泛函分析习题集

[苏] А. Б. 安托涅维奇　П. Н. 克尼亚泽夫　Я. В. 拉迪诺　著
赵根榕　译

人民教育出版社

泛函分析习题集

A. Б. 安托涅维奇
[苏] П. Н. 克尼亚泽夫 著
Я. В. 拉 迪 诺

赵根榕 译

人民教育出版社

全书是习题集．共分十一章：集论、拓扑空间、度量空间、拓扑向量空间、拓扑向量空间中的线性算子、赋范向量空间、赋范空间中的线性算子与泛函、算子方程、积分理论、希耳伯特空间、巴拿赫代数．

书中每章开头列出基本的定义与定理，选取了不同难度的习题．可供高等院校数学专业的教师和学生参考。

泛函分析习题集

A. Б. 安托涅维奇

[苏] П. Н. 克尼亚泽夫　著

Я. В. 拉　迪　诺

赵根榕　译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

青浦任屯印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 7.375　字数 176,000

1981 年 7 月第 1 版　1982 年 5 月第 1 次印刷

印数 00,001—22,500

书号 13012·0640　定价 0.68 元

原　　序

由于泛函分析的思想和方法深入地渗透于数学（其实也不仅数学）的各个分支，近年来在大学里，泛函分析教程大大地加以扩充了．存在着一系列关于泛函分析普通教程的专著与教科书，但是适用于进行习题课的习题集直到现在还没有．包含于各专著中的大多数习题不能解决这个问题．这本参考书是企图填补现有的空白的尝试．

这本泛函分析习题集由十一章组成，反映大学泛函分析教程的基本问题．每章开头列出基本的定义与定理．作者们尽力选取不同难度的习题，开始是最简单的，说明基本概念的题，只要知道定义就能解出；最后是要求掌握泛函分析工具的题．特别是，把泛函分析的一系列著名定理选作习题．作者们并不想把复杂的有问题的题包括到书里来，而基本上收集的是练习性质的题．其中一部分曾在白俄罗斯国立大学的习题课上试用过．对所谓反例（即说明“一些乍一看好象是真的断言其实并不成立”的例子）也给予了一定的注意．

……………………………………………………………

作者

目　录

第一章 集 论

集上的运算 在这里,考察朴素集论初步. 设 X 是集; 写法 $x\in X$ 表示: 元 x 属于集 X. 不属于用记号 $\bar{\in}$ 表示. 写法 $y\bar{\in}X$ 表示元 y 不属于集 X. 如 X 与 Y 是两个集, 则关系 $X\subset Y$ 等价于关系: 由 $x\in X$ 推出 $x\in Y$. 在这种情形, X 叫集 Y 的子集. 集 X 的一切子集的集用 $P(X)$表示. 由一个点 x 所组成的集用$\{x\}$表示. 不含元的集叫空集, 并用 $\emptyset$ 表示. 显然, 对于任何集 X, $\emptyset\subset X$ 且 $X\subset X$. 集 $\emptyset$ 与 X 叫集 X 的非真子集, 而所有其余的子集都叫集 X 的真子集. 集 $X\cup Y=\{x: x\in X$ 或 $x\in Y\}$叫集 X 与 Y 的并.

集 $X\cap Y=\{x: x\in X$ 且 $x\in Y\}$叫集 X 与 Y 的交. 任意一组集的并与交定义如下:

$$\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha=\{x: \exists\alpha_0\in A,\ x\in X_{\alpha_0}\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha=\{x: x\in X_\alpha \text{ 对于任意的 } \alpha\in A\}.$$

这里, 对应于每个元 $\alpha\in A$, 有集 X_α.

集 $X\backslash Y=\{x: x\in X$ 且 $x\bar{\in}Y\}$叫集 X 与 Y 的差; 如 $Y\subset X$, 则它叫集 Y 关于集 X 的余集, 并记为 C_XY. 如果从上下文看, 对于哪一个集取余集是明显的, 那末记号可以简化为 CY.

