历届奥林匹克竞赛
典型试题剖析丛书

数学
奥林匹克竞赛
典型试题剖析

OLYMPIC

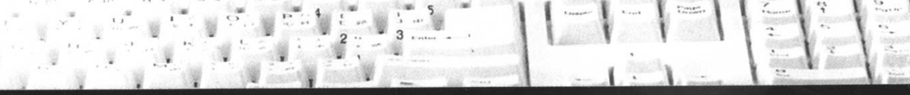
叶 军 编著

湖南师范大学出版社

数学奥林匹克竞赛典型试题剖析

叶 军 编著

湖南师范大学出版社



图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克竞赛典型试题剖析 /叶军编著 .—长沙：湖南师范大学出版社，2002.7

ISBN 7—81081—189—4/G·133

Ⅰ.数…　Ⅱ.叶…　Ⅲ.数学课—中学—解题　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 041065 号

数学奥林匹克竞赛典型试题剖析

叶　军　编著
丛书策划：廖建军
责任编辑：廖建军
责任校对：刘琼琳

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　湖南省地质测绘印刷厂印刷
730×988　16 开　30.25 印张　844 千字
2002 年 7 月第 1 版　2002 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—10000 册
ISBN7—81081—189—4/G·133
定价：34.00 元

内 容 简 介

本书精选了近 10 年来国内外数学竞赛的一些有代表性的典型试题,并对每一个试题进行了剖析,对其中的一些题目的命题背景进行了讨论,得到了许多推广题与发展题.

本书可作为中学生数学竞赛培训的辅导读物,也可作为中学数学教师、高等师范院校数学教育专业学生的教学和学习参考书.

前　言

数学奥林匹克已经成为当今数学教育中的一股潮流，这股潮流现今已不仅仅激荡着欧洲、北美和大洋洲，而且已冲向亚洲这块广阔而神秘的大地，不仅在中国和印度这些文明古国中引起了震荡，而且在包括四小龙在内的广大亚洲土地上产生了反响.

中国大陆这条有着数千年文明史的东方巨龙已不再是一条卧龙，它正处于前所未有的经济腾飞之中，并且以令人耳目一新的姿态回归到世界大家庭内，在科学技术、文化教育、艺术体育等众多领域的竞争中显示出自己的雄厚实力，摘取了一顶顶的桂冠，包括在数学奥林匹克领域内的最高水平的角逐场IMO(国际数学奥林匹克)中已连续12年保持了领先地位，中国人的成绩已得到了举世公认，中国人的民族自豪感和自信心空前增强.

如何使中国的数学奥林匹克事业持续不断地健康发展下去，是现时放在有志于这一事业的同仁们面前的一个重要课题，笔者认为，我们要做好下面几项有意义的工作：

第一，要通过各种方式，吸引越来越多的人加入到这一事业中来，加强其群众性、普及性、组织和管理上的科学性.

第二，应当努力地开展奥林匹克数学这一"已逐渐形成的特殊的数学学科"中的广泛而深入的科学研究工作.

第三，应当花力气组织起一支既有广泛的群众基础又有其中坚力量的科学研究队伍，努力提高其研究水平.

以笔者的陋见，这种研究应包括两个方面：一是深入地研究数学奥林匹克的历史和现状，探索奥林匹克数学的内在规律，加强与世界各国的联系，借鉴他国的做法，吸收其经验；二是加强对"命题工作"的组织和探讨，组织各种形式的命题讨论班或研讨会，其任务就是"生产新的数学竞赛试题".数学大师华罗庚教授说过："出题比做题难，题目要出得妙，出得好，要测得出水平."因此，可以说命题是一门深奥的学问，应当花大力气来抓，作为师范大学的数学系，应当有更多的教师出来抓这项工作.

数学竞赛的题目不是凭空想出来的，其实，每一道数学竞赛的题目都有其命题背景，有的题目就是从一些古老的数学竞赛题目中改编提炼出来的.因此，系统地掌握一些数学竞赛中的典型问题，是了解数学竞赛命题的重要途径之一.基于以上的考虑，本书收集了近10年来国内外竞赛中一些典型的数学竞赛试题，并对它们逐个进行了剖析，有的问题还给出命题背景分析与推广的讨论，有的给出一系列的发展问题与改编问题.因此，本书集研究性与资料性于一身，它与一般的题解有着本质的区别.

