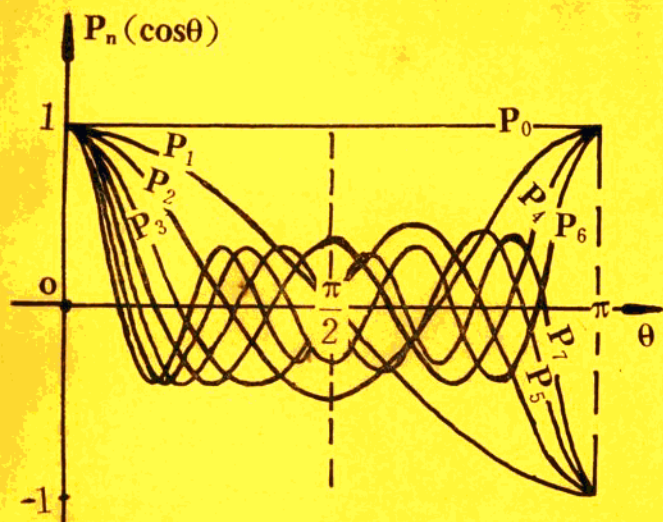




数学物理方法

李玉新 章克文 合编

陕西师范大学出版社

前 言

数学物理方法是物理专业及相关专业的一门重要基础课，它一方面为深入学习物理理论作了必要的数学准备，另一方面也为实际中如何运用物理理论创造了条件。本书共分4篇17章，第一篇讨论复变函数的基本理论；第二篇介绍积分变换；第三篇建立常见的数理方程及其定解条件，着重介绍定解问题的各种基本解法；第四篇讨论几种特殊函数。

本书根据原教育部颁发的教学大纲，在编写过程中，广取众家之长，集编者多年教学实践经验于其中。叙述中特别注意层次分明；对于基本方法注意概括出原则步骤，并辅以适当的例题；每章后面配有一定量的习题。本书曾作为讲义试用过5次，效果较好。

本书由章克文同志编写第一、二篇，李玉新同志编写第三、四篇。

由于我们水平有限，书中难免有不少缺点和错误，诚恳希望使用本书的教师和读者批评指正。

编 者

1991年4月

0262-38/11

目 录

第一篇 复变函数论

第一章 复数与复变函数

第一节 复数及其运算	1
第二节 复变函数	8
第三节 复变函数的极限与连续性	12
第四节 初等函数	19

第二章 解析函数

第一节 解析函数	29
第二节 解析函数与调和函数的联系	34
第三节 解析函数在平面场中的应用	38

第三章 复变函数积分

第一节 复变函数积分及其简单性质	42
第二节 柯西积分定理	45
第三节 柯西积分公式	49

第四章 级数、幂级数

第一节 函数项级数的基本性质	57
第二节 解析函数的幂级数表示	63
第三节 单值函数的孤立奇点	76

第五章 残数定理及其应用

第一节 残数定理	88
第二节 利用残数定理计算积分、实积分	96

第六章 解析变换

第一节	解析变换的性质	115
第二节	分线性变换	118
第三节	某些初等函数所表示的变换	127

第二篇 傅氏变换与拉氏变换

第七章 傅氏变换

第一节	傅氏变换	131
第二节	傅氏变换的基本性质	134
第三节	多维傅氏变换	140

第八章 拉普拉斯变换

第一节	拉普拉斯变换	146
第二节	拉普拉斯变换的性质	149
第三节	拉氏变换的反演	158

第三篇 数学物理方程

第九章 数理方程及其定解条件

第一节	基本方程的建立	166
第二节	定解条件及适定性概念	178

第十章 分离变量法

第一节	有界弦的自由振动	190
第二节	非齐次方程与非齐次边界条件	201
第三节	斯特姆—刘维尔型方程 的本征值问题	209
第四节	有界杆的热传导问题	215
第四节	拉普拉斯方程的狄利克雷问题	222