直积·关系·函数 序对(x,y), 其中 $x\in X, y\in Y$, 叫集 X, Y 的积. 集 X 与 Y 的积写成形式 $X\times Y$(这种积叫直积或笛卡尔积). 对(x, y)的元 x 叫对的第一射影, $x=pr_1(x, y)$, 而元 y 叫对的第二射影, $y=pr_2(x, y)$. 直积 $X\times Y$ 的每个子集 R 都叫关系.

R 的射影 $pr_1R=\{x: x\in X, \exists y\in Y, (x, y)\in R\}$, $pr_2R=\{y: y\in Y, \exists x\in X, (x, y)\in R\}$分别叫关系 R 的定义域和值域. 定义域用 $D(R)$ 表示, 而值域用 $\mathrm{Im}(R)$表示.

关系 $R^{-1}=\{(y, x): (x, y)\in R\}$叫 R 的逆关系. 关系 $R\circ R_1=\{(x, y): \exists z\in Z, (x, z)\in R, (z, y)\in R_1\}\subset X\times Y$ 叫 $R\subset X\times Z$ 与 $R_1\subset Z\times Y$ 的积或复合关系. 如果对于任意的 $x\in X$, 存在一个而且只有一个元 $y\in Y$, 使得

$(x, y)\in R$, 那末关系 R 是关于 y 的函数关系. 由关于 y 的函数关系 R 的定义可以推出: 断言"R 关于 y 是函数关系"等价于下列两个关系: 1) $D(R)=X$; 2) 由 $(x, y)\in R$ 与 $(x, y_1)\in R$ 可以推出 $y=y_1$. 关于 y 的函数关系 $R\subset X\times Y$ 叫 X 到 Y 的映射或定义于 X 上而值在 Y 中的函数. 对应于每个 $x\in X$ 的使 $(x, y)\in R$ 的唯一元 y 用 $F(x)$ 表示, $y=F(x)$, 而且叫函数 F 当自变量取值 x 时的值.

以后常常把"函数"("映射")一词理解为规律、法则、对应, 按照它, 对每个元 $x\in X$ 对应有元 $F(x)\in Y$. 这时, 由对 $(x, F(x))\subset X\times Y$ 所组成的关系叫映射 F 的图象. 用记号 $F: X\to Y$ 描述集 X 到 Y 的映射 F. 如 $X_1\subset X$, 则函数 $F: X\to Y$ 生成函数 $F_1: X_1\to Y, F_1(x)=F(x), x\in X_1$, 它叫函数 F 在 X_1 上的限缩, 并且用 F/X_1 表示. 函数 F 叫函数 F_1 的延拓.

映射 $F: \mathbf{N}\to X$, 其中 $\mathbf{N}$ 是自然数集, 叫到 X 的序列. 序列当自变量取值 n 时的值 $F(n)$ 常常用 x_n 表示, $F(n)=x_n$, 而序列用记号 (x_n) 表示.

设对应于每个元 $\alpha\in A$, 有集 X_α; 集 X_α 的积 $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ 指所有定义于 A 上的使得对于每个 $\alpha\in A$ 都有 $F(\alpha)\in X_\alpha$ 的函数 F 的集. 如果 $A=\{1, 2, \cdots, n\}$, 我们就得到积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ 以上曾对 $n=2$ 定义过, 是 n 元组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集, 其中 $x_k\in X_k$, $k=1, 2, \cdots, n$.