本书编入了笔者从事数学奥林匹克教学和研究的一些命题成果，也参阅了众多的文献资料，在本书的编写过程中，还得到了湖南师范大学出版社的大力支持.在此一并表示感谢.

叶　军

2002年3月于湖南师范大学

◆叶　军

1963 年生，湖南师范大学教学系副教授，中国数学奥林匹克高级教练。在《数学通报》等省级以上刊物上发表论文 100 余篇，已出版的专著有《数学奥林匹克教程》等 8 部。是湖南师范大学附中第 34 届 IMO 金牌获得者、第 32 届 IMO 银牌获得者的主要教练之一。

目　录

第一章　集合、函数与方程

数学竞赛中的集合问题以它独特的表现形式以及集合分划的无穷魅力，深受各级数学竞赛命题者的青睐.

函数是中学数学的一个重要内容.国内数学竞赛中的函数问题涉及到函数的定义域、值域、图象、奇偶性、单调性和周期性等等.国外数学竞赛也常出现与函数有关的题目，不过与国内中学数学中出现的题目不太相同，大体上有这样几类：一类是已知函数关系，然后利用函数的记号、性质或者图象解题；另一类是通过构造函数进行解题；还有一类是把函数作为未知数的函数方程，这些函数有的是建立在自然数集上，也有的是建立在实数集或者它的一个子集上，解函数方程的方法很多，但经常用到的还是代换解法和递归解法.

在本章里，我们还介绍了一些古老的代数方程和方程组问题，这些题目要求解答者有较强的解题技巧和恒等变形能力，往往需要巧妙换元，或者利用几何图形或函数图象才能解出.

【题 1】 求函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域.

（2001 年，全国高中数学联赛试题）

【剖析与解】 视 y 为参数，则关于 x 的方程

$$x+\sqrt{x^2-3x+2}=y$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-3x+2}=y-x$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-3x+2=(y-x)^2 \\ y\geqslant x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (2y-3)x=y^2-2 \\ x\leqslant y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{y^2-2}{2y-3} \\ x\leqslant y \end{cases}$$

$\therefore$ 已知方程有解的充要条件为

$$\frac{y^2-2}{2y-3}\leqslant y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y^2-3y+2}{2y-3}\geqslant 0$$

$\Leftrightarrow$ $1\leqslant y<\dfrac{3}{2}$ 或 $y\geqslant 2$.即所求函数的值域为 $[1,\dfrac{3}{2})\cup[2,+\infty)$.

注 本题采用的是方程法求值域，其一般原理为：

(1)函数 $y=f(x)$（定义域为 D）的值域就是使关于 x 的方程 $f(x)=y$ 有属于 D 的解的 y 值的集合.

(2)若 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是最简有理分式，则函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的值域就是使关于 x 的方程 $y\cdot g(x)=f(x)$ 有解的 y 值的集合.

用方程法可求出形如

$$y=ax+b\pm\sqrt{cx^2+dx+e}$$

的函数值域.

例如,我们用方程法可求

$$y=x+\sqrt{x^2+ax+b}$$

的值域,其中 a,b 为实常数.

事实上,视 y 为参数,则关于 x 的方程

$$\sqrt{x^2+ax+b}=y-x$$

在集合 $\{x\mid x^2+ax+b\geqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$ 上有解,它等价于

$$\begin{cases}x^2+ax+b=(y-x)^2\\ x\leqslant y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(y+\dfrac{a}{2})x=\dfrac{1}{2}(y^2-b),\\ x\leqslant y.\end{cases}$$

(i)若 $b=\frac{1}{4}a^2$,则当 $y=-\frac{1}{2}a$ 时,原方程的解为 $x\leqslant-\frac{1}{2}a$;当 $y\neq-\frac{1}{2}a$ 时,原方程的解为

$$x=\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}a),$$

且满足

$$\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}a)\leqslant y,$$

即 $\quad y>-\frac{1}{2}a.$

综合上述两方面得所求函数的值域为 $[-\frac{a}{2},+\infty)$.

