

初等数学研究丛书

平面几何

四川人民出版社

初等数学研究丛书

平 面 几 何

四川省数学会普及工作委员会主编
邓 安 邦 编 著

四川人民出版社

一九八四年·成都

初等数学研究丛书 《平面几何》

四川人民出版社出版 (成都盐道街三号)

四川省新华书店发行 渡口新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 9 字数 201 千

1984 年 9 月第一版 1984 年 9 月第一次印刷

印数: 1—18,600 册

书号: 7118·818

定价: 0.73 元

内 容 简 介

本书就中学平面几何里的几个主要问题，从理论上予以论述，方法上进行示范，技能上进行探究。全书共四章，分别论述有关的形式逻辑与几何变换的基本知识，论证有正轨可循的各类几何证题的常用方法，轨迹的概念，证明与探求轨迹的方法，几何作图的基本知识与常用的作图方法，以及变换在证题、求迹和作图中的应用。内容循序渐进，讲解深入浅出，适合读者自学。书末附有习题解答或提示，以便读者从中得到启发和查对。

本书可供中学数学教师教学参考；也可作为师范院校学生的阅读材料、中学生的提高读物；还可作为师范院校、进修院校开设中学数学研究课程或专题讲座的教材。

前 言

“精简、增加和渗透”是中学数学教学大纲中提出的一条原则。在这原则下，以传统数学为形，现代数学为实，实现中学数学内容的现代化，是当前我们面临的重要课题。四川省数学会普及工作委员会主编了一套“初等数学研究丛书”，邀请了四川师范学院数学系中学数学教研组同志从事编写工作，我觉得很有意义。这对中学数学教师和师范院校学习数学的学生，用现代数学的观点和方法，来研究传统数学内容，可供参考。

编好这样的小册子，不是一件很容易的事。这套“初等数学研究丛书”自然还会有一些缺点，我相信在广大教师和学生们的帮助下定会使它逐步完善的。

我希望有更多的数学普及小册子问世。

四川省数学会理事长 柯 召

一九八三年一月

目 次

第一章 基本知识	(1)
1,1. 概念与定义.....	(1)
1,2. 命题及其关系.....	(16)
1,3. 推理与论证.....	(30)
1,4. 图形的变换.....	(53)
习题一.....	(59)
第二章 证题方法	(63)
2,1. 两线段或两角相等的证法.....	(63)
2,2. 线段或角的和差倍分的证法.....	(72)
2,3. 线段或角不等的证法.....	(81)
2,4. 两线的平行与垂直的证法.....	(88)
习题二(1).....	(96)
2,5. 诸点共线与诸点共圆的证法.....	(100)
2,6. 比例式或等积式的证法.....	(111)
2,7. 几何变换证题举例.....	(120)
习题二(2).....	(133)
第三章 点的轨迹	(139)
3,1. 轨迹的基本知识概述.....	(139)
3,2. 轨迹命题的证明.....	(144)
3,3. 轨迹的探求方法.....	(154)
3,4. 间接求迹法.....	(168)
3,5. 变换在求迹中的应用.....	(171)

习题三	•(176)
第四章 几何作图	•(183)
4,1. 作图的基本知识概述	•(183)
4,2. 常用的作图方法	•(193)
4,3. 变换在作图中的应用	•(204)
4,4. 代数在作图中的应用	•(220)
习题四	•(236)
【附】本书习题解答(或提示)	•(240)

第一章 基本知识

我们知道，平面几何是在几个确定的基本概念和公理的基础上，用形式逻辑方法建立的由定义和定理组成的一个理论体系。从某种意义上来说，它也可以看成是研究平面图形在初等几何变换下不变性质的一门学科。因此，了解形式逻辑和图形变换的有关知识，对于深刻理解和熟练掌握平面几何的基础知识和基本方法，提高分析问题和解决问题的能力，无疑是十分必要和有益的。