反映射·映射的复合 设已知映射 $F: X\to Y$, 且 $A\subset X$. 集 $F(A)=\{y: y\in Y, \exists x\in A, y=F(x)\}$ 叫集 A 在映射 F 之下的象. 对于集 $B\subset Y$, 集 $F^{-1}(B)=\{x: x\in X, F(x)\in B\}$ 叫集 B 在映射 F 之下的原象. 如 $F(X)=Y$, 则映射 $F: X\to Y$ 叫映上的; 如由 $F(x)=F(x_1)$ 可以推出 $x=x_1$, 则叫映内的; 如既是映上的, 又是映内的, 则叫双映的. 如存在双映映射 $F: X\to\mathbf{N}$, 则集 X 叫可数的. 如关系 $R\subset X\times Y$ 是双映映射 $F: X\to Y$, 则关系 $R^{-1}\subset Y\times X$ 是关于 x 的函数关系. 这个关系是映射 $F^{-1}: Y\to X$, 而且叫映射 F 的反映射 (不要把映射 $F^{-1}: Y\to X$ 跟原象 $F^{-1}(B)$ 弄混了, 后者对于任意的, 不必是双映的映射皆可定义).

设已知映射 $F: X\to Z$ 与 $G: Z\to Y$, 则映射 $H: X\to Y; H(x)=G(F(x))$, 叫映射 F 与 G 的复合, 或复合映射 $H=G\circ F$ (这里, 因子的次序是重要的).

商集 关系 $R\subset X\times X$, 当 $(x, x)\in R$, $x\in D(R)$ 时, 叫自反的; 当可以由 $(x, y)\in R$ 推出 $(y, x)\in R$ 时, 叫对称的; 当可以由 $(x, y)\in R$ 与 $(y, z)\in R$ 推出 $(x, z)\in R$ 时, 叫传递的. 自反、对称且传递的关系 $R\subset X\times X$, $D(R)=$

X 叫等价关系．子集 $A\subset X$，当存在元 $x\in A$，使得 $A=\{y: y\in X, (x,y)\in R\}$ 时，叫等价类（更精确地说，R 等价类）．

定理 集 X 上的等价关系 R 将此集分成两两互不相交的等价类．

等价类的集叫 X 关于等价关系 R 的商集，并用记号 X/R 表示．映射 $\pi: X\to X/R$, $\pi(x)=A$, $x\in A$，叫典范映射（或典范射影）．

（有）序集 自反且传递的关系 $R\subset X\times X$ 叫序关系，如果由 $(x, y)\in R$ 与 $(y, x)\in R$ 可以推出 $x=y$ 的话．对 $(x, y)\in R$ 写成形式 $x\propto y$，其中记号 $\propto$ 表示次序．有次序 $\propto$ 的集 X 写成 $(X, \propto)$，并叫（有）序集．如果序关系 $\propto$ 另有性质：对于每对 $(x, y)\in X\times X$，或者 $x\propto y$ 或 $y\propto x$，则集 X 叫线性序集．

如果对于任意的 $z\in Z$，都有 $z\propto x$，则元 x 叫集 $Z\subset(X, \propto)$ 的强元．如果对于 Z 的任意的强元 y，都有 $x\propto y$，则集 Z 的强元 x 叫集 Z 的上确界（$x=\sup Z$）．

如果由 $x\propto y$, $y\in(X, \propto)$ 可以推出 $x=y$，则元 $x\in(X, \propto)$ 叫极大元．

Zorn 引理 如果序集 $(X, \propto)$ 的每个线性有序子集都有强元，则在 $(X, \propto)$ 中存在有极大元．

如果对于任意的 $z\in Z$，都有 $x\propto z$，则元 x 叫集 $Z\subset(X, \propto)$ 的弱元．如果对于集 Z 的任意弱元 y，都有 $y\propto x$，则集 Z 的弱元 x 叫集 Z 的下确界（$x=\inf Z$）．

如果由 $y\propto x$, $y\in(X, \propto)$ 可以推出 $x=y$，则元 $x\in(X, \propto)$ 叫极小元．

Zorn 引理′ 如果序集 $(X, \propto)$ 的每个线性有序子集都有弱元，则在 $(X, \propto)$ 中存在有极小元．

有向集·滤子·滤子的底 集 X 上的序关系 $\propto$ 叫其上的方向，如果对于任意的元 $x, y\in X$，都存在强元（$\exists z\in X$, $x\propto z$ 且 $y\propto z$）．有方向 $\propto$ 的集 X，$(X, \propto)$ 叫有向集．定义域是有向集的函数 F 叫广义序列．

