北京自修大学

财经专业

学刊

7-8

北京广播学院出版社

北京自修大学

财经专业 学刊目录

第七—八期 （总字第32期）

课程辅导

辅导材料

管理之窗

乡镇企业管理

微积分300题详解(三)

张 贵　　高月辉

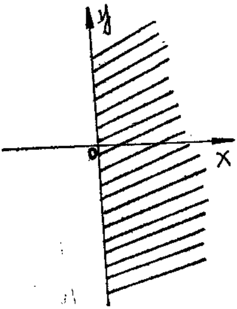
例201　求下列函数的定义域：

(1)　$z=\sqrt{x}+y$　　　　(2)　$z=\ln(-x-y)$

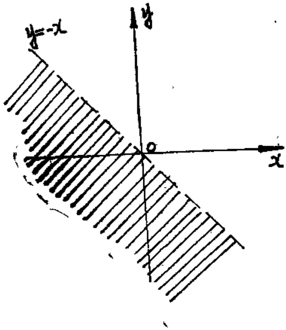
(3)　$z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　　　(4)　$z=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}$

解：(1)　$z=\sqrt{x}+y$

因为当$x\geqslant0$，且$-\infty<y<+\infty$时，函数有定义，故所求定义域$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x\geqslant0,\text{且}-\infty<y<+\infty\right\}$即为含y轴的右半个平面。如图(1)



图(1)



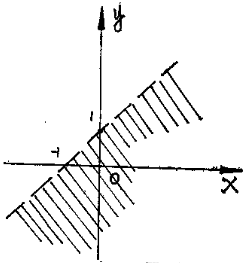
图(2)

(2)　$z=\ln(-x-y)$

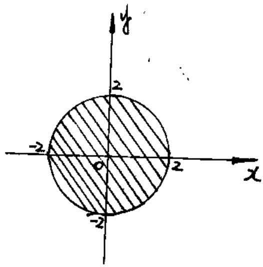
因为当$-x-y>0$时，函数有定义，故定义域$D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ x+y<0\right\}$，如图(2)

(3)　$z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

因为当$x-y+1>0$即$y<x+1$时函数有定义，故定义域$D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ y<x+1\right\}$，如图(3)



图(3)



图(4)

（4） $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}$

因为当$\left|\dfrac{x^2+y^2}{4}\right|\leqslant 1$时，即$-4\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$时函数有定义，故定义域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,-4\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\right\}$，如图（4）。

例202：求下列函数的偏导数：

（1） $z=3x^2y^3$ （2） $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$

（3） $z=\ln\dfrac{xy}{x+y}$ （4） $z=x^y$

解：（1）$z=3x^2y^3$

计算z关于x的偏导数时，把y^3当作常量。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^3$$

计算z关于y的偏导数时，把x^2当作常量。

$$\frac{\partial z}{\partial y}=9x^2y^2$$

（2） $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{-x}{x^2+y^2}$$

（3） $z=\ln\dfrac{xy}{x+y}$

因为$z=\ln\dfrac{xy}{x+y}=\ln(xy)-\ln(x+y)=\ln x+\ln y+\ln(x+y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y}(x+y)'_x=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}(x+y)'_y=\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}$$

（4） $z=x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^y)'_x=yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^y)'_y=x^y\ln x$$

例203：求下列函数在指定点的所有偏导数：

（1） $u=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$　　在（1，0）处

（2） $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$　　在（1，0）处

解：（1） $u'_x=\frac{1}{x+\frac{y}{2x}}\left(1-\frac{y}{2x^2}\right)=\frac{2x}{2x^2+y}\left(1-\frac{y}{2x^2}\right)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=\frac{2\times1}{2\times1^2+0}\left(1-\frac{0}{2\times1^2}\right)=1$$

$$u'_y=\frac{2x}{2x^2+y}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x^2+y}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=\left.\frac{1}{2x^2+y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=\frac{1}{2}$$