1.1 概念与定义

1.1.1 概念的意义

在客观世界中，有许许多多的个别事物，并且每一个个别事物又总是有许许多多的性质与关系。我们把一个事物的性质与关系，都叫做**事物的属性**。例如，一个三角形，就是一个个别事物。它的形状（由三条线段顺次首尾连结所组成的图形）、大小（如 12 cm^2 ）……、都是这个三角形的性质；这个三角形相似于那个三角形，“相似于”就是这个三角形与那个三角形之间的一种关系。这些性质与关系，都是这个三角形的属性。

属性与事物之间是相辅相存的。属性总是事物的属性，事物也总是有属性的事物。由于事物属性的相同或相异，客观世界中形成了许多不同的事物类。具有相同属性的事物就

形成一类,具有不同属性的事物就分别形成不同的类.例如,三角形是一类事物,它是由许许多多具有相同属性的个别事物组成的;圆也是一类事物,它也是由许许多多具有相同属性的个别事物组成的.但三角形这个类的共同属性与圆这个类的共同属性是不同的,所以它们是两个不同的类.

在某事物或属于某类的事物的属性中,有些是某类事物都具有而别的事物都不具有的属性,这种属性叫做这类事物的**本质属性**;而有些不仅是某类事物都具有而别的事物也都具有的属性,这种属性叫做这类事物的**非本质属性**.例如,在平行四边形这类事物的属性中,“两组对边分别平行”、“一组对边平行且相等”,“两条对角线互相平分”等,就是平行四边形都具有而别的四边形都不具有的属性,所以这些属性就是平行四边形这类事物的本质属性;而“有四条边”、“有四个角”、“内角和等于 360° ”等,就不仅是平行四边形所具有而别的四边形也都具有的属性,所以这些属性就是平行四边形这类事物的非本质属性.

人们对客观事物的认识,一般是通过感觉、知觉与印象形成事物的具体形象,这是感性认识阶段.在感性认识的基础上,再经过比较、分析与综合认识事物的本质属性,并借助于语言的抽象作用便形成概念.也就是说,概念这个东西已经不是事物的现象、事物的各个片面和事物的外部联系,而是抓住了事物的本质、事物的全体和事物的内部联系了.因此,概念是反映客观事物的本质属性的思维形式.

我们知道,数学概念是现实世界的空间形式和数量关系在人们头脑中的反映.概念与语词是紧密联系的.一般说来,一个数学概念用一个语词来表示.例如,同一平面内不相交

的两条直线，通常用语词“平行线”来表示。

数学概念同其概念一样，是思维的基本形式，是构成判断、推理与论证等思维形式的要素。从这个意义上说，数学概念是思维的基础，是思维的起点。因此，只有树立起清晰的概念，才能掌握数学的基础知识和基本技能，进而创造性地应用数学知识解决实际问题。

1.1.2 概念的外延和内涵

概念既是反映客观事物本质属性的一种思维形式，因此任何一个概念在反映一定范围内的事物的同时，也反映了这个范围内事物的本质属性。这就形成了概念的外延和内涵两个方面。

概念的外延，就是具有概念所反映的本质属性的事物。

概念的内涵，就是概念所反映的事物的本质属性。

例如，在自然数系中，“偶数”这个概念的外延，就是集合 $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ 中所有的数；而“偶数”这个概念的内涵，就是能被2整除这个本质属性。又如，“三角形”这个概念的外延，就是锐角三角形、直角三角形和钝角三角形等三种类型的一切三角形；而“三角形”这个概念的内涵，就是内角和等于 180° 、由三条顺次首尾相联结的线段所组成的图形这些本质属性。

概念的外延和内涵是互相制约的。下面通过一个例子来说明这种关系。

“四边形”、“平行四边形”、“矩形”与“正方形”，是四个不同的概念。“四边形”这个概念的外延比“平行四边形”这个概念的外延多，四边形除了包含平行四边形外，还包含其他四边形。“平行四边形”这个概念的外延，又比“矩