X 的非空子集类 $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}\subset P(X)$，在下列条件下叫 X 中的滤子：1）由 $A, B\in\mathscr{F}$ 可以推出 $A\cap B\in\mathscr{F}$；2）由 $A\in\mathscr{F}$ 与 $A\subset B\subset X$ 可以推出 $B\in\mathscr{F}$．

X 的非空子集类 Φ, $\Phi\subset P(X)$ 叫滤子 $\mathscr{F}\subset P(X)$ 的底，如果对于每个元 $A\in\mathscr{F}$ 都存在元 $B\in\Phi$，使得 $B\subset A$．如 Φ 是可数集，就说：滤子 $\mathscr{F}$ 有可数底．

设 $\Phi\subset P(X)$．类 Φ 是 X 上的某一滤子 $\mathscr{F}$ 的底的必要充分条件是：

1）如 $A, B\in\Phi$，则存在 $C\in\Phi$, $C\subset A\cap B$；

2) 类 Φ 非空，且 $\emptyset\overline{\in}\Phi$.

当这些条件满足时，滤子 $\mathscr{F}\supset\Phi$ 由集 X 的所有的各含有 Φ 的某一集的子集而组成，如果 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}$，则 X 上的滤子 $\mathscr{F}$ 强于 X 上的滤子 $\mathscr{F}_1$.

每个滤子，如果 X 上的任何异于它的滤子都不比它强，则叫 X 上的超滤子.

习　题

试证关系(1—12)：

1. $X\subset Y\Leftrightarrow X\cup Y=Y\Leftrightarrow X\cap Y=X$.
2. $X\subset Z$ 且 $Y\subset Z\Leftrightarrow X\cup Y\subset Z$.
3. $Z\subset X$ 且 $Z\subset Y\Leftrightarrow Z\subset X\cap Y$.
4. $X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$.
5. $X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$.
6. $X\backslash Y=X\backslash(X\cap Y)=(X\cup Y)\backslash Y$.
7. $X\backslash(Y\backslash Z)=(X\backslash Y)\cup(X\cap Z)$.
8. $(X\backslash Y)\cap(Z\backslash U)=(X\cap Z)\backslash(Y\cup U)$.
9. $X\cap(Y\backslash Z)=(X\cap Y)\backslash(X\cap Z)$.
10. $(X\backslash Z)\cap(Y\backslash Z)=(X\cap Y)\backslash Z$.
11. $(X\cup Y)\backslash Z=(X\backslash Z)\cup(Y\backslash Z)$.
12. $(X\backslash Y)\backslash Z=X\backslash(Y\cup Z)$.

对称差的运算 $\triangle$ 由等式 $X\triangle Y=(X\backslash Y)\cup(Y\backslash X)$ 定义．试证明断言(13—20)：

13. $X\triangle Y=(X\cup Y)\backslash(X\cap Y)$.
14. $X\triangle Y=Y\triangle X$.
15. $X\triangle(Y\triangle Z)=(X\triangle Y)\triangle Z$.
16. $X\cap(Y\triangle Z)=(X\cap Y)\triangle(X\cap Z)$.
17. $X\triangle X=\emptyset$.

18. $X\triangle\emptyset=X$.

19. $Y\subset X\Leftrightarrow X\triangle Y=CY$.

20. $P(X)$是关于运算 $\triangle$ 的交换群。

试用运算(21—23)：

21. $\triangle$, $\cap$. 22. $\triangle$, $\cup$. 23. $\triangle$, $\backslash$. 表示运算 $\cup$, $\cap$.

设 $X, Y\in P(E)$. 试验证关系(24—29)：

24. $C(CX)=X$.

25. $C(X\cup Y)=CX\cap CY$.

26. $C(X\cap Y)=CX\cup CY$.

27. $X\subset Y\Leftrightarrow CY\subset CX$.

28. $X\cap Y=\emptyset\Leftrightarrow X\subset CY\Leftrightarrow Y\subset CX$.

