线性规划

——原理与方法

高旅端　陈　志
史明仁　杨中华　编著

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了线性规划的基本内容，共七章，主要包括单纯形法、对偶理论、参数线性规划与灵敏度分析、运输问题与分配问题、有效集法、线性规划的多项式算法和整数规划。本书可作为高等院校应用数学专业和其他有关专业的线性规划课程的教材或参考书，也可供教师、科技人员和研究生参考。

线性规划——原理与方法

高旅端　陈　志　史明仁　杨中华　编著

*

北京工业大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印刷

*

1989 年11月第 1 版　1989 年11月第 1 次印刷

850×1168 毫米 32 开本　9　印张　224 千字

印数：0001～5000 册

ISBN 7-5639-0063-2/O·5

定价：3.90元

前　言

线性规划是运筹学中最基本和最重要的内容，有着非常广泛的应用，受到人们的极大重视。

本书着重介绍了求解线性规划问题的单纯形法以及近年来兴起的另一种有很大用途的方法——有效集法，并且对上述两种方法的原理作了必要的说明。此外，本书还讨论了参数线性规划与灵敏度分析、运输问题与分配问题等重要内容，简单介绍了线性规划的多项式算法——椭球算法与Karmarkar算法。本书的最后一部分是关于整数规划问题的求解方法。

本书是根据1987年4月在贵阳召开的“全国运筹专业教学讨论会”上制订的《线性规划》教学大纲编写的，可以作为高等院校中应用数学专业和其他有关专业《线性规划》课程的教材或参考书，讲授全部内容约需80学时。对于少学时的课程，可以删去书中的部分内容和某些定理的证明。

本书是在我们多年来教学和科研的基础之上写成的。在编写过程中，得到了邓乃扬和诸梅芳老师的关心和帮助，谨向他们表示衷心的谢意。

由于作者水平有限，书中错误或不妥之处在所难免，欢迎批评指正。

作　者

1988年6月

目　录

引　言

1. 线性规划问题及其数学模型

线性规划是运筹学的一个重要分支，是最近40年发展起来的一种数学方法。

在许多实际问题中，希望能在现有条件下，找到解决问题的最优方案，即花费较少的人力物力，或者创造较多的经济价值。这就要求人们进行统筹安排和组织，其中经常用到线性规划的方法。

在使用数学方法解决实际问题时，必须把问题数学化。对于寻找最优方案的问题来说，常把要达到的目标和现有的各种条件用数学式子表达出来，前者称为目标函数，后者称为约束条件。线性规划所讨论的问题的目标函数是未知变量的线性函数，约束条件是由关于未知变量的线性等式或线性不等式组成。

例1　(生产安排问题)

某工厂有甲、乙两台机床，生产A、B两种产品。每台机床每周有效工作时间是36小时，制造每单位产品，甲、乙机床各自所需的时间(以小时为单位)和每种产品的价值(以百元为单位)如下表所示：

生产每单位产品的小时数　产品 / 机床	A	B
甲	0.05	0.02
乙	0.02	0.03
每单位产品价值(百元)	0.03	0.04

问每周每种产品应生产多少，才能使该厂一周的生产总值最大？

解： 设每周生产 A 产品 x_1 单位，B 产品 x_2 单位，则目标函数为

$$0.03x_1+0.04x_2$$

应该使其取最大值。约束条件为

$$0.05x_1+0.02x_2\leqslant 36$$
$$0.02x_1+0.03x_2\leqslant 36$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0$$

显然这是一个线性规划问题，通常记作

$$\begin{aligned}\max\quad & 0.03x_1+0.04x_2\\ \text{s.t.}\quad & 0.05x_1+0.02x_2\leqslant 36\\ & 0.02x_1+0.03x_2\leqslant 36\\ & x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

例 2 （运输问题）

某种物资从 m 个产地(产量分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$)运往 n 个销地(销量分别为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$)。设 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$，把单位物资从第 i 个产地运往第 j 个销地的运输费用为 c_{ij}。问如何确定第 i 个产地运往第 j 个销地的运输量，使得满足需求并且总的运输费用最少？