(ii)若 $b>\frac{1}{4}a^2$,则当 $y=-\frac{1}{2}a$ 时,原方程无解;当 $y\neq-\frac{1}{2}a$ 时,原方程的解 $x=\frac{y^2-b}{2y+a}$ 满足 $x\leqslant y$,即 $\frac{y^2-b}{2y+a}\leqslant y$,亦即 $\frac{y^2+ay+b}{2y+a}\geqslant 0$,

因 $a^2-4b<0$,故 $y^2+ay+b>0$,从而有

$$2y+a>0,即\ y>-\frac{1}{2}a.$$

故所求值域为 $(-\frac{a}{2},+\infty)$.

(iii)若 $b<\frac{1}{4}a^2$,则当 $y=-\frac{a}{2}$ 时,原方程无解;当 $y\neq-\frac{a}{2}$ 时,原方程的解 $x=\frac{y^2-b}{2y+a}$ 满足 $x\leqslant y$,即

$$\frac{y^2+ay+b}{2y+a}\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y-\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2})(y+\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2})(y+\dfrac{a}{2})\geqslant 0,\\ y\neq-\dfrac{a}{2}.\end{cases}$$

解得值域为

$[-\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2},-\frac{a}{2})\cup[\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2},+\infty)$.

其次,我们还可用方程法求

$$y=2x-3+\sqrt{x^2-12}$$

的值域.

事实上,视 y 为参数,则关于 x 的方程

$$\sqrt{x^2-12}=y+3-2x$$

在 $(-\infty,-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$ 上有解,等价于

$$(*)\begin{cases}3x^2-4(y+3)x+(y^2+6y+21)=0, & ①\\ x\leqslant\frac{1}{2}(y+3). & ②\end{cases}$$

令①式左边为 $f(x)$,由②知,$(*)$式等价于 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{1}{2}(y+3)]$ 上至少有一个实根,其充要条件是

$$(1)\begin{cases}\frac{1}{2}(y+3)\leqslant\frac{2}{3}(y+3),\\ f(\frac{1}{2}(y+3))\leqslant 0;\end{cases}$$

或

$$(2)\begin{cases}\frac{1}{2}(y+3)>\frac{2}{3}(y+3),\\ f(\frac{2}{3}(y+3))\leqslant 0.\end{cases}$$

解(1)得 $y\geqslant 4\sqrt{3}-3$,解(2)得 $y\leqslant -9$.

故所求函数值域为 $(-\infty,-9]\cup[4\sqrt{3}-3,+\infty)$.

【题 2】 设 x 是实数,且 $f(x)=|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|+|x+5|$.求 $f(x)$ 的最小值.

(1989 年,北京市中学生数学竞赛试题)

【剖析与解】 根据绝对值的几何意义,在数轴上画出实数 -1、-2、-3、-4、-5 分别对应的点 A、B、C、D、E,如图 1-1,设 x 对应动点 P,则 $f(x)=|PA|+|PB|+|PC|+|PD|+|PE|\geqslant|CB|+|CD|+|CA|+|CE|=2+4=6$,即点 P 与 C 重合时,其和最小值为 6.

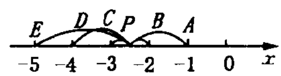


图 1-1

因此,当 $x=-3$ 时,函数 $f(x)$ 的最小值为 6.

评注 本题也可利用分段函数图象求解,或用绝对值不等式求解.

一般地,设函数 $f_n(x)=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-n|(n\in\mathbf{N})$,则 n 为偶数且 $\frac{n}{2}\leqslant x\leqslant\frac{n}{2}+1$ 时,$f_n(x)_{\min}=\frac{n^2}{4}$,当 n 为奇数且 $x=\frac{n+1}{2}$ 时,$f_n(x)_{\min}=\frac{n^2-1}{4}$.

进一步推广得:设 $\{a_n\}$ 是递增数列,函数 $f_n(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|(n\geqslant 2)$,则 n 为偶数且 $a_{\frac{n}{2}}\leqslant x\leqslant a_{\frac{n}{2}+1}$ 时,$f_n(x)_{\min}=a_{\frac{n}{2}+1}+a_{\frac{n}{2}+2}+\cdots+a_n-(a_1+a_2+\cdots+a_{\frac{n}{2}})$,当 n 为奇数且 $x=a_{\frac{n+1}{2}}$ 时,$f_n(x)_{\min}=a_{\frac{n+1}{2}+1}+\cdots+a_{n-1}+a_n-(a_1+a_2+\cdots+a_{\frac{n-1}{2}})$.