29. $X\cup Y=E\Leftrightarrow CX\subset Y\Leftrightarrow CY\subset X$.

试证等式(30—35)：

30. $(\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha)\cap(\bigcup_{\beta\in B}Y_\beta)=\bigcup_{(\alpha,\beta)\in A\times B}(X_\alpha\cap Y_\beta)$.

31. $(\bigcap_{\alpha\in A}X_\alpha)\cup(\bigcap_{\beta\in B}Y_\beta)=\bigcap_{(\alpha,\beta)\in A\times B}(X_\alpha\cup X_\beta)$.

32. $P(\bigcap_{\alpha\in A}X_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in A}P(X_\alpha)$.

33. $P(\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha)=\{\bigcup_{\alpha\in A}Y_\alpha:Y_\alpha\in P(X_\alpha)\}$.

34. $C(\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in A}CX_\alpha$, 其中 $X_\alpha\in P(E)$ $\forall\alpha\in A$.

35. $C(\bigcap_{\alpha\in A}X_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in A}CX_\alpha$, 其中 $X_\alpha\in P(E)$ $\forall\alpha\in A$.

36. 试造集 X 与 Y, 使得 $X\times Y\neq Y\times X$.

试证关系(37—43)：

37. $X\times Y=\emptyset\Leftrightarrow X=\emptyset$ 或 $Y=\emptyset$.

38. $X_1\times Y_1\subset X\times Y\Leftrightarrow X_1\subset X$, $Y_1\subset Y$.

39. $X\times Y=A\times B\Leftrightarrow X=A$, $Y=B$.

40. $(X\times Y)\cap(X_1\times Y)=(X\cap X_1)\times Y$.

41. $X\times(Y\cup Z)=(X\times Y)\cup(X\times Z)$.

42. $(X\cap X_1)\times(Y\cap Y_1)=(X\times Y)\cap(X_1\times Y_1)$.

43. $Z\subset pr_1Z\times pr_2Z\ \forall Z\subset X\times Y$；当且仅当 $Z=X_1\times Y_1$ 时等式成立，其中 $X_1\subset X$, $Y_1\subset Y$.

44. 等式 $(X\times Y)\cup(X_1\times Y_1)=(X\cup X_1)\times(Y\cup Y_1)$ 成立吗？

设 R, S, T 是一些关系．试验证下列等式成立(45—48)：

45. $R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$.

46. $(R^{-1})^{-1}=R$.

47. $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

48. $D(R^{-1})=\mathrm{Im}(R)$, $\mathrm{Im}(R^{-1})=D(R)$.

49. 设 $\mathbf{R}$ 是数直线，$R\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $R=\{(x,\ y):x\leqslant y\}$．试求 $D(R)$, $\mathrm{Im}(R)$, R^{-1}, $R\circ R$, $R\circ R^{-1}$, $R^{-1}\circ R$.

试建立，下列关系是函数(50—54)：

50. $b\in Y$, $R=X\times\{b\}\subset X\times Y$(常值映射).

51. $R=\{(x,\ x):x\in X\}\subset X\times X$(恒等映射).

52. $R=\{(Z,\ X\setminus Z)\}\subset P(X)\times P(X)$(变成余的关系).

53. $R=\{((x,\ y),\ x)\}\subset(X\times Y)\times X$(在 X 上射影).

54. $R=\{((x,\ y),\ y\}\subset(X\times Y)\times Y$(在 Y 上射影).

55. 试证：当且仅当 $R\circ R^{-1}=I_Y$ 且 $R^{-1}\circ R=I_X$ 时，$R\subset X\times Y$ 是双映的.

56. 试建立：如 R 是映内的则存在关系 $R^{-1}\subset Y\times X$，使 $R^{-1}\circ R=I_X$．(关系 R^{-1} 是左逆的).

57. 试证：如 R 是映上的则存在关系 $R^{-1}\subset Y\times X$，使得 $R\circ R^{-1}=I_Y$(关系 R^{-1} 是右逆的).