（2） $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=f'_x(x,0)\Big|_{x=1}=\left(\operatorname{arctg}\frac{0}{x}\right)'_x\Big|_{x=1}=0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=f'_y(1,y)\Big|_{y=0}=\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{1}\right)'_y\Big|_{y=0}=\left.\frac{1}{1+y^2}\right|_{y=0}=1$$

例204：求下列函数的所有二阶偏导数：

（1） $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$　　（2） $z=\sin(2x+y^2)$

解：（1） $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

(2) $z=\sin(2x+y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(2x+y^2)(2x+y^2)'_x=2\cos(2x+y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(2x+y^2)(2x+y^2)'_y=2y\cos(2x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4\sin(2x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\cos(2x+y^2)-2y\sin(2x+y^2)\cdot 2y$$

$$=2\left[\cos(2x+y^2)-2y^2\sin(2x+y^2)\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-2\sin(2x+y^2)\cdot 2y=-4y\sin(2x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=-2y\sin(2x+y^2)\cdot 2=-4y\sin(2x+y^2)$$

例205：求下列函数的全微分：

(1) $z=\frac{x+y}{x-y}$ 求 dz (2) $u=x^{\frac{y}{z}}$ 求 du

解：(1) $z=\frac{x+y}{x-y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1\times(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{-2y}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1\times(x-y)-(-1)\times(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{-2y}{(x-y)^2}dx+\frac{2x}{(x-y)^2}dy$$

$$=\frac{2(xdy-ydx)}{(x-y)^2}$$

(2) $u=x^{\frac{y}{z}}$

这是一个三元函数，类似地，全微分等于三个偏微分之和

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{x}}\cdot\ln x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\cdot x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x$$

当$x>0$且$z\neq 0$时，三个偏导数连续，所以

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}\cdot dx+\frac{1}{z}x^{\frac{y}{x}}\ln x\cdot dy+\frac{-y}{z^2}\cdot x^{\frac{y}{z}}\cdot \ln x dz$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot x^{\frac{y}{z}}\left[yzx^{-1}dx+z\ln xdy-y\ln xdz\right]$$

例206：求函数$z=2x^2+3y^2$　当$x=10$，$y=8$，$\Delta x=0.2$，$\Delta y=0.3$时全增量与全微分：

解：全增量$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$

$$=2(x+\Delta x)^2+3(y+\Delta y)^2-2x^2-3y^2$$

$$=4x\Delta x+2(\Delta x)^2+6y\Delta y+3(\Delta y)^2$$

$$=2\Delta x(2x+\Delta x)+3\Delta y(2y+\Delta y)$$

$$=2\times 0.2(2\times 10+0.2)+3\times 0.3(2\times 8+0.3)$$

$$=8.08+14.67=22.75$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=10\\y=8}}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=10\\y=8}}dy$$

$$=\left[4\times dx+6ydy\right]_{\substack{x=10\ \ dx=0.2\\y=8\ \ dy=0.3}}$$

$$=40\times 0.2+48\times 0.3=22.4$$

例207：计算$(1.02)^{2.97}$的近似值：

解：设$f(x, y)=x^y$即求$f(x, y)$在$x=1.02$，$y=2.97$处的函数值，取$x=1$，$\Delta x=0.02$，$y=3$，$\Delta y=-0.03$，$\Delta f=f(1+0.02, 3-0.03)-f(1, 3)$

$$=f(1.02, 2.97)-f(1, 3)$$

$$\Delta f\approx df=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=3}}dx+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=3}}dy$$

$$=yx^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=3}}\Delta x+x^y\ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=3}}\Delta y$$