第十一章 行波法

- 第一节 达朗贝尔公式230
- 第二节 反射波235
- 第三节 三维波动方程的柯西问题240
- 第四节 杜哈美原理及应用249

第十二章 积分变换法

- 第一节 傅立叶变换法258
- 第二节 拉普拉斯变换法263

第十三章 格林函数法

- 第一节 δ -函数272
- 第二节 解混合问题的格林函数法282
- 第三节 解初值问题的格林函数法289
- 第四节 泊松方程第一边值问题
的格林函数解法293

第十四章 变分法

- 第一节 变分问题312
- 第二节 变分问题的直接解法328
- 第三节 本征值问题的变分求法336

第四篇 特殊函数

第十五章 勒让德多项式

- 第一节 勒让德方程及勒让德多项式344
- 第二节 勒让德多项式的母函数
及其递推公式353
- 第三节 按勒让德多项式展开360
- 第四节 连带勒让德多项式365

第五节	球函数	369
第十六章	贝塞尔函数	
第一节	贝塞尔方程与贝塞尔函数	374
第二节	贝塞尔函数的母函数 及其递推公式	381
第三节	按贝塞尔函数展开	390
第四节	其它类型的贝塞尔函数	400
第十七章	厄米多项式和拉盖尔多项式	
第一节	厄米多项式	407
第二节	拉盖尔多项式	414
附录 I	傅里叶变换表	421
附录 II	拉普拉斯变换表	423

第一篇 复变函数论

复变函数论是数学的一个重要分支，它在数学的许多分支中及物理学中有着广泛的应用。

第一章 复数与复变函数

本章介绍复变函数论中的一些基本概念。

第一节 复数及其运算

在这一节中，扼要地复习复数及其运算。

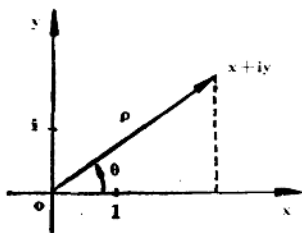
一、复数及其各种表示

取 $i = \sqrt{-1}$ ，当 x, y 为实数时，称 $x + iy$ 为复数，记为 $z = x + iy$ 。称 x 为 z 的实部，记为 $\operatorname{Re} z$ ；称 y 为 z 的虚部，记为 $\operatorname{Im} z$ 。

当 $y = 0$ 时，将 $z = x + i0$ 看成是实数 x ，因此全体实数 R 是全体复数 C 的子集， $R \subset C$ 。

给定一复数 $z = x + iy$ ，就是给定了一对有序实数 (x, y) ，相当于给定一个二维矢量，也相当于在坐标面上给定了一点 $P(x, y)$ 。

若在坐标面上取直角坐标系，横坐标轴上单位为 1，纵坐标轴上单位为 i 。于是，这坐标面上一点 (x, y) 与复数 $x + iy$ 对应，全体复数与这坐标面上的点可建立一一对应。故称这平面为复平面，称横坐标轴为实轴，纵坐标轴为虚轴(图1-1)。



(图 1-1)

若在复平面上取极坐标系，极点为原点 $z=0$ ，极轴为实轴正向。

当 $x^2 + y^2 = 0$ 时， $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ 。

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时， $x = \rho \cos \theta$ ， $y = \rho \sin \theta$ ，于是有复数的三角表达式：

$$z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

由尤拉公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

得复数的指数表达式：

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

称 ρ 为复数 z 的模。记为 $|z|$ ，即

$$|z| = |x + iy| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

称 θ 为复数 z 的辐角，记为 $\text{Arg } z$ 。

复数 z 的辐角不是唯一的。 $z=0$ 时， z 的辐角不定； $z \neq 0$ 时，若 θ 是 z 的辐角，则 $\theta + 2n\pi$ 也是 z 的辐角，其中 n 为整数。当 θ 满足 $-\pi < \theta \leq \pi$ 时，称 θ 为 z 的主辐角，记为 $\arg z$ 。故

$$\text{Arg } z = \arg z + 2n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

当 $z = x + iy \neq 0$ 时,

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x \geq 0, \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

例 1 求复数 $z_1 = -1 + i$; $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_3 = \sqrt{3} - i$ 的模与辐角.

