逻辑假值而 1 表示逻辑真值。这样，函数的概念即可自然地扩展到所有命题公式的集合中去。

一个重言式是一个对任何赋值均取值为 1 的公式。

一个n-元命题函项（命题联结词）是一个函数，这个函数就是所有n元组$\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$的集合到{0，1}集上的映射（这里$x_i$可以是真或假）。

于是，我们得到 4 个一元函项：

	0	1
A_0	0	0
A_1	0	1
A_2	1	0
A_3	1	1

和16个二元函项：

	00	01	10	11
B_0	0	0	0	0
B_1	0	0	0	1
B_2	0	0	1	0
B_3	0	0	1	1
B_4	0	1	0	0
B_5	0	1	0	1
B_6	0	1	1	0

B_7	0	1	1	1
B_8	1	0	0	0
B_9	1	0	0	1
B_{10}	1	0	1	0
B_{11}	1	0	1	1
B_{12}	1	1	0	0
B_{13}	1	1	0	1
B_{14}	1	1	1	0
B_{15}	1	1	1	1

在诸A_i和B_j函项之中（$0\leqslant i\leqslant 3$，$0\leqslant j\leqslant 15$）有一些传统的名称。函项A_2称为否定，用～表示。而函项B_1，B_7，B_{13}，B_9，B_{14}，B_8分别称为合取（∧），析取（∨），蕴涵（⇒），等价（⇔），谢弗尔撇号（|）和联合反驳函项。

1.1．用否定和析取函项定义合取函项。

1.2．用合取和否定函项定义析取函项。

1.3．用蕴涵和否定函项定义析取函项。

1.4．证明用析取和合取不能定义择一和蕴涵。

1.5．证明用等价和否定不能定义析取与合取。

1.6．证明用蕴涵与A_0可以定义所有的一元与二元命题函项。

1.7．证明用B_8（谢弗尔撇号）或B_{14}（联合反驳）可以定义所有其他的一元或二元命题函项。

1.8．证明函项B_8和B_{14}是仅有的具有1.7中所陈述的性质的函项。证明每一个n元函项（n是任意的）可用B_8定义。对B_{14}证明同样的性质。

1.9．设一个公式（合式公式）f包含n个命题变量，为了考查f是否一个重言式需要多少个赋值？

证明下面的式子是重言式（1.10—1.32）：

1.10. $p \Rightarrow p$

1.11. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

1.12. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$

1.13. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

1.14. $p \Leftrightarrow \sim\sim p$ （双重否定律）

1.15. $p \vee \sim p$ （排中律）

1.16. $\sim(p \wedge \sim p)$ （矛盾律）

1.17. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ （德·摩根律）

1.18. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ （德·摩根律）

1.19. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ （换位异质律）

1.20. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$ （皮尔士律）

1.21. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

1.22. $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ （克莱夫厄斯律）

1.23. $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ （邓—斯科特斯律）

1.24. $(p \wedge q) \Rightarrow p$

1.25. $p \Rightarrow (p \vee q)$

1.26. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

1.27. $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$

1.28. $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$

1.29. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

1.30. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

1.31. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

1.32. $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

检查下面的式子是否为重言式（1.33—1.61）：

1.33. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

1.34. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$

1.35. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$

1.36. $p \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$

1.37. $[(p\vee q)\wedge(p\Rightarrow q)]\Rightarrow(q\Rightarrow p)$

1.38. $p\vee[(\sim p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)]$

1.39. $\sim[p\wedge(\sim p\wedge q)]$

1.40. $p\Rightarrow[(\sim q\wedge q)\Rightarrow r]$

1.41. $[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)]\Rightarrow p\vee q)$

1.42. $[(p\vee q)\Rightarrow(p\vee\sim q)]\Rightarrow(\sim p\vee q)$

1.43. $[(p\wedge q)\vee(p\Rightarrow q)]\Rightarrow(p\Rightarrow q)$

1.44. $[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

1.45. $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)]\Rightarrow(p\vee r\Rightarrow q\vee s)$

1.46. $(p\wedge q\Rightarrow r)\Rightarrow[(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)]$

1.47. $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)]\Rightarrow[(p\wedge r)\Rightarrow(q\wedge s)]$

1.48. $\{[(p\wedge q)\Rightarrow r]\wedge(p\vee q\Rightarrow\sim r)\}\Rightarrow(p\wedge q\wedge r)$

1.49. $[p\Rightarrow(q\Rightarrow r)]\Leftrightarrow[q\Rightarrow(p\Rightarrow r)]$

1.50. $(p\vee q\vee r)\Rightarrow\{\sim p\Rightarrow[(q\vee r)\wedge\sim p]\}$

1.51. $[\sim(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)]\Rightarrow(p\wedge\sim q)$

1.52. $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)]\Rightarrow[(p\wedge s)\Rightarrow(q\vee r)]$

1.53. $[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(q\Rightarrow r)]\Rightarrow[(r\Rightarrow p)\Rightarrow(q\Rightarrow p)]$