$$=3\times 1^2\times 0.02+1^3\times \ln 1-(-0.03)=0.06$$

所以$(1.02)^{2.97}=f(1.02, 2.97)=f(1, 3)+\Delta f$

$$\approx f(1, 3)+df=1^3+0.06=1.06$$

例208：求下列函数的偏导数：

(1)　$z=e^{xy}\cos(x-y)$　　　(2)　$z=(2x^3+y)^{3x-y^2}$

解：(1) $z=e^{xy}\cos(x-y)$

设$u=xy$　$v=\cos(x-y)$则$z=e^u\cos v$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=e^{u}\cos v\cdot y+e^{u}(-\sin v)\cdot 1$$
$$=ye^{xy}\cos(x-y)-e^{xy}\sin(x-y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=e^{u}\cos v\cdot x-e^{u}\sin v\cdot(-1)$$
$$=e^{xy}[x\cos(x-y)+\sin(x-y)]$$

(2) $z=(2x^3+y)^{3x-y^2}$

设$u=2x^3+y$，$v=3x-y^2$，则$z=u^v$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=vu^{v-1}\cdot 6x^2+u^v\ln u\cdot 3$$
$$=6x^2(3x-y^2)(2x^3+y)^{3x-y^2-1}+3(2x^3+y)^{3x-y^2}\ln(2x^3+y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=vu^{v-1}\cdot 1+u^v\ln u\cdot(-2y)$$
$$=(3x-y^2)(2x^3+y)^{3x-y^2-1}-2y(2x^3+y)^{3x-y^2}\ln(2x^3+y)$$

例209：求下列函数的全导数：

(1) $z=e^{u^2}\ln x \qquad u=x^2+1$

(2) $z=\operatorname{arctg}(xy) \qquad y=e^x$

解：(1) $z=e^{u^2}\ln x \qquad u=x^2+1$
$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}$$
$$=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$=2ue^{u^2}\cdot\ln x\cdot(2x)+\frac{1}{x}e^{u^2}$$
$$=e^{(x^2+1)^2}\left[2(x^2+1)(2x)\ln x+\frac{1}{x}\right]$$
$$=e^{(x^2+1)^2}\left[4x(x^2+1)\ln x+\frac{1}{x}\right]$$

(2) $z=\operatorname{arctg}(xy) \qquad y=e^x$
$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}e^x=\frac{(1+x)e^x}{1+x^2e^{2x}}$$

例210：求下列函数偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$

（1） $z=f(u, v, x)$，$u=x^2-y^2$，$v=\sin(xy)$

（2） $z=f(x, xy, xyr)$

解：（1）$z=f(u, v, x)$ $u=x^2-y^2$ $v=\sin(xy)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-2y\frac{\partial f}{\partial u}+x\cos(xy)\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$=2x\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos(xy)\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x}$$

（2）$z=f(x, xy, xyr)$

令 $u=xy$，$v=xyr$，$w=x$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=f'_w\cdot 1+f'_u\cdot y+f'_v\cdot yr=f'_w+yf'_u+yrf'_v$$

同理 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=xf'_u+xrf'_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=xyf'_v$$

例211，求下列隐函数偏导数：

（1） 求由$x^2+y^2+z^2=4z$确定z为x，y的隐函数的二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

（2） 设$e^z-xyz=0$ 求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

解：（1） $x^2+y^2+z^2=4z$

令 $F(x、y)=x^2+y^2+z^2-4z$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x}{2z-4}=\frac{x}{2-z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2y}{2z-4}=\frac{y}{2-z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2-z}\right)=\frac{(2-z)-x\frac{\partial(2-z)}{\partial x}}{(2-z)^2}$$

$$=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\frac{x}{2-z}}{(2-z)^2}$$

$$=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

（2） $e^z-xyz=0$

令 $F=e^z-xyz$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{-yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{e^z-xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{-xz}{e^z-xy}=\frac{xz}{e^z-xy}$$

例212：求下列函数的极值：

（1） $f(x,y)=e^x(x+y^2+2y)$ （2） $f(x,y)=x^3-y^3-6xy$

解：（1） $f(x,y)=e^x(x+y^2+2y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x(x+y^2+2y+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^x(2y+2)$$