【题3】 某城镇沿环形路有五所小学，依次为一小、二小、三小、四小、五小，它们分别有电脑15、7、11、3、14台，现在为使各校台数相等，各调出几台给邻校：一小给二小，二小给三小，三小给四小，四小给五小，五小给一小．若甲小给乙小－3台，即为乙小给甲小3台，要使电脑移动的总台数量小，应作怎样安排？

（1996年，荆州市高中数学竞赛试题）

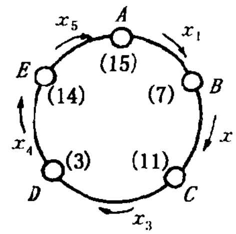


图1－2

【剖析与解】 用A、B、C、D、E顺时针排列依次表示一至五所小学且顺次向邻校调出x_1、x_2、x_3、x_4、x_5台电脑，如图1－2所示，则

$$7+x_1-x_2=11+x_2-x_3=3+x_3-x_4=14+x_4-x_5=15+x_5-x_1=\frac{1}{5}(15+7+11+3+14).$$

$\therefore x_2=x_1-3, x_3=x_1-2,$

$x_4=x_1-9, x_5=x_1-5.$

$\because$ 调动的总台数最少，即求函数

$$y=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|$$
$$=|x_1|+|x_1-3|+|x_1-2|+|x_1-9|+|x_1-5|$$

的最小值．

由题2中的推广结论，可知当$x_1=3$时，函数$y_{\min}=12$．此时有$x_2=0, x_3=1, x_4=-6, x_5=-2$．

所以，一小向二小调出3台，三小向四小调出1台，五小向四小调出6台，一小向五小调出2台，这样调动的电脑总台数最小且为12台．

【题4】 设函数$f_0(x)=|x|, f_1(x)=|f_0(x)-1|, f_2(x)=|f_1(x)-2|$，则函数$y=f_2(x)$的图象与$x$轴所围成图形中的封闭部分的面积是______．

（1989年，全国高中数学联赛）

【剖析与解】 先作$f_0(x)=|x|$的图象并向下平移1单位，得$y=f_0(x)-1$的图象，从而得$f_1(x)=|f_0(x)-1|$的图象（如图1－3）．

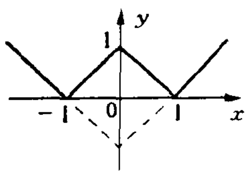


图1－3

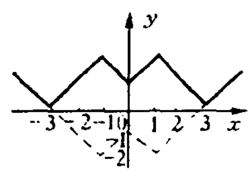


图1－4

再将$f_1(x)$的图象向下平移2单位，得$y=f_1(x)-2$的图象，并把x轴下方的图象对称到x轴上方，便得到$f_2(x)=|f_1(x)-2|$的图象（如图1－4），它与x轴围成的封闭图形的面积为

$$S=S_{梯形}-S_{三角形}=\frac{6+2}{2}\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times 1=7.$$

【题5】 解关于x的不等式$|x|+|x-1|>ax(a\in\mathbf{R})$．

（1991年，武汉市高中数学竞赛试题）

【剖析与解】作函数$y=|x|+|x-1|$和$y=ax$的图象，如图1－5．由于实数a为参变数，则直线$y=ax$绕原点转动．由图形不同位置可分类得出如下结论：

(i)当$-2\leqslant a<1$时，不等式解为$x\in\mathbf{R}$；

(ii)当 $a<-2$ 时,不等式解为 $\frac{1}{a+2}<x\leqslant 0$;

(iii)当 $a\geqslant 2$ 时,不等式解为 $0<x<\frac{1}{a}$;

(iv)当 $1\leqslant a<2$ 时,不等式解为 $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{a}$,或 $x>\frac{1}{2-a}$.

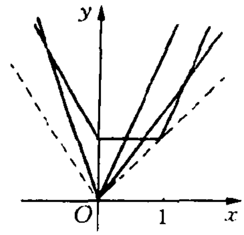


图 1-5

【题 6】 对于全体实数 x,使 $|x-1|+|x-2|+|x-10|+|x-11|\geqslant m$ 恒成立,则 m 的最大值为______.