已知映射 F: $X\to Y$，试建立下列关系成立(58—68)：

58. $A\subset B\Rightarrow F(A)\subset F(B)$.

59. $F(A\cap B)\subset F(A)\cap F(B)$.

60. $F(\bigcup\limits_{\alpha\in A}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in A}F(B_\alpha)$.

61. $F(A)=pr_2[F\cap(A\times Y)]$, 这里的 F 是映射 $F: X\to Y$ 的图象.

62. $B\subset B_1\Rightarrow F^{-1}(B)\subset F^{-1}(B_1)$.

63. $F^{-1}(B)=F^{-1}[B\cap F(X)]$.

64. $F^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in A}B_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in A}F^{-1}(B_\alpha)$.

65. $F^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in A}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in A}F^{-1}(B_\alpha)$.

66. 当且仅当 F 是映上的时, $F(F^{-1}(B))=B\cap F(X)$, $F(F^{-1}(B))=B$.

67. 当且仅当 F 是映内的时, $F^{-1}(F(A))\supset A$, $F^{-1}(F(A))=A$.

68. 设 $F: X\to Y$, $G: Y\to Z$, $H=G\circ F$, 则 $H^{-1}(B)=F^{-1}(G^{-1}(B))$.

试造映射 $F: X\to Y$ 与子集 $A, B\in P(X)$ 的例子, 使 (69—73):

69. $F(A\cap B)\neq F(A)\cap F(B)$.

70. $F(X\setminus A)\subset Y\setminus F(A)$.

71. $F(X\setminus A)\supset Y\setminus F(A)$.

72. 集 $F(X\setminus A)$, $Y\setminus F(A)$ 之任何一个都不含于另一个之中.

73. $A\supset B$ 且 $F(A\setminus B)\neq F(A)\setminus F(B)$.

74. 试建立: 映射 $pr_1: X\times Y\to X$, $pr_2: X\times Y\to Y$ 是映上的.

75. 已知映射 $F: X\to Y$. 试证: 映射 $G: X\to X\times Y$, $G(x)=(x, F(x))$ 是映内的.

试验证: 下列映射是双映的 (76—78):

76. $F: P(X)\to P(X),\ F(Z)=X\setminus Z.$

77. $F: X\to X\times\{b\},\ F(x)=(x,\ b).$

78. $F: X\times Y\to Y\times X,\ F(x,\ y)=(y,\ x).$

试证,下列诸集是有限的或可数的(79—82):

79. 可数集的任何子集.

80. 有限或可数个有限或可数集的并.

81. 有限个有限或可数集的交.

82. 可数集在任意映射之下的象.

83. 试证:可数个有限集之交不是可数的.

试建立:下列诸集是可数的(84—88):

84. 有理数集 $\mathbf{Q}$.

85. $\mathbf{R}^n$ 的具有有理坐标的点的集.

86. 可数集的有限子集的集.

87. 数轴上两两不相交的开区间的集.

88. 整系数多项式的集.

89. 试证:闭区间[0, 1]的点的集是不可数的.

90. 试求双映映射 φ: $[0,\ 1]\to(0,\ 1)$.

91. 试证:当且仅当对于任意的映射 $F: X\to X$, $\exists A\subset X$, $A\neq\emptyset$, $A\neq X$, $F(A)\subset A$ 时,集 X 是无限的.

92. 试验证断言:当且仅当 A 双映于不平凡子集时,A 是无限的.

试造满足下列要求的关系(93—95):

93. 自反、对称,但不传递.

94. 自反、传递,但不对称.

95. 对称、传递,但不自反.

试验证,下列关系是等价关系(96—100):

96. $R\subset\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, $R=\{(a,\ b): a-b$ 能被 m 除尽$\}$.

97. $R\subset(\mathbf{N}\times\mathbf{N})\times(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$, $R=\{((a,\ b),(c,\ d)):ad=bc$, 若 $bd\neq 0$, 或 $a=c$, 若 $bd=0\}$.