令 $\begin{cases}e^x(x+y^2+2y+1)=0\\e^x(2y+2)=0\end{cases}$

得 $\begin{cases}x+y^2+2y+1=0\\2y+2=0\end{cases}$

解得驻点（0，−1）

计算 $A=\frac{\partial^2 f(0,-1)}{\partial x^2}=e^x(x+y^2+2y+2)\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=1$

$B=\frac{\partial^2 f(0,-1)}{\partial x\partial y}=e^x(2y+2)\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=0$

$C=\frac{\partial^2 f(0,-1)}{\partial y^2}=2e^x\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=2$

可知 $B^2-AC=0-2=-2<0$ 且 $A>0$，那么，驻点（0，−1）是极小值点，极小值为 $f(0,-1)=-1$

（2） $f(x、y)=x^3-y^3-6xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-6y$ $\frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2-6x$

令 $\begin{cases}3x^2-6y=0\\-3y^2-6x=0\end{cases}$ 得驻点(0，0)、(−2，2)

计算： $f''_{xx}=6x$ $f''_{xy}=-6$ $f''_{yy}=-6y$

对于驻点（0，0） $B^2-AC=36>0$，可知（0，0）不是极值点。

对于驻点（−2，2），$B^2-AC=36-144=-108<0$ 且 $A<0$，所以（−2，2）是极大值点，极大值为 $f(-2,2)=8$

例213：某工厂生产甲乙两种产品，出售单价分别为10元与9元，生产甲产品x单位及乙产品y单位时总成本为$C(x, y)=400+2x+3y+0.01\times(3x^2+xy+3y^2)$求：取得最大利润时，两种产品的产量各是多少？

解：设甲乙两种产品产量分别为x，y时的总利润为 $L(x, y)=10x+9y-[400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)]$

$$=8x+6y-400-0.01(3x^2+xy+3y^2)$$

由
$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x}=8-0.01(6x+y)=0$$
$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial y}=6-0.01(x+6y)=0$$

得驻点$(120, 80)$，由于函数是连续的，且实际上存在最大值，所以可以断定这唯一的驻点即为所求的最大值点。即生产甲产品120单位，生产乙产品80单位时，可获最大利润。

例214：设某厂生产产品甲x件和乙产品y件，总成本函数$C(x、y)=8x^2+6y^2-2xy-40x-42y+180$求最小成本。

解：求驻点
$$\begin{cases} C'_x=16x-2y-40=0 \\ C'_y=12y-2x-42=0 \end{cases}$$

解方程组得驻点$(3, 4)$

再由极值充分条件 $C''_{xx}=16$，$C''_{xy}=-2$，$C''_{yy}=12$

$$(C''_{xy})^2-C''_{xx}\cdot C''_{xy}=(-2)^2-16\times 12<0$$

又$C''_{xx}=16>0$ 故函数在驻点取得极小值

则所求最小成本为$C(3、4)=36$

例215：设某企业的总利润函数为

$$L(x, y)=80x-2x^2-xy-3y^2+100y$$

式中x，y分别为甲乙两种产品产量。最大产出设备能力为$x+y=12$，求最大利润。

解：注意到最大设备能力就是函数$L(x, y)$的约束条件，因此，本例是条件极值问题。

令 $F(x, y, \lambda)=80x-2x^2-xy-3y^2+100y+\lambda(x+y-12)$

令
$$\begin{cases} F'_x=80-4x-y+\lambda=0 & ① \\ F'_y=-x-6y+100+\lambda=0 & ② \\ F'_\lambda=x+y-12=0 & ③ \end{cases}$$