(1993 年,浙江省高中数学联赛试题)

【剖析与解】 易知函数 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-10|+|x-11|$ 在 $x\in[2,10]$ 时有最小值 18.故当 $m\leqslant 18$ 时,不等式 $f(x)\geqslant m$ 恒成立,即 m 的最大值为 18.

评注 本题可变式列出若干思考题.试根据下列条件,分别求实数 a 的取值范围:

设 x 是任意实数,常数 x_1、x_2 满足 $x_1<x_2$.

(1)若不等式 $|x-x_1|+|x-x_2|>a$ 恒成立;

(2)若不等式 $|x-x_1|+|x-x_2|\leqslant a$ 有实解;

(3)若不等式 $|x-x_1|+|x-x_2|<a$ 无实解;

(4)若不等式 $|x-x_1|-|x-x_2|>a$ 恒成立;

(5)若不等式 $|x-x_1|-|x-x_2|>a$ 有实解;

(6)若不等式 $|x-x_1|-|x-x_2|>a$ 无实解;

(7)若不等式 $|x-x_1|-|x-x_2|<a$ 恒成立;

(8)若不等式 $|x-x_1|-|x-x_2|<a$ 有实解;

(9)若不等式 $|x-x_1|-|x-x_2|<a$ 无实解.

则实数 a 的取值范围分别是:

(1)$(-\infty,x_2-x_1)$;(2)$[x_2-x_1,+\infty)$;(3)$(-\infty,x_2-x_1]$;(4)$(-\infty,x_1-x_2)$;(5)$(-\infty,x_2-x_1)$;(6)$[x_2-x_1,+\infty]$;(7)$(x_2-x_1,+\infty)$;(8)$(x_1-x_2,+\infty)$;(9)$(-\infty,x_1-x_2)$.

【题 7】 a 是给定的实数,$f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 到 $(0,+\infty)$ 的映射,且对于任意的 $x>0$,有

$$ax^2f(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{x}{x+1} \quad (1)$$

求 $f(x)$.

(1999 年,以色列数学奥林匹克试题)

【剖析与解】 在(1)中以 $\frac{1}{x}$ 换 x,得

$$a\frac{1}{x^2}f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1+x} \quad (2)$$

若 $a^2\neq 1$,由(1)、(2)可解得

$$f(x)=\frac{x(1-ax)}{(x+1)(1-a^2)}$$

若 $a^2=1$,(1)、(2)构成的方程组无解,$f(x)$ 不存在.

又 $f(x)>0$,$\therefore a\in(-1,0)$.

【题 8】 证明:如果 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$,则 $x+y=0$.

(2000年,第31届西班牙数学奥林匹克第2题)

【剖析与解】 $\because (x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})(y-\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=(-1)^2=1$

$\therefore (x-\sqrt{x^2+1})(y-\sqrt{y^2+1})=1$

因此有 $x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=-(y-\sqrt{y^2+1})$ ①

$x-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{y-\sqrt{y^2+1}}=-(y+\sqrt{y^2+1})$ ②

①+②得:$2x=-2y$,$\therefore x+y=0$.

【题9】 设 $a\in\mathbf{Z}$,x 的方程$||x-1|-2|=a$只有三个不同的整数解,那么,这三个解是________________________.

(1988年,江苏省数学竞赛试题)

【剖析与解】 作 $y=|x-1|$的图象,然后向下平移2单位后,把 x 轴下方图象对称地在 x 轴上方作出,便得 $y=||x-1|-2|$的图象,如图1-6.

直线 $y=a$ 与上述图象只有三个交点时,则 $a=2$,且三点的横坐标分别是 $x=-3$,$x=1$,$x=5$,即为原方程的三个整数解.

评注 本题也可分区间讨论求解,但有一定的运算量.

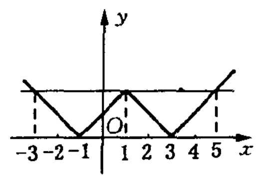


图1-6

【题10】 整数 a,b,x,y 满足等式

$$a+b\sqrt{2001}=(x+y\sqrt{2001})^{2000}.$$

证明:$a\geqslant 44b$.

(2000年,第52届波兰数学奥林匹克初赛试题)

【剖析与解】 由条件,可知 $a-b\sqrt{2001}=(x-y\sqrt{2001})^{2000}$(注意,这里用到$\sqrt{2001}$是一个无理数),于是,将此式与条件式相乘,就有

$a^2-2001b^2=(x^2-2001y^2)^{2000}\geqslant 0$,

于是 $a^2\geqslant 2001b^2$.