解 $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$

$$\arg z_1 = \arctg \frac{1}{-1} + \pi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

$$\operatorname{Arg} z_1 = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \text{ 为整数}).$$

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\arg z_2 = -\pi + \arctg \frac{-\sqrt{3}}{-1} = -\frac{2\pi}{3},$$

$$\operatorname{Arg} z_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \quad (n \text{ 为整数}).$$

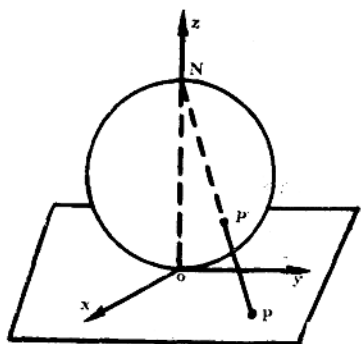
$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\arg z_3 = \arctg \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{Arg} z_3 = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad (n \text{ 为整数}).$$

取一个在原点 O 与复平面相切的球面 (如图 1-2), ON

为球的一直径，作下述对应， P 为复平面上一点，线段 PN 交球面于一点 P' ，取 P 与 P' 对应。这样，除点 N 外，球面上的点与复平面上的点间建立了一一对应关系，以 P' 表复数 z 。为了使点 N 有对应点，将复平面无限远看成一假想点与 N 对应，这个假想点被称为无限远点，记为 $z = \infty$ 。称此球面为复数球面。称不含无限远点的复平面为开复平面，称含无限远点的复平面为闭复平面。



(图 1-2)

二、复数的运算

1. 复数的相等

当两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 满足 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ 时，称 z_1 与 z_2 相等，记为 $z_1 = z_2$ 。

2. 复数的加法

设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 称复数 $(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ 为 z_1 与 z_2 的和，记为 $z_1 + z_2$ 。

复数的加法满足：

交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

结合律 $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ 。

3. 复数的减法

规定 $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$

$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

4. 复数的乘法

设 $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$,

规定

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

复数的乘法满足:

交换律 $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

结合律 $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;

分配律 $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

5. 复数的除法

设 $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$,

$\rho_2 \neq 0$, 规定

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \end{aligned}$$

例 2 求 $\sum_{k=1}^n \sin k\theta$, $\sum_{k=1}^n \cos k\theta$.

解 当 $\theta = 2m\pi$ (m 为整数) 时,

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = 0, \quad \sum_{k=1}^n \cos k\theta = n,$$

当 $\theta \neq 2m\pi$ (m 为整数) 时,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=-1}^n \cos k\theta + i \sum_{k=-1}^n \sin k\theta \\
 &= \sum_{k=-1}^n (\cos k\theta + i \sin k\theta) \\
 &= \sum_{k=-1}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=-1}^n (e^{i\theta})^k \\
 &= \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\
 &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{\sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(\cos \frac{n+1}{2}\theta + i \sin \frac{n+1}{2}\theta \right),
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=-1}^n \cos k\theta = \frac{\sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{n+1}{2}\theta,$$

$$\sum_{k=-1}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{n+1}{2}\theta.$$

6. 共轭

规定 $z = x_1 - iy_1$ 是 $z_1 = x_1 + iy_1$ 的共轭复数, 记为 $\bar{z}_1$,

即 $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$. $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $\bar{z}_1 = \rho_1 e^{-i\theta_1}$.