由①－②，得$-3x+5y-20=0$ ④

$3\times$③＋④，得$8y-56=0$ $\therefore y=7$

代入③得 $x=5$

因是唯一驻点，即为最大值点，所以，最大利润为$L=868$

例216：某三轮车配件商店每销售一付框架（y），搭配三个轮胎（x），即 $x=3y$，需求函数为

$$x=63-0.25P_x \quad 和 \quad y=60-\frac{1}{3}P_y$$

其中 P_x、P_y 分别为轮胎和框架的价格。成本函数 $C(x、y)=x^2+xy+y^2+190$ 求利润最大时轮胎和框架的销售量和销售价格，并求最大利润。

解：$P_x=252-4x$

$P_y=180-3y$

总收入 $R=P_x\cdot x+P_y\cdot y$

$=(252-4x)x+(180-3y)y$

总利润 $L=R-C=P_x\cdot x+P_y\cdot y-C$

$=(252-4x)x+(180-3y)y-(x^2+xy+y^2+190)$

$=252x-5x^2-xy+180y-4y^2-190$

题设 $x=3y$ 为约束条件。故令

$$F(x, y, \lambda)=252x-5x^2-xy+180y-4y^2-190+\lambda(x-3y)$$

求驻点：
$$\begin{cases} F_x'=252-10x-y+\lambda=0 \\ F_y'=-x-8y+180-3\lambda=0 \\ F_\lambda'=x-3y=0 \end{cases}$$

解这个方程组得驻点（27，9）

利润最大时销售量为 $x=27$　$y=9$

利润最大时销售价格

$P_x=252-4\times27=144$　　$P_y=180-3\times9=153$

最大利润为 $L(27、9)=4022$

例217：为了研究广告对销售的影响，某公司作了统计，有下列数据资料，试用最小二乘法求销售总额与广告费的线性函数关系

广告费用 x_i（百台）	2	3	4.5	5.5	7
销售总额 y_i（千元）	3	6	8	10	11

解：设销售总额为 y（千元），广告费为 x（百元），令 $y=ax+b$，其中 a，b 是待定常数。下面来求 a，b 使得实测值 y_i 理论值 $f(x_i)=ax_i+b$ 的偏差平方和

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2 \qquad 最小$$

根据极值存在必要条件，应有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a}=2\sum\limits_{i=1}^{5}\left[y_i-(ax_i+b)\right](-x_i)=0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{5}\left[y_i-(ax_i+b)\right]=0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5} x_i\,[y_i-(ax_i+b)]=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b_i)]=0 \end{cases}$

经整理，得

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{5}x_i+5b=\sum\limits_{i=1}^{5}y_i \end{cases}$$

列表计算：$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i$ ， $\sum\limits_{i=1}^{5}y_i$ ， $\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i$ ， $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2$

	x_i	x^2_i	y_i	x_iy_i
	2	4	3	6
	3	9	6	18
	4.5	20.25	8	36
	5.5	30.25	10	55
	7	49	11	77
$\sum\limits_{i=1}^{5}$	22	112.5	38	192

代入上面方程组，得

$$\begin{cases} 112.5a+22b=192 \\ 22a+5b=38 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=1.58 \\ b=0.65 \end{cases}$

即所求线性函数为 $y=1.58x+0.65$

例218：以108平方米的铁板，做一开口的长方体储水箱，设长、宽相等，问选择怎样的尺寸，才能使水箱的容积最大？

解：设水箱高为y，长和宽均为x，容积为V，则$V=x^2y$

水箱的表面积满足附加条件：$x^2+4xy=108$

构造函数 $F(x, y, \lambda)=x^2y+\lambda(x^2+4xy-108)$

$$\begin{cases} F'_x=2xy+\lambda(2x+4y)=0 & ① \\ F'_y=x^2+\lambda\cdot 4x=0 & ② \\ F'_\lambda=x^2+4xy-108=0 & ③ \end{cases}$$