98. $R\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $R=\{(\alpha,\ \beta):\alpha-\beta$ 有理数$\}$.

99. $R\subset(\mathbf{N}\times\mathbf{N})\times(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$, $R=\{((a,\ b),(c,\ d)):a+d=b+c\}$.

100. R^{-1}, 如 R 是等价关系.

101. R 与 R_1 是等价关系. 试建立: 当且仅当 $R\circ R_1=R_1\circ R$ 时, $R\circ R_1$ 是等价关系.

试证, 下列关系是等价关系, 并造出相应的商集(102—105):

102. $R\subset\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$, $R=\{((x,\ y),\ (x_1,\ y_1)):x=x_1\}$.

103. $R\subset\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$, $R=\{((x,\ y,\ z),\ (x_1,\ y_1,\ z_1)):x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2\}$.

104. $R\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $R=\{(x,\ y):x-E(x)=y-E(y)$, 其中 $E(x)$是数 x 的整部$\}$.

105. $R\subset\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$, $R=\{((x,\ y),\ (x_1,\ y_1)):y=y_1\}$.

试建立, 下列诸集是有序的(106—108):

106. 具有包含关系 $A\subset B$ 的 $P(X)$.

107. 闭区间$[0,\ 1]$上连续函数的集 $C[0,1]$, 序关系为 $x\propto y$, 它指 $x(t)\leqslant y(t)\ \forall t\in[0,\ 1]$.

108. 序集$(X,<)$, $(Y,\ll)$的积, 序关系为$(x,\ y)\propto(x_1,\ y_1)$, 指 $y\ll y_1$ 或当 $y=y_1$ 时 $x<x_1$.

109. 试证: 具有序关系 $a\leqslant b$ 的 $\mathbf{R}$ 是线性序集.

110. 试证: 如 R 是序关系, 则 R^{-1} 是序关系.

111. 试证: 以包含为序的 $P(X)$的每个子集都有上确界与下确界.

112. 试证: 指 n 被 m 整除的关系 $m\propto n$ 是 $\mathbf{N}$ 上的序关系.

试验证：对于每个有限集 $A \subset \mathbf{N}$，在这种次序之下，存在着 $\inf A$ 与 $\sup A$.

113．试证：具有意指 A 中的数的和不大于 B 中的数的和的序关系 $A \propto B$ 的 $\mathbf{N}$ 的有限子集并不构成序集.

试验证：下列诸集构成滤子的底(114—115)：

114．形如$(1, \beta)$，$\beta > 1$ 的开区间.

115．集$\{n, n+1, \cdots\}$，$n=1, 2, \cdots$.

试验证：下列诸集组成滤子(116—118)：

116．$\mathbf{N}$ 中有限子集在 $\mathbf{N}$ 中的余集.

117．X 的包含集 $A \subset X$，$A \neq \emptyset$ 的子集.

118．无限集的所有可能的有限子集的余集.

119．试求出有限集中的一切滤子.

120．试建立：X 上的某个非空滤子类 $\{\mathscr{F}_\alpha\}$ 的交是 X 上的滤子 $\inf \mathscr{F}_\alpha$.

121．试证：集类$\{A \times B\}$组成 $X \times Y$ 上的某一滤子的底，这里 $A \in \mathscr{F}$，$\mathscr{F}$ 是 X 上的滤子，$B \in \mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_1$ 是 Y 上的滤子.

122．已知映射 F: $X \to Y$ 与 X 上的滤子的底（或滤子）$\mathscr{F}$. 试证：$F(\mathscr{F})$是 Y 上的某一滤子的底.

123．试造映射 F: $X \to Y$ 与 X 上滤子 $\mathscr{F}$ 的例子，使得 $F(\mathscr{F})$不是滤子.

124．试证：如 Φ 是 Y 上的滤子的底，而 F: $X \to Y$ 是映上的，则 $F^{-1}(\Phi)$是 X 上的滤子的底.