如果 $a<0$,则由 $a-b\sqrt{2001}=(x-y\sqrt{2001})^{2000}\geqslant 0$,可知 $b<0$,这时 $0>a+b\sqrt{2001}=(x+y\sqrt{2001})^{2000}\geqslant 0$,矛盾.所以,$a\geqslant 0$,结合 $2001>44^2$,及 $a^2\geqslant 2001b^2$,可知 $a\geqslant 44b$.

【题11】 已知$f(x)=|1-2x|$,$x\in[0,1]$.试问方程

$f(f(f(x)))=\dfrac{x}{2}$有多少个实数解?

(1986年,全国高中数学联赛试题)

【剖析与解】 用图象法求实数解的个数.先作 $f(x)=|2x-1|$的图象,并把所有点的纵坐标扩大2倍而横坐标不变,然后把所得图象向下平移1单位(如图1-7),再把 x 轴下方图象对称到 x 轴上方,便得 $f(f(x))=|2f(x)-1|$的图象,如图1-8.

同样的方法可作函数 $f(f(f(x)))=|2f(f(x))-1|$的图象(如图1-9),它与直线 $y=\dfrac{x}{2}$在$[0,1]$上有8个交点,因此,原方程有8个实数解.

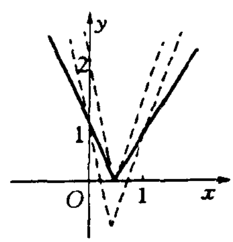


图1-7

评注 本题若先求$f(f(f(x)))$的分段函数式,再分类求方程的解,则

运算较为繁琐.

运用图象研究方法,易得如下推广的结论:

设 $0\leqslant x\leqslant 1, f_0(x)=x, f_n(x)=|2f_{n-1}(x)-1|(n\in\mathbf{N})$,则 $f_n(x)$ 的图象中有 2^n 条折线段,方程 $f_n(x)=ax(0<a<1)$ 有 2^n 个实数解.

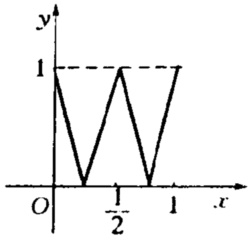


图 1-8

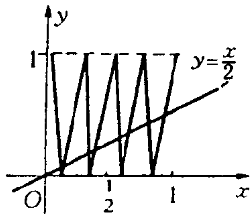


图 1-9

【题 12】 设 a、b、c 为三个不同的实数,使得方程 $x^2+ax+1=0$ 和 $x^2+bx+c=0$ 有一个相同的实根,并且使方程 $x^2+x+a=0$ 和 $x^2+cx+b=0$ 也有一个相同的实根.试求 $a+b+c$.

(2000 年,第 26 届俄罗斯数学奥林匹克,9 年级第 1 题)

【剖析与解】 这是一个关于一元二次方程有公共实根的问题,可充分利用公共实根.

设方程 $x^2+ax+1=0$ 和 $x^2+bx+c=0$ 的公共实根为 x_1,则

$$x_1^2+ax_1+1=0,$$

$$x_1^2+bx_1+c=0.$$

两式相减,得

$$(a-b)x_1=c-1.$$

$\because\quad a\neq b,$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{c-1}{a-b}.$

同理,设 x_2 是方程 $x^2+x+a=0$ 与方程 $x^2+cx+b=0$ 的公共实根,则

$$x_2=\frac{a-b}{c-1}(\text{显然 } c\neq 1).$$

故 $\quad x_1\cdot x_2=1.$

另一方面,由韦达定理知 $\dfrac{1}{x_1}$ 是第一个方程的根,这就表明 x_2 是方程 $x^2+ax+1=0$ 和方程 $x^2+x+a=0$ 的公共实根,所以

$$(a-1)(x_2-1)=0.$$

但当 $a=1$ 时,这两个方程无实根,所以必有 $x_2=1$,从而 $x_1=1$,于是,$a=-2, b+c=-1$,所以 $a+b+c=-3$.

【题 13】 求出并证明 $f(x)=x^3-3x$ 的最大值,其中 x 为任意实数,满足 $x^4+36\leqslant 13x^2$.