解： 由于 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}b_j$，这种运输问题也称为产销平衡的运输问题。设从第 i 个产地运往第 j 个销地的运输量为 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则上述问题可以写为

$$\begin{aligned}\min\quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\quad (i=1,2,\cdots,m)\\ & \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\quad (j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$$

线性规划问题的一般形式为

$$\begin{aligned}
&\min(\text{或}\max)\quad c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
&\text{s.t.}\quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \qquad\qquad (1)\\
&\qquad a_{m+1,1}x_1+a_{m+1,2}x_2+\cdots+a_{m+1,n}x_n \geqslant b_{m+1} \\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad a_{m+l,1}x_1+a_{m+l,2}x_2+\cdots+a_{m+l,n}x_n \geqslant b_{m+l}
\end{aligned}$$

其中 x_j 是未知变量，a_{ij}, b_i, c_j 是实常数。

需要指出的是，在约束条件中的不等式约束都采用了“$\geqslant$”的样式。如果是“$\leqslant$”的样式，只须在该不等式两端同时乘以-1，即可化为“$\geqslant$”的样式。同时，未知变量的非负要求：$x_j \geqslant 0$，也可包括在上面的不等式约束之中。一般地，把未知变量的非负要求称为平庸约束。

引入向量符号

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in R^n$$

$$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T \in R^n$$

$$a_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T \in R^n \quad (i=1,2,\cdots,m+l)$$

则线性规划问题的一般形式又可以写为

$$\begin{aligned}
&\min\quad(\text{或}\max)\quad c^Tx \\
&\text{s.t.}\quad a_i^Tx=b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad\qquad (2)\\
&\qquad a_i^Tx \geqslant b_i \quad (i=m+1,m+2,\cdots,m+l)
\end{aligned}$$

由于从方法上说求目标函数的最大值和最小值没有本质的区别，因此今后主要讨论求最小值的问题

$$\begin{aligned}
&\min\quad c^Tx \\
&\text{s.t.}\quad a_i^Tx=b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad\qquad (3)\\
&\qquad a_i^Tx \geqslant b_i \quad (i=m+1,m+2,\cdots,m+l)
\end{aligned}$$

2. 线性规划的发展历史

关于线性规划最早可以追溯到1823年，Fourier曾经提出过一些与线性规划有关的问题。1939年，苏联学者Kantorovich发表了重要著作《生产组织与计划中的数学方法》，针对生产的组织、分配、下料等问题，提出了一类特殊的线性规划问题。但是，他们的工作都没有引起人们的重视。

在线性规划的发展中，Dantzig作出了重要的贡献。1947年，他提出线性规划的数学模型和求解线性规划的单纯形法，真正地奠定了线性规划完整的概念、理论和算法。直到今天，单纯形法仍是求解线性规划的最常用的方法。

1953年，Dantzig提出了改进单纯形法，大大地减少了计算的工作量。1954年，Beale提出了对偶单纯形法；1956年，Dantzig和Fulkerson提出了原始-对偶单纯形法，使单纯形法更为完善。1963年，Dantzig的著作《线性规划及其扩充》出版，至此，人们普遍认为线性规划在理论和算法上已经完备，而且把线性规划和单纯形法几乎看成是一件事了。

但是在1972年，Klee和Minty构造了一个线性规划的例子，发现使用单纯形法的迭代次数是指数形式的，即单纯形法不是所谓的"好算法"——多项式算法！这样，20多年来获得崇高声誉的单纯形法受到了严重的挑战。这个重要的发现引起了人们浓厚的兴趣，线性规划究竟有没有多项式算法？

1979年，苏联年青的数学家Khachiyan提出了一个新的算法——椭球算法，这是一个多项式算法。这个结果在全世界引起了极大的轰动，被认为是在线性规划的理论上的历史性的突破。然而，在实际计算中，椭球算法的效果却比单纯形法差得多。其原因在于，虽然单纯形法是指数算法，但只是对坏情况的问题求解时，迭代次数才是指数形式的，而绝大多数问题并不是那样。因此，椭球算法并不实用，不过，它具有重要的理论意义。