复数共轭有以下性质:

$$(1) \overline{\overline{z_1}} = z_1; \quad (2) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};$$

$$(3) \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}; \quad (4) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

7. 复数的模

规定 $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. 模有以下性质:

$$(1) |z|^2 = z\overline{z}; \quad (2) |z| = |\overline{z}|;$$

$$(3) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \quad (4) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};$$

$$(5) |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

$$(6) |z| \geq 0.$$

8. 复数的辐角

$\text{Arg } z = \arg z + 2n\pi$ (n 为整数). 辐角有以下性质:

$$(1) \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2;$$

$$(2) \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

9. 复数的实部有以下性质

$$(1) \text{Re } z = \frac{z + \overline{z}}{2}; \quad (2) \text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re } z_1 + \text{Re } z_2;$$

$$(3) \text{Re}(\text{Re } z) = \text{Re } z.$$

10. 复数的虚部有以下性质

$$(1) \text{Im } z = \frac{z - \overline{z}}{2i}; \quad (2) \text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im } z_1 + \text{Im } z_2;$$

$$(3) \text{Im}(\text{Im } z) = 0; \quad (4) \text{Re}(\text{Im } z) = 0;$$

$$(5) \text{Im}(\text{Re } z) = 0.$$

11. 复数的乘方

设 $z = \rho e^{i\theta}$, n 为整数时, $z^n = \rho^n e^{in\theta + i2k\pi}$ (k 为整数),
 n 为负整数时, 限定 $\rho \neq 0$, $z^n = \rho^n e^{in\theta + i2k\pi}$ (k 为整数).

12. 复数的开方

设 $z = \rho e^{i\theta}$, n 为大于 1 的整数.

$$z^{\frac{1}{n}} = (\rho e^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \text{ 为整数}).$$

k 取 $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 时, 得 n 个不同的值. $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, 这 n 个(值)点 n 等分圆周 $|w| = \rho^{\frac{1}{n}}$.

例 3 解 $z^4 + 1 = 0$.

解 $z^4 = -1 = e^{i(\pi + 2k\pi)} \quad (k \text{ 为整数}),$

$$\therefore z_k = e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{4}} \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

$$z_0 = e^{i \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i),$$

$$z_1 = e^{i \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 + i),$$

$$z_2 = e^{i \frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 - i),$$

$$z_3 = e^{i \frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i),$$

且有 $\sum_{j=0}^3 z_j = 0$, $\prod_{j=0}^3 z_j = 1$, 这四个点四等分圆周 $|z| = 1$.

第二节 复变函数

一、区域及约当曲线的概念

1. 约当曲线

若 $x(t)$, $y(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上两个连续函数, 则

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

是 xOy 平面上一连续曲线, 故 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 是复平面上一连续曲线. 若对任意的 $t_1, t_2, \alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta, z(t_1) \neq z(t_2)$, 则连续曲线 $z(t), \alpha \leq t \leq \beta$, 自身不相交 (即无重点), 这时, 称曲线为 **简单开曲线 (或约当开曲线)**. 若对任意的 $t_1, t_2, \alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta, z(t_1) \neq z(t_2), z(\alpha) = z(\beta)$, 称连续曲线 $z(t)$ 为 **简单闭曲线 (或约当闭曲线)**.

例如 $z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}, 0 \leq t \leq \pi$, 是一约当开曲线, 它是单位圆周上半圆弧.

$z(t) = \sin t + i \cos t = ie^{-it}, 0 \leq t \leq 2\pi$, 是一约当闭曲线, 它是单位圆周.

2. 区域

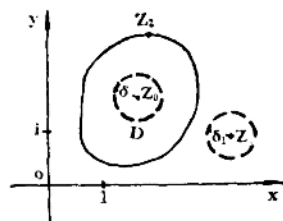
设 D 为复平面 z 上非空集, $z_0 \in D$, 若存在 $\delta > 0$, 使 $|z - z_0| < \delta \subset D$, 则称 z_0 是 D 的 **内点**. 称 $|z - z_0| < \delta$ 为 z_0 的 **δ 邻域**. 若 $z_1 \in D$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使 $|z - z_1| < \delta_1$ 中任一点不属于 D , 则称 z_1 是 D 的 **外点**; 若 z_2 既不是 D 的内点, 也不是 D 的外点, 则称 z_2 是 D 的 (边) **界点**. 称 D 的全部界点所构成的集为 D 的 **边界** (图 1-3).