(1986 年,美国第 47 届普特南数学竞赛试题)

【剖析与解】 不等式 $x^4+36\leqslant 13x^2$ 即 $4\leqslant x^2\leqslant 9$,其解为 $-3\leqslant x\leqslant -2$ 或 $2\leqslant x\leqslant 3$.设 $x\geqslant y$,则

$f(x)-f(y)=(x-y)(x^2+xy+y^2-3)$.令 $f(x)\geqslant f(y)$,即 $f(x)-f(y)\geqslant 0$ 得 $x^2+xy+y^2-3\geqslant 0$,x 为 $[-3,-2]\cup[2,3]$ 上的任意实数,故 $y^2-4(y^2-3)\leqslant 0$,$y^2\geqslant 4$,$y\leqslant -2$ 或 $y\geqslant 2$,从而知 $f(x)$ 在 $[-3,-2]\cup[2,3]$ 上为增函数,其最大值为 $f(-2)$ 或 $f(3)$,计算得 $f(x)$ 的最大值为 $f(3)=18$.

评注 本题为一元函数的条件最值,对这类问题,一般先据条件确定出自变量的范围,再据函数的单调性及微分法求得最值.

【题 14】 设 n 为自然数,a,b 为正实数,且 $a+b=2$,则 $\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}=$____.

(1990 年,全国高中数学联赛试题)

【剖析与解】 我们用函数的观点来处理此题.

构造函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$,易知其在区间 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

由 $a+b=2$ 得 $ab\leqslant 1$, $a^nb^n\leqslant 1$,即 $0<a^n\leqslant\frac{1}{b^n}$,故 $f(a^n)\geqslant f(\frac{1}{b^n})$,即 $\frac{1}{1+a^n}\geqslant\frac{1}{1+b^{-n}}$,整理得 $\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}\geqslant 1$,即 $\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}$ 最小值为 1.

评注 构造单调函数证明不等式或求最值也是一种重要方法,关键是视问题的特点,构造出相应的函数.

【题 15】 已知 a,b,c,d,e 是满足 $a+b+c+d+e=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$ 的实数,试求 e 的最大值.

(1959 年,美国第 7 届中学生数学竞赛试题)

【剖析与解】 本题有许多解法,我们用二次函数来求解.

$$\begin{aligned}\text{设 } f(x)&=(x+a^2)+(x+b)^2+(x+c)^2+(x+d)^2\\&=4x^2+2(a+b+c+d)x+a^2+b^2+c^2+d^2\\&=4x^2+2(8-e)x+16-e^2,\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 的二次项系数为正且 $f(x)\geqslant 0$ 可知 $\Delta=4(8-e)^2-4\times 4(16-e^2)\leqslant 0$,解之得 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$,即 e 的最大值为 $\frac{16}{5}$.

评注 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$,则 $f(x)\geqslant 0\Leftrightarrow b^2-4ac\leqslant 0$,据此构造出恰当的二次函数,可使某些不等式的证明或求函数的最值问题简捷地获解.本例如用他法,则较为麻烦.

【题 16】 若函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值为 $2a$,最大值为 $2b$,求 $[a,b]$.

(2000 年,全国高中数学联赛第 14 题)

【剖析与解】 分三种情况讨论区间 $[a,b]$.

(1)若 $0\leqslant a<b$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减,故 $f(a)=2b$, $f(b)=2a$,于是有

$$\begin{cases}2b=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2},\\2a=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}.\end{cases}$$

解之得 $[a,b]=[1,3]$.

(2)若 $a<0<b$,则 $f(x)$ 在 $[a,0]$ 上单调递增,在 $[0,b]$ 上单调递减,因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值 $2b$.在 $x=a$ 或 $x=b$ 处取最小值 $2a$.

故 $2b=\frac{13}{2}$, $\therefore b=\frac{13}{4}$.

由于 $a<0$，又 $f(b)=-\frac{1}{2}(\frac{13}{4})^2+\frac{13}{2}=\frac{39}{32}>0$，
故 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取最小值 $2a$，即

$$2a=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2},$$

解得

$$a=-2-\sqrt{17}.$$

于是 $[a,b]=[-2-\sqrt{17},\frac{13}{4}]$.