1984年，在美国Bell实验室工作的印度32岁的数学家Karmarkar提出了又一个多项式算法——Karmarkar算法。目前，

对 Karmarkar 算法的评价尚无定论，不少人正对这一算法进行研究，使其更加完善。

此外，在 1980 年前后，形成了求解线性规划的有效集法。尽管在本质上，有效集法和单纯形法是一样的，但两者可以相互补充。有效集法在实际中有着重要的应用。

3. 线性规划的应用

在线性规划发展中占主导地位的是它在实际中的重要应用。随着计算机的日益普及和发展，线性规划所起的作用越来越大，几乎渗透到人们活动的各个领域。例如在生产计划、生产管理、人事管理、交通运输、土地利用、城市服务、设备布局、水资源利用、医疗以及军事作战等方面。据估计，在计算机进行计算的运行时间中，约有 25%—50% 的时间是在进行线性规划的计算。大量的商用软件包的产生，使计算机处理成千上万个未知变量和约束条件的线性规划问题，已经成为不难做到的事情。

另一方面，线性规划的发展促进了其他许多新分支的发展，如非线性规划、网络流理论、组合最优化、随机规划、整数规划、非凸规划以及不动点理论等。

在 1958—1959 年间，我国的数学工作者在运输、生产计划方面应用线性规划，取得了很大成果，并创造了物资调运的图上作业法。今天，线性规划在我国建设中正发挥着越来越大的作用。

第一章 单纯形法

在这一章里，介绍求解线性规划的最常用的方法——单纯形法。这时线性规划要化为标准形式

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \text{①} \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

使用矩阵和向量的符号，上述标准形式又可以写为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

其中

$$
\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n
$$

$$
\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \in R^n
$$

$$
\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T \in R^m
$$

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \in R^{m \times n}
$$

并称 A 为约束条件系数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为约束条件右端向量，$\boldsymbol{c}$ 为目标函数系数向量，$\boldsymbol{x}$ 为未知变量向量。

---

① $b_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$。若 $b_i < 0$ 时，只须在等式两端同乘 -1 即可。

§1　预备知识

1. 化为标准形式

当线性规划的约束条件中含有不等式约束时，可以引入松弛变量，把不等式约束化为等式约束。例如，对不等式约束

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1$$

引入松弛变量 x_{n+1}，化为

$$\begin{aligned}&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n-x_{n+1}=b_1\\&x_{n+1}\geqslant 0\end{aligned}\tag{1.3}$$

当未知变量 x_j 为自由变量(即没有非负要求)时，可令

$$\begin{aligned}&x_j=x_j'-x_j''\\&x_j'\geqslant 0,x_j''\geqslant 0\end{aligned}\tag{1.4}$$

然后在目标函数和所有约束条件中用 $x_j'-x_j''$ 取代 x_j，即可化为标准形式，不过此时未知变量的数目将要增加。另一种方法是从某一等式约束中将 x_j 表示为其他未知变量的线性组合，代入到目标函数和其他约束条件中的 x_j 处，使 x_j 从问题中消去，这样可以减少未知变量的数目。

2. 可行解与最优可行解

定义 1.1　对线性规划(1.1)，任何一组满足约束条件的 x_1, $x_2,\cdots,x_n$ (或$\boldsymbol{x}$)的值，称为(1.1)的可行解。可行解组成的集合称为可行域，记为 D。

定义 1.2　设线性规划(1.1)的可行域为 D，若存在着$\boldsymbol{x}^*\in D$，使得对任意的 $\boldsymbol{x}\in D$，都有

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*\tag{1.5}$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是线性规划(1.1)的最优可行解。

线性规划(1.1)的解可以分为下面 4 种情形：

① 没有可行解，即可行域为空集合，此时约束条件不相容。我们称线性规划(1.1)无解。

② 有可行解，但可行域无界，$\boldsymbol{x}$ 的分量可以无限增大，而目标函数值无限减小。我们称线性规划(1.1)无有限解。

③ 有唯一的最优可行解。

④ 有最优可行解，但不唯一。

对于③和④，我们称线性规划(1.1)有解。

3. 基本解

对于线性规划(1.1)，假设 $m\leqslant n$，并设矩阵 A 的秩为 m，即方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 中没有多余的方程。