125．设$(X, \propto)$是有向集．对于任意的 $x \in X$，集 $A_x = \{y: x \propto y\}$叫元 x 所确定的截集．试建立：类 $\Phi = \{A_x\}$，$x \in X$，组成 X 上滤子的底.

126．试证：X 的包含元 $a \in X$ 的所有子集组成超滤集.

127．试证：X 上滤子的集由 $P(P(X))$上的包含关系规定次

序.

128. 试证:对于 X 上的任意滤子 $\mathscr{F}$,存在超滤子 $\Phi\supset\mathscr{F}$.

129*. 已知 X 上的超滤子 $\mathscr{F}$. 试证: 如 $A\cup B\in\mathscr{F}$, A, $B\in P(X)$,则 $A\in\mathscr{F}$ 或 $B\in\mathscr{F}$.

130. 试建立:"在 X 上存在包含类 $G\subset P(X)$ 的滤子"等价于断言"G 中任意有限个集的交是非空的".

131. 设 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{F}_1$ 是 X 上的滤子. 试证: $\mathscr{F}\cap\mathscr{F}_1=\{A\cup B\}$, 其中 $A\in\mathscr{F}$, $B\in\mathscr{F}_1$.

132. 试验证下述断言的正确性: 如 X 上的滤子 $\mathscr{F}$ 满足条件 $\bigcap\limits_{A\in\mathscr{F}}A=\emptyset$, 则它强于集 X 的有限子集的余集的滤子.

第二章 拓扑空间

拓扑·邻域·闭包 设 X 是任意非空集. 集 X 的满足下列条件（拓扑的公理)的子集的集 $\tau(\tau\subset P(X))$ 叫集 X 上的拓扑:

1) τ 的任意个元的并属于 τ;

$$U_\alpha\in\tau\Rightarrow\bigcup U_\alpha\in\tau;$$

2) τ 的任意两个集的交属于 τ:

$$U_1,\ U_2\in\tau\Rightarrow U_1\cap U_2\in\tau;$$

3) 整个集 X 与空子集属于 τ.

τ 的元叫拓扑 τ 中的开集,而其余集叫闭集. 对 (X,τ)（其中 X 为集, τ 为其上的拓扑）叫拓扑空间. 如果拓扑已定,则拓扑空间常常简记为 X.

如果在集 X 上给出两个拓扑 τ_1 与 τ_2,而且条件 $\tau_1\subset\tau_2$ 满足,就说: 拓扑 τ_2 强于拓扑 τ_1, 而拓扑 τ_1 弱于拓扑 τ_2. X 上最弱的拓扑由两个子集组成 $\{X,\emptyset\}$, 而且叫反离散的. 集 X 上最强的拓扑由集 X 的一切子集组成 $(\tau=P(X))$, 而且叫离散的.

拓扑空间 (X,τ) 中包括点 x 的任意开集都叫点 x 的开邻域. 包含点 x 的开邻域的任何集都叫这个点的邻域. 点 x 的一切邻域的集用 $O(x)$ 表示.

设 A 是集 X 的子集. 就跟 A 的关系而言,拓扑空间 (X,τ) 的点可能有两种:

1. 如果点 x 的任何邻域都含有集 A 的点,则点 x 叫集 A 的触点.
2. 如果存在点 x 的不包含 A 的点的邻域,则点 x 叫集 A 的外点.

集 A 的触点可以分成下列几种类型:

如果存在点 $x\in A$ 的邻域 V, 不包含 A 的异于 x 的点 $(V\cap A=\{x\})$, 则 x 叫集 A 的 孤立点.如在 x 的任意邻域中都包含有集 A 的异于 x 的点, 则 x 叫集 A 的 聚点(极限点).

如果存在点 x 的邻域 V, 含于集 A 中,则点 x 叫集 A 的内点. 如果在点 x 的任意邻域中既含有 A 的点,也含有不属于 A 的点, 则 x 叫集 A 的界点.

集 A 的外点的集叫集 A 的外部, 并用 $\mathrm{ext}\,A$ 表示; 内点的集叫集 A 的