集 D 中的点都是 D 的内点, 称 D 为 **开集**.

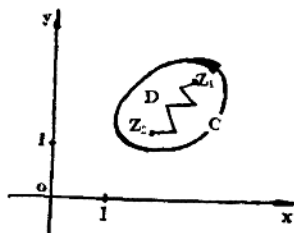
若集 D 满足: 对于 D 中任意两点 z_1, z_2 都存在含于 D 的折线将 z_1, z_2 连接, 称 D 为 **连通集** (图 1-4).

定义 连通集 D 且为开集时, 称 D 为 **区域**. 区域 D 与其边界的并, 被称为 **闭区域**, 记为 $\bar{D}$.

沿区域 D 的有向边界 C 前行, 若区域 D 总落在行走者



(图 1-3)

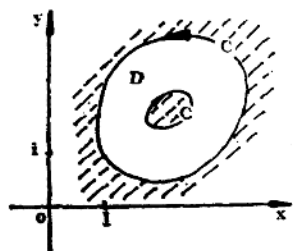


(图 1-4)

的左边，则称 C 为 D 的正向边界。

若区域 D 满足： D 内任一简单闭曲线都能经 D 内的连续变形缩成 D 内的一点，则称 D 为**单连通域**。不是单连通域的区域，称为**复连通域**(图1-5)。

图 1-4 中的有向边界 C 是单连通域 D 的正向边界。图



(图 1-5)

1-5 中的有向边界 C 是复连通域 D 的正向边界。

例如 以 z_1 为圆心，以 R 为半径的圆 $|z - z_1| < R$ 是一单连通域。上半复平面 $\text{Im } z > 0$ 是一单连通域。

二、复变函数

定义 设 E 为一非空复数集，若对 E 中任一点 z ，都有一个(或多个)确定的复数 w 与 z 对应，则称 E 上确定一复自变量的**单(多)值函数**，记为 $w = f(z)$ $z \in E$ ，称 E 为 $f(z)$

的定义域；对应值 w 的全体构成的集称为 $f(z)$ 的值域。

今后如不特别声明，所提到的复变函数都指单值复函数。

由 $w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$, $z = x + iy \in E$,

知 $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$ 为 x, y 的二元实函数，故给定一复自变量的复函数，也就是给定了有序的两个二元实函数。

$$\begin{aligned} \text{例如 } w_1 &= \operatorname{Re} z, & |z| < +\infty, \\ w_2 &= e^z, & |z| < +\infty, \end{aligned}$$

都是单值函数。

$$\operatorname{Re} w_1 = u_1 = \operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} w_1 = v_1 = 0;$$

$$\operatorname{Re} w_2 = u_2 = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} w_2 = v_2 = e^x \sin y.$$

都是二元实函数。而

$$w_3 = \operatorname{Arg} z \quad 0 < |z| < +\infty,$$

是多值函数。

若单值函数 $w = f(z)$, $z \in E$, 满足

$z_1, z_2 \in E$ 且 $z_1 \neq z_2$, 有 $f(z_1) \neq f(z_2)$, 则称 $W = f(z)$ 在 E 上是单叶的。

复函数的几何意义是 z 平面到 W 平面的映射，对应于 z 的 W , 称为 z 的像。而称 z 为 W 的像原或原像。

例 求在 $w = e^z$, $|z| < +\infty$ 映射下, z 平面上点 $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$; 线段 $z = 2 + iy, 0 \leq y \leq 2\pi$; 及区域 $D: 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ 的像。

解 z_0 的像为

$$w_0 = e^{1+i\frac{\pi}{2}} = ie;$$

线段 $z = 2 + iy \quad 0 \leq y \leq 2\pi$ 的像为