将矩阵A 按列分块：

$$A=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n) \tag{1.6}$$

其中

$$\boldsymbol{p}_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1.7}$$

由于 A 的秩是 m，我们一定可以从 A 的 n 列中选出 m 个线性无关列。不失一般性，可以设 A 的前 m 列线性无关。记 A 的前 m 列组成的矩阵为 B，后 $n-m$ 列组成的矩阵为 N，于是

$$A=(B, N) \tag{1.8}$$

显然 B 是非奇异矩阵，称为基矩阵。

把 $\boldsymbol{x}$ 分为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

其中 $\boldsymbol{x}_B=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T\in R^m$，$\boldsymbol{x}_N=(x_{m+1}, \cdots, x_n)^T\in R^{n-m}$。称 x_1，$x_2, \cdots$，x_m 为基本变量，$x_{m+1}, \cdots$，x_n 为非基本变量。这时 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可以写为

$$(B, N)\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{pmatrix}=\boldsymbol{b} \tag{1.10}$$

即

$$B\boldsymbol{x}_B+N\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{b} \tag{1.11}$$

在式(1.11)中取 $\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$，则有 $B\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{b}$，于是

$$\boldsymbol{x}_B=B^{-1}\boldsymbol{b} \tag{1.12}$$

从而

$$x=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

是 $Ax=b$ 的一个解，称为基本解。

一般地，有下面的定义。

定义 1.3 对于方程组 $Ax=b$，令 B 表示由 A 的列所组成的任一非奇异的 $m\times m$ 阶子矩阵，则称 x 的与 B 的列相对应的分量为基本变量，其余的分量为非基本变量。若令 x 的非基本变量取值为零，则所得到的方程组 $Ax=b$ 的解 x 称为关于基矩阵 B 的基本解。若基本解中的基本变量取值有零时，则称该基本解为退化的基本解，否则称为非退化的基本解。

定义 1.4 对线性规划(1.1)，若 $Ax=b$ 的基本解 x 非负，则称 x 为线性规划(1.1)的基本可行解。若基本解 x 又是最优可行解，则称 x 为线性规划(1.1)的最优基本可行解。

4. 顶点

定义 1.5 设 S 是 R^n 中的任意一个集合，若连接 S 中的任意两点 $x^{(1)}$、$x^{(2)}$ 的线段仍在 S 内，则称 S 为凸集。换言之，若

$$\{x\mid x=\theta x^{(1)}+(1-\theta)x^{(2)},0\leqslant\theta\leqslant1,x^{(1)}\in S,x^{(2)}\in S\}\subset S \tag{1.14}$$

则称 S 为凸集。

定理 1.1 线性规划 (1.1) 的可行域 D 若非空，则是一个凸集。

证：设 $x^{(1)}\in D$，$x^{(2)}\in D$，即 $Ax^{(1)}=b$，$x^{(1)}\geqslant0$，$Ax^{(2)}=b$，$x^{(2)}\geqslant0$，则对任意 $0\leqslant\theta\leqslant1$，有

$$\theta x^{(1)}+(1-\theta)x^{(2)}\geqslant0$$

$$A[\theta x^{(1)}+(1-\theta)x^{(2)}]=\theta Ax^{(1)}+(1-\theta)Ax^{(2)}=b$$

即 $\theta x^{(1)}+(1-\theta x^{(2)})\in D$，因此 D 是凸集。

定义 1.6 若凸集 S 中的点 x，不能成为 S 中任何线段的内点，则称 x 为 S 的顶点（或极点）。换言之，若对于任何两点

$\boldsymbol{x}^{(1)}\in S, \boldsymbol{x}^{(2)}\in S$, 且 $\boldsymbol{x}^{(1)}\neq\boldsymbol{x}^{(2)}$, 不存在 $\theta(0<\theta<1)$, 使得

$$\boldsymbol{x}=\theta\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\theta)\boldsymbol{x}^{(2)}$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的顶点。