形”这个概念的外延多，平行四边形除了包含矩形外，还包含其他的平行四边形。“矩形”这个概念的外延，又比“正方形”这个概念的外延多，矩形除了包含正方形外，还包含其他矩形。这是从概念的外延方面看。再从概念的内涵方面看，“四边形”这个概念的内涵是：内角和等于 360° 、由平面内不在同一条直线上的四条线段顺次首尾相联结所组成的图形这些本质属性。“平行四边形”这个概念的内涵除了包含“四边形”这个概念的内涵外，还有两组对边分别平行、一组对边平行且相等、两条对角线互相平分等这些本质属性。“矩形”这个概念的内涵除了包含“平行四边形”这个概念的内涵外，还有一个角是直角、两条对角线相等这些本质属性。“正方形”这个概念的内涵除了包含“矩形”这个概念的内涵外，还有邻边相等、两条对角线互相垂直这些本质属性。如果用符号 $\supset$ 和 $\subset$ 分别表示包含和被包含的关系，那么上述四个同类概念的外延间的关系和内涵间的关系可以简单地表示如下：

四边形的外延 $\supset$ 平行四边形的外延 $\supset$ 矩形的外延 $\supset$ 正方形的外延；

四边形的内涵 $\subset$ 平行四边形的内涵 $\subset$ 矩形的内涵 $\subset$ 正方形的内涵。

上面这个例子，不仅说明了“一般包含特殊，一般又寓于特殊之中”这个哲学道理，并且由它还可概括出如下的规律：

如果一个概念 a 的外延比另一个概念 b 的外延少，那么 a 的内涵就比 b 的内涵多；反之，如果 a 的外延比 b 的外延多，那么 a 的内涵就比 b 的内涵少。概念的外延和内涵之间

的这种关系，在逻辑学里叫做**反变关系**。

在运用概念时，我们不仅要求概念明确，而且还要概念准确。所谓一个概念明确，就是这个概念的外延和内涵都明确。也就是说，这个概念表示了哪些事物和反映了哪些本质属性，这两者都是明确的。所谓概念准确，就是概念恰如其分地、不多不少地表示了我们要表示的事物。

为了加深对概念的认识，根据概念的外延和内涵间的反变关系，我们可以用逐渐增多概念的内涵的方法，来逐渐减少概念的外延，这个方法叫做**概念的限制法**。我们也可以用逐渐减少概念的内涵的方法，来逐渐增多概念的外延，这个方法叫做**概念的扩大法**。例如，如果在菱形这个概念的内涵里增多“有一个角是直角”这个属性时，菱形的外延就减少为正方形这个概念的外延；如果在菱形的内涵里减少“一组邻边相等”这个属性时，菱形的外延就增多为平行四边形的外延。

1.1.3 概念间的关系

客观世界中的任何两个或两类事物之间都是互相联系的，存在多种多样的关系，因而作为反映客观事物的两个概念之间，也有着各种不同的关系。

1. 相容关系

如果概念 a 与概念 b 的外延至少有一部分是重合的，那么 a 与 b 间的关系叫做**相容关系**。

相容关系，通常分为同一关系、从属关系和交叉关系三种。

(1) 同一关系：如果概念 a 与概念 b 的外延完全重合，那么 a 与 b 之间的关系叫做**同一关系**。

例如，“等边三角形”与“等角三角形”；“最小的素数”与“最小的正偶数”；“等边矩形”与“等角菱形”等等，都分别是具有同一关系的两个概念。

两个概念如果具有同一关系，那么这两个概念的外延是完全相同的。因此，具有同一关系的两个概念反映的是同一个（或类）事物。但对这同一个（或类）事物，却是从不同的角度来反映的。例如，“最小的素数”与“最小的正偶数”这两个概念，它们所反映的都是同一个数“2”，但反映的角度是不同的：前者是从“2是最小的素数”这一方面来反映的；而后者却是从“2是最小的正偶数”这一侧面来刻划的。