由②式，得$\lambda=-\frac{x}{4}$，代入①式，得

$$2xy-\frac{x}{4}(2x+4y)=0$$

即 $x(y-\frac{x}{2})=0$

得 $y=\frac{x}{2}$，$x=0$（舍去，∵长必须大于零。把 $y=\frac{x}{2}$代入③式，得

$$x^2+4x\cdot\frac{x}{2}-108=0$$

解得$\begin{cases} x=6 & (x=-6\text{舍去}) \\ y=3 \end{cases}$

得驻点（6，3），根据实际问题可知V一定有最大值，所以(6，3)是最大值点，此时，

$V=6^2\times3=108$（米^2）

即水箱长、宽均为6米，高为3米时，水箱容积最大。

例219：指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中所表示的不同几何图形。

（1） $x-2=0$ （2） $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

（3） $x^2-y^2=1$

解：（1） $x-2=0$在平面解析几何中表示一条平行于y轴，与x轴截距2的直线；在空间解析几何中表示一个平行于y0z平面，截x轴于点（2，0，0）的平面。

（2） $(x-1)^2+(y-1)^2=1$在平面解析几何中表示以点（1，1）为圆心，半径为1的在x0y平面上的圆；在空间解析几何中表示一个圆柱曲面，其母线平行于z轴，准线为x0y平面上的圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

（3） $x^2-y^2=1$在平面解析几何中表示以原点为中心，实轴在x轴上的等轴双曲线；在空间解析几何中表示母线平行于z轴，准线为x0y平面上的双曲线$x^2-y^2=1$的双曲柱面。

例220：在直角坐标系中将二重积分$\iint f(x, y)d\sigma$化为累次积分，其中积分区域D为

（1） $D=\left\{(x, y)\ \middle|\ 0\leqslant x\leqslant 1\quad 0\leqslant y\leqslant x\right\}$

（2） D：由圆$x^2+y^2=1$及直线$x=0$，$y=x$所围成的第一象限的平面区域。

解：（1）$D=\left\{(x, y)\ \middle|\ 0\leqslant x\leqslant 1\quad 0\leqslant y\leqslant x\right\}$

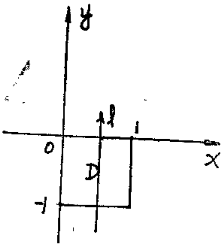
积分区域D如图（5）若先对y积分，后对x积分，将D向x轴投影得$0\leqslant x\leqslant 1$，在〔0，1〕内任取一点x，过点x作平行于y轴的射线l，射线l的指向与y轴正向一致，l从D的边界线$y=0$穿进D，再从D的另一边界线$y=x$穿出D，故第一次积分（对y）的积分限是从$y=0$到$y=x$，第二次积分（对x）的积分限是射线l在投影区间〔0，1〕上的最大活动范围，即从点$x=0$到点$x=1$，故积分限：对y：由线$y=0 \xrightarrow{到}$ 线$y=x$对x：由点$x=0 \xrightarrow{到}$ 点$x=1$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy$$

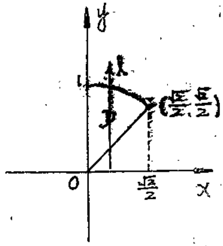
同理，若先对x积分，后对y积分，D在y轴上的投影$0\leqslant y\leqslant 1$，作平行x轴射线l，则l由线$x=y$穿进D，而由线$x=1$穿出，积分限为：对x：由线$x=y \xrightarrow{到}$ 线$x=1$对y：由点$y=0 \xrightarrow{到}$ 点$y=1$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_y^0 f(x,y)\,dx$$

（2） D由圆$x^2+y^2=1$及直线$x=0$与$y=x$所围成的第一象限的平面区域。



图(5)



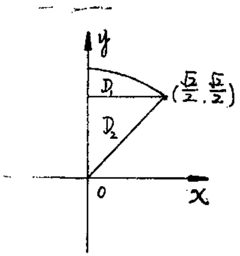
图(6)