(3) 当 $a<b\leqslant 0$ 时，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，故 $f(a)=2a$，$f(b)=2b$，即

$$2a=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2},2b=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}.$$

由于方程 $\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{13}{2}=0$ 的两根异号，故满足 $a<b<0$ 的区间不存在.

综上所述，所求区间为

$[1,3]$ 或 $[-2-\sqrt{17},\frac{13}{4}]$.

【题 17】 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1,0)$，且对一切实数 x 恒有

$$x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(x^2+1)$$

试求 $f(x)$ 的表达式.

(1985 年，广东省数学竞赛试题)

【剖析与解】 依题意知 $f(-1)=0$，且

$1\leqslant f(1)\leqslant\frac{1}{2}(1^2+1)=1$，即 $f(1)=1$. 于是有

$$\begin{cases}a-b+c=0, & ①\\ a+b+c=1. & ②\end{cases}$$

① + ②，得

$$c=\frac{1}{2}-a,$$

② − ①，得

$$b=\frac{1}{2}.$$

另一方面，对于一切实数 x，下面两个不等式恒成立：

$$\begin{cases}2ax^2-x+(1-2a)\geqslant 0, & ③\\ (1-2a)x^2-x+2a\geqslant 0. & ④\end{cases}$$

其充要条件为

$$\begin{cases}2a>0,\Delta_1=1-8a(1-2a)\leqslant 0\\ 1-2a>0,\Delta_2=1-8a(1-2a)\leqslant 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<a<\frac{1}{2}\\ (4a-1)^2\leqslant 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad a=\frac{1}{4}$.

从而　$c=\frac{1}{4}$,

所以　$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

评注　此题的难点集中在如下问题之中:

命题　设 a_1,a_2 均不等于 a, $a\neq 0$.

$f_1(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$, $f_2(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$,

$f(x)=ax^2+bx+c$. 则

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$同时满足(1),(2):

"(1)存在实数 x_0, x_1, 使 $f_1(x_0)=f(x_0)$, $f_2(x_1)=f(x_1)$;

(2)对一切实数 x 有$f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$"的充要条件是

$$\begin{cases}a_1<a<a_2,\\ \Delta_1=(b-b_1)^2-4(a-a_1)(c-c_1)=0,\\ \Delta_2=(b-b_2)^2-4(a-a_2)(c-c_2)=0.\end{cases}$$

证　由(1)得

方程 $f(x)=f_1(x)$ 与 $f(x)=f_2(x)$ 均有实根, 即　$(a-a_1)x^2+(b-b_1)x+c-c_1=0$ 与 $(a-a_2)x^2+(b-b_2)x+c-c_2=0$ 均有实根.

又$\because a\neq a_1,a_2$, $\therefore$其充要条件为

$$\Delta_1=(b-b_1)^2-4(a-a_1)(c-c_1)\geqslant 0, \qquad ①$$

$$\Delta_2=(b-b_2)^2-4(a-a_2)(c-c_2)\geqslant 0. \qquad ②$$

另一方面,由(2)得,对于一切实数 x,下面两个不等式恒成立:

$(a-a_1)x^2+(b-b_1)x+c-c_1\geqslant 0$,

$(a_2-a)x^2+(b_2-b)x+c_2-c\geqslant 0$.

其充要条件为

$$\begin{cases}a-a_1>0, \Delta_1=(b-b_1)^2-4(a-a_1)(c-c_1)\leqslant 0. ③\\ a_2-a>0, \Delta_2=(b_2-b)^2-4(a_2-a)(c_2-c)\leqslant 0. ④\end{cases}$$

由①,②,③,④得

$$\begin{cases}\Delta_1=(b-b_1)^2-4(a-a_1)(c-c_1)=0,\\ \Delta_2=(b-b_2)^2-4(a-a_2)(c-c_2)=0,\\ a_1<a<a_2.\end{cases}$$

【题 18】　(1)求证:方程$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$无实数解.

(1981 年,第 12 届加拿大数学竞赛试题)

(2)求值:$\sum\limits_{i=0}^{1000}\left[\frac{1}{3}\times 2^i\right]$.

(2000 年,俄罗斯数学竞赛试题)

【剖析与解】　本题是两道数学竞赛试题,但它反映的是同一个函数 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}[2^ix](x\in\mathbf{R})$的两种取值问题.

Ⅰ. 函数 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}[2^ix](x\in\mathbf{R})$能取到哪些整数?