在同一论证过程中，具有同一关系的两个概念可以根据需要互相代替。但如果把不具有同一关系的两个概念当做同一关系来用，那就犯了偷换概念的错误。例如，把“无限小数”当做“无理数”，就犯了这种错误。

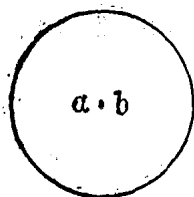


图 1.1

如果我们用两个圆分别表示概念 a 与概念 b 的外延，当 a 与 b 具有同一关系时，这两个圆就重合了，如图1.1.

(2) 从属关系：如果概念 a 的外延完全包含了概念 b 的外延，那么 a 与 b 之间的关系叫做从属关系。其中， a 叫做 b 的种概念或上位概念，而 b 叫做 a 的类概念或下位概念。

例如，“平行四边形”与“矩形”；“等式”与“方程”等等，都分别是具有从属关系的两个概念。前者是后者的种概念，而后者是前者的类概念。种概念的外延完全包含了类概念的外延。

概念 a 与概念 b 具有从属关系, 可用图 1.2 表示.

种概念和类概念是相对的. 就是说, 同一个概念既可以是种概念也可以是类概念. 例如, “平行四边形” 相对于 “四边形” 来说是类概念, 但相对于 “菱形” 或 “矩形” 而言, 则是种概念.

(3) 交叉关系: 如果概念 a 与概念 b 的外延只有一部分是重合的, 那么 a 与 b 之间的关系叫做交叉关系.

例如, “菱形” 与 “矩形”; “非负有理数” 与 “非正有理数” 等等, 都分别是具有交叉关系的两个概念, 因为它们的外延只有一部分是重合的.

概念 a 与概念 b 具有交叉关系, 可用图 1.3 表示.

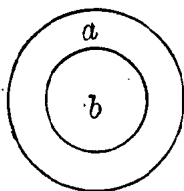


图 1.2

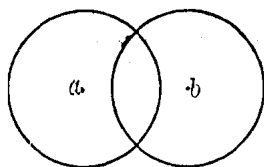


图 1.3

2. 不相容关系

如果概念 a 与概念 b 都是种概念 c 的类概念, 且 a 与 b 的外延无重合部分, 那么 a 与 b 之间的关系叫做不相容关系.

不相容关系, 通常分为对立关系和矛盾关系两种.

(1) 对立关系: 如果种概念 c 的两个类概念 a 与 b 具有不相容关系, 且 a 与 b 的外延之和小于 c 的外延, 那么 a 与 b 之间的关系叫做对立关系.

例如, “锐角三角形” 与 “直角三角形” 就是具有对立关

系的两个概念。因为，“锐角三角形”与“直角三角形”都是种概念“三角形”的两个具有不相容关系的类概念，且它们的外延之和小于“三角形”的外延。同样，“正有理数”与“负有理数”也是具有对立关系的两个概念。因为，“正有理数”与“负有理数”都是种概念“有理数”的两个具有不相容关系的类概念，且它们的外延之和小于“有理数”的外延。

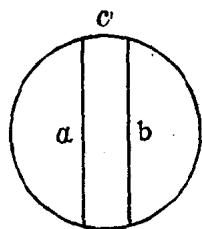


图 1.4

同样的，相对于“梯形”而言，“等腰梯形”与“直角梯形”也具有对立关系。

概念 a 与概念 b 如果相对于概念 c 具有对立关系，可用图 1.4 表示。

(2) 矛盾关系：如果种概念 c 的两个类概念 a 与 b 具有不相容关系，且 a 与 b 的外延之和等于 c 的外延，那么 a 与 b 之间的关系叫做矛盾关系。

例如，“等腰三角形”与“非等腰三角形”就是具有矛盾关系的两个概念。因为，“等腰三角形”与“非等腰三角形”都是种概念“三角形”的两个具有不相容关系的类概念，且它们的外延之和等于“三角形”的外延。