定理 1.2 设线性规划(1.1)的可行域为 D, $\boldsymbol{x}\in D$, 则 $\boldsymbol{x}$ 是 D 的顶点的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}$ 是线性规划(1.1)的基本可行解。

证: 必要性 使用反证法。设 $\boldsymbol{x}$ 是D的顶点，但不是基本可行解，即 $\boldsymbol{x}$ 的非零分量 $x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_k}(k\leqslant m)$ 所对应的 A 的列向量 $\boldsymbol{p}_{t_1}, \boldsymbol{p}_{t_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{t_k}$线性相关，于是存在不全为零的数$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k$, 使

$$\delta_1\boldsymbol{p}_{t_1}+\delta_2\boldsymbol{p}_{t_2}+\cdots+\delta_k\boldsymbol{p}_{t_k}=\boldsymbol{0} \tag{1.15}$$

同时

$$x_{t_1}\boldsymbol{p}_{t_1}+x_{t_2}\boldsymbol{p}_{t_2}+\cdots+x_{t_k}\boldsymbol{p}_{t_k}=\boldsymbol{b} \tag{1.16}$$

因此对任意 λ 都有

$$(x_{t_1}+\lambda\delta_1)\boldsymbol{p}_{t_1}+(x_{t_2}+\lambda\delta_2)\boldsymbol{p}_{t_2}+\cdots+(x_{t_k}+\lambda\delta_k)\boldsymbol{p}_{t_k}=\boldsymbol{b}$$
$$(x_{t_1}-\lambda\delta_1)\boldsymbol{p}_{t_1}+(x_{t_2}-\lambda\delta_2)\boldsymbol{p}_{t_2}+\cdots+(x_{t_k}-\lambda\delta_k)\boldsymbol{p}_{t_k}=\boldsymbol{b}$$

特别取

$$\bar{\lambda}=\min_{\substack{i=1,2,\cdots,k\\ |\delta_i|\neq 0}}\frac{x_{t_i}}{|\delta_i|}>0$$

并构造

$$\boldsymbol{x}^{(1)}:\begin{cases} x_{t_1}^{(1)}=x_{t_1}+\bar{\lambda}\delta_1\\ x_{t_2}^{(1)}=x_{t_2}+\bar{\lambda}\delta_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{t_k}^{(1)}=x_{t_k}+\bar{\lambda}\delta_k\\ x_j^{(1)}=0(j\neq t_1, t_2, \cdots, t_k)\end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)}:\begin{cases} x_{t_1}^{(2)}=x_{t_1}-\bar{\lambda}\delta_1\\ x_{t_2}^{(2)}=x_{t_2}-\bar{\lambda}\delta_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{t_k}^{(2)}=x_{t_k}-\bar{\lambda}\delta_k\\ x_j^{(2)}=0\ \ (j\neq t_1, t_2, \cdots, t_k)\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{x}^{(1)}\in D, \boldsymbol{x}^{(2)}\in D$, 且$\boldsymbol{x}^{(1)}\neq\boldsymbol{x}^{(2)}$,

$$x=\frac{1}{2}x^{(1)}+\frac{1}{2}x^{(2)}$$

从而 x 不是D的顶点，与假设相矛盾。

充分性　使用反证法。设 x 是基本可行解，但不是D的顶点，则必存在D中两个不同的点$x^{(1)}$、$x^{(2)}$，使

$$x=\theta x^{(1)}+(1-\theta)x^{(2)}\quad(0<\theta<1)\tag{1.17}$$

设 x 的非零分量为 $x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_k}$，则当$j\neq t_1, t_2, \cdots, t_k$时，由式(1.17)有

$$\theta x_j^{(1)}+(1-\theta)x_j^{(2)}=0$$

由于 $x_j^{(1)}\geqslant 0, x_j^{(2)}\geqslant 0, \theta>0$，所以

$$x_j^{(1)}=x_j^{(2)}=0\quad(j\neq t_1, t_2, \cdots, t_k)$$

从而

$$x_{t_1}^{(1)}p_{t_1}+x_{t_2}^{(1)}p_{t_2}+\cdots+x_{t_k}^{(1)}p_{t_k}=b$$
$$x_{t_1}^{(2)}p_{t_1}+x_{t_2}^{(2)}p_{t_2}+\cdots+x_{t_k}^{(2)}p_{t_k}=b$$