区域D如图（6），并求得交点为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

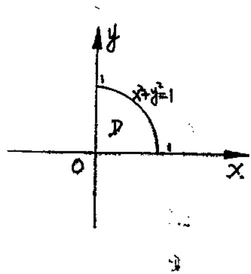
先对y积分，后对x积分。D在x轴的投影为$0\leqslant x\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$，积分线为：y由线$y=x \xrightarrow{到}$ 线$y=\sqrt{1-x^2}$，x由点$x=0 \xrightarrow{到}$ 点$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$$

此题若先对x积分，后对y积分须将D分为两部分D_1，D_2，使$\iint_D f(x,y)\,dxdy=$



图(7)



图(8)

$\iint\limits_{D_1} f(x、y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x、y)dxdy$，再讨论积分限。$D_1$，$D_2$范围如图(7)

例221：已给二重积分$\iint\limits_{D} xy^2d\sigma$，其中域D是单位圆$x^2+y^2\leqslant1$在第一象限的部分。将它写成如下的累次积分对吗？

(1) $\iint\limits_{D} xy^2d\sigma=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-y^2}}xy^2dy$

(2) $\iint\limits_{D} xy^2d\sigma=\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}}xy^2dy\right]dx$

(3) $\iint\limits_{D} xy^2d\sigma=\int_0^1dx\int_0^1xy^2dy$

(4) $\iint\limits_{D} xy^2d\sigma=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}xy^2dy$

解：以上4个累次积分表达式只有(4)是正确的，其余都是错误的，积分区域D如图(8)

(1) 其错误在于先对y积分时，由穿线可知虽然x由o变化到1，但对y应由下限$y=0$变化到y表成x的函数$y=\sqrt{1-x^2}$而不是上限为积分变量y本身的函数$\sqrt{1-y^2}$。

(2) 其错误是第二次对x积分时，积分上限应该是常数，而不是y的函数。因为先对y后对x积分的上、下限由顺着y轴正向的箭头去"穿"域D而得，所以，x的变化范围是两个常数。

(3) 其错误是第一次对y积分的上限应该是x的函数，与上所述，它由域D的边界所确定，应是y表成x的函数，$y=y_2(x)=\sqrt{1-x^2}$，而不是$y=1$

(4) 正确。

例222：更换二重积分$\int_{-1}^{0}dx\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x、y)dy$的积分次序

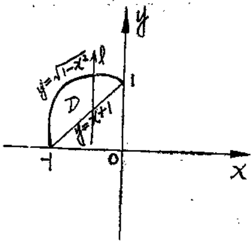
解：把先对y的积分更换为先对x积分，由累次积分上下限可得：

$$D:\begin{cases}x+1=\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)=\sqrt{1-x^2}\\-1=a\leqslant x\leqslant b=0\end{cases}$$

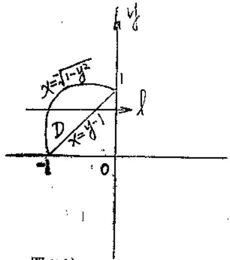
即

$$D:\begin{cases}x+1\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\\-1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

如图(9)



图(9)



图(10)

再由此图形写出先对x后对y的积分域的联立双边不等式

$$D\begin{cases}-\sqrt{1-y^2}=\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)=y-1\\0=c\leqslant y\leqslant d=1\end{cases}$$

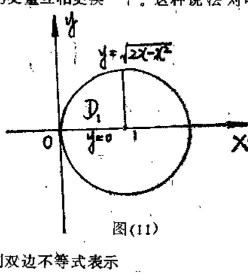
如图（10），则$I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1}f(x,y)dx$

例223：在更换二重积分次序时，只要将原式中的变量互相更换一下。这种说法对吗？

如

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy=$$

$$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dy$$



图(11)

解：更换累次积分次序应按例222步骤进行。

由上式左边原积分次序的上下限可以为

$$D_1:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

画出图形，如图（11）

而更换为先对x后对y积分时，其积分域为D_2需用下列双边不等式表示

$$D_2:\begin{cases}1-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

画出图形，如图（12），于是