同样的，相对于“实数”来说，“正实数”与“非正实数”也是具有矛盾关系的两个概念。

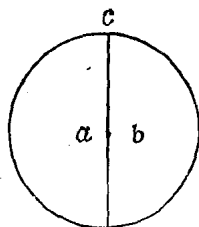


图 1.5

概念 a 与概念 b 如果相对于概念 c 具有矛盾关系，可用图 1.5 表示。

注意：具有对立关系或矛盾关系的两个概念，无论是它们的外延还是它们的内涵，都是不相同的，因此不能混为一谈。例如，“正有理

数”、“负有理数”与“非负有理数”这三个概念，相对于“有理数”而言，“正有理数”与“负有理数”是具有对立关系的两个概念，而“负有理数”与“非负有理数”是具有矛盾关系的两个概念。如果把“正有理数”与“非负有理数”等同起来，那就犯混淆概念的逻辑错误。

1.1.4 概念的定义

定义概念，是数学中引进新概念的基本途径。所谓**概念的定义，就是揭示概念的内涵的逻辑方法。**

概念的内涵，就是概念所反映的事物的本质属性。揭示概念的内涵，同时也就是揭示概念所反映的事物的本质属性。因此，我们也可以说：**定义就是揭示事物的本质属性的逻辑方法。**

1. 定义的方式

如何给概念下定义呢？通常采用的方式有以下三种：

(1) 种类式定义：就是用邻近的种概念加类差的方式来揭示被定义概念所反映的事物的本质属性。

在种类式定义中，我们规定：邻近的种概念是指包含被定义概念的种概念中外延最小的种概念；类差是指被定义概念在它的邻近的种概念里区别于其他类概念的属性（本质属性）。

例如，“大于直角而小于平角的角叫做钝角”这个定义，就是种类式定义。因为，在这个定义中，“角”就是钝角的种概念中外延最小的种概念；类差是“大于直角而小于平角”。

同样地，“含有未知数的等式叫做方程”；“两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形”等等，都是种类式定义。

由上述例子可知，种类式定义的结构的一般形式是：

类差 + 邻近的种概念 = 被定义概念.

其中,“类差 + 邻近的种概念”叫做定义概念.

种类式定义,是最常用的一种定义概念的方式,数学中的大多数概念都是用这种方式定义的.但是,有时也需用下面的两种方式给概念下定义.

(2) 发生式定义:就是用说明事物发生或形成过程中的情况的方式来揭示被定义概念所反映的事物的本质属性.

例如,“在平面内,当一条线段绕着它固定的一端旋转一周时,它的另一端就画出一条封闭的曲线,这条封闭的曲线叫做圆”.由于这个定义是用说明圆这个概念所反映的事物是怎样发生或形成过程中的情况来揭示圆的本质属性——圆上的所有各点到某一定点的距离都等于定长”,所以它是发生式定义.

(3) 约定式定义:就是用规定或说明事物的意义的方式来揭示被定义概念所反映的事物的本质属性.

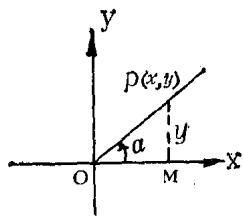


图 1 · 6

例如,“正弦函数”的定义:设有一角 α , 以它的顶点为原点, 以它的始边为 x 轴的正半轴建立直角坐标系(图1.6).在角 α 的终边上任取一点 $p(x, y)$, 它到原点 O 的距离是 $r =$

$\sqrt{x^2 + y^2}$ ($r > 0$), 则对 α 的每一个确定的值, 比值 $\frac{y}{r}$ 都有确定的值和它对应. 所以, $\frac{y}{r}$ 是 α 的函数. 我们把 $\frac{y}{r}$ 叫做角 α 的正弦.

又如,“零指数”和“负指数”的定义: 当 $a \neq 0$ 时, 规定 a^0