1.54. $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow[(p\wedge q)\Leftrightarrow p]$

1.55. $[(p\Rightarrow q)\vee(p\Rightarrow r)\vee(p\Rightarrow s)]\Rightarrow[p\Rightarrow(q\vee r\vee s)]$

1.56. $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow q)\wedge(s\Rightarrow q)]\Rightarrow[(p\wedge r\wedge\sim s)\Rightarrow q]$

1.57. $\{[(p\wedge q)\Rightarrow r]\wedge[(p\wedge q)\Rightarrow\sim r]\}\Rightarrow(\sim p\wedge\sim q\wedge\sim r)$

1.58. $[(\sim p\wedge q)\vee(p\vee\sim q)]\Rightarrow\{[p\Rightarrow(q\vee r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)\}$

1.59. $[(p\vee q)\wedge(r\vee s)]\Rightarrow\{[(p\Rightarrow q)\vee(p\Rightarrow r)]\wedge[(q\Rightarrow p)$
$\vee(q\Rightarrow p)]\}$

1.60. $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)\wedge(t\Rightarrow u)]\Rightarrow[(p\wedge r\wedge t)\Rightarrow(q\wedge s$
$\wedge u)]$

1.61. $[(p\vee q)\Rightarrow r]\Rightarrow[(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)]$

1.62. 下面的命题是否为真？若自然数a是一个质数，（在此

条件下）若a是合数，则a等于 4 。

1.63. 下面的命题是否为真？若自然数可以被 3 整除，（在此条件下）若a不能被 3 整除，则a可被 5 整除。

1.64. 下面的命题是否为真？如果三角形 ABC 所有的边相等，它的所有的角也相等，由此得到：若三角形ABC有不相等的角，那么它的边也不相等。

1.65. 下面的命题是否为真？若A是一个四边形且A的角都相等。那么由A是一个四边形即可推出所有的边也相等。

1.66. 下面的命题是否为真？若自然数a可以被 3 和 5 整除，那么（在此条件下），若a不能被 3 整除则a也就不能被 5 整除。

1.67. 下面的命题是否为真？若自然数a可以被 2 和 7 整除，那么（在此条件下），若a不能被 7 整除则a也就不能被 3 整除。

1.68. 下面的命题是否为真？若直线L平行于直线M或直线P不平行于直线M不为真，则或者L不平行于M，或者P平行于M。

1.69. 下面的命题是否为真？如果约翰不懂逻辑，那么（在此条件下），若约翰懂逻辑则约翰在公元前四世纪出生。

1.70. 下面的命题是否为真？约翰懂逻辑当且仅当约翰懂逻辑不为真这句话不为真。

1.71. 下面的命题是否为真？如果由函数f在x_0点可微可以得到函数f在x_0点连续，那么由函数f在x_0点连续就可得到函数f在x_0点可微。

1.72. 证明：若命题p为假，那么对每一命题q：

(a) $p \vee q$等价于q

(b) $p \wedge q$等价于p

1.73. 证明：若命题p为真，那么对每一命题q：

(a) $p \vee q$等价于p

(b) $p\wedge q$等价于q

1.74. 让我们用自然数0和1分别表示逻辑值0和1，函项即可表示为如下：

$$\sim p = 1 - p,$$
$$p\wedge q = \min(p,q) = pq,$$
$$p\vee q = \max(p,q) = p + q - p\bar{q},$$
$$p\Rightarrow q = 1 - p + pq$$

证明：在这种解释下，表达式是一个重言式当且仅当在任何赋值下它都取值为1。

*1.75.让我们用自然数1和0分别表示逻辑值0和1，求类似于1.74给出的表达式。证明相应的定理（注意不是把1而应把0作为定理的断言）。

1.76. 证明：若表达式Ψ是重言式，那么表达式

$$\Phi_1\Rightarrow(\Phi_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow(\Phi_n\Rightarrow\Psi)\cdots)$$

也是一个重言式。

1.77. 证明：若表达式Ψ是一个重言式，那么表达式

$$\sim\Psi\Rightarrow(\Phi_1\Rightarrow(\Phi_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow(\Phi_{n-1}\Rightarrow\Phi_n)\cdots)$$

也是一个重言式。

1.78. 考虑形如

$$\underbrace{(\cdots((p\Rightarrow p)\Rightarrow p)\Rightarrow p)\cdots)\Rightarrow p}_{n}$$

的表达式，当n为何值时该公式是一个重言式？

1.79. 定义$P^0 = P$，$P^1 = \sim P$。考虑形如

$$(*)\quad (\cdots p^{i_0}\Rightarrow p^{i_1})\Rightarrow\cdots)\Rightarrow p^{i_{n-1}}$$

的表达式，对什么样的序列$\langle i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}\rangle$公式$(*)$是一个重言式？

1.80. 公式Θ是一个析取标准型当且仅当它形如

$$\Theta: \Phi_1\vee\cdots\vee\Phi_n,$$