上述两式相减得

$$\sum_{i=1}^{k}(x_{t_i}^{(1)}-x_{t_i}^{(2)})p_{t_i}=0\tag{1.18}$$

由于 $x^{(1)}\neq x^{(2)}$，因此至少有某个 $x_{t_i}^{(1)}-x_{t_i}^{(2)}\neq 0$，这说明$p_{t_1}, p_{t_2}, \cdots, p_{t_k}$线性相关，与 x 是基本可行解相矛盾。

定义 1.7　对给定的矩阵 $A\in R^{m\times n}$ 和向量 $b\in R^m$ 所定义的集合

$$M=\{x\mid Ax\geqslant b, x\in R^n\}\tag{1.19}$$

若非空，则称为凸多面体。

定义 1.8　R^n 中的凸多面体 M 的两个顶点 $\hat{x}$、$\tilde{x}$ 称为相邻的，如果对于以 $\hat{x}$、$\tilde{x}$ 为端点的线段上的任意一点 $\bar{x}$，当它能表示成

$$\bar{x}=\theta x^{(1)}+(1-\theta)x^{(2)},\ 0<\theta<1,\ x^{(1)}、x^{(2)}\in M$$

时，一定有 $x^{(1)}$、$x^{(2)}$也在以 $\hat{x}$、$\tilde{x}$ 为端点的线段上。

5. 线性规划的基本定理

定理 1.3 （基本定理）

当 $A\in R^{m\times n}$ 的秩为 m 时，线性规划(1.1)具有下述性质：

① 若存在可行解，则必存在基本可行解。

② 若存在最优可行解，则必存在一个基本可行解是最优可行解。

证： ① 设 $\boldsymbol{x}$ 是可行解，我们可以从这个可行解出发，得到一个基本可行解，方法如下：

设 $\boldsymbol{x}$ 的 n 个分量中有 r 个分量大于零($r\leqslant n$)，不失一般性，设前 r 个分量大于零，于是

$$x_1\boldsymbol{p}_1+x_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{p}_r=\boldsymbol{b} \tag{1.20}$$

如果 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_r$ 线性无关，则 $\boldsymbol{x}$ 是基本可行解；否则，存在不全为零的数 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$，使

$$\delta_1\boldsymbol{p}_1+\delta_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+\delta_r\boldsymbol{p}_r=\boldsymbol{0} \tag{1.21}$$

并且可以假定 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$ 中至少有一个是正数。由式(1.20)和(1.21)可知，对任意 λ 成立

$$(x_1-\lambda\delta_1)\boldsymbol{p}_1+(x_2-\lambda\delta_2)\boldsymbol{p}_2+\cdots+(x_r-\lambda\delta_r)\boldsymbol{p}_r=\boldsymbol{b} \tag{1.22}$$

引入向量

$$\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\ \delta_r,0,\cdots,0)^T\in R^n$$

则对任意 λ，$\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{\delta}$ 都是方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，并且当 $\lambda=0$ 时，就是原来的可行解。而当 λ 从零增大时，$\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{\delta}$ 的分量或随着增大，或随着减小，或不变，并且至少有一个分量是随着减小的。注意到当 λ 过大时，$\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{\delta}$ 将不再是可行解。我们希望适当增大 λ，使 $\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{\delta}$ 保持是可行解，并且使 $x_1-\lambda\delta_1,x_2-\lambda\delta_2,\cdots,x_r-\lambda\delta_r$ 这 r 个分量中有一个或几个变为零。为此可取

$$\lambda=\min\left\{\frac{x_i}{\delta_i}\,\middle|\,\delta_i>0\right\} \tag{1.23}$$

即可满足上述要求。这样在式(1.22)中就少了一项或几项。讨论剩下的 A 的列向量是否线性无关，仿照上述作法继续下去。有限次以后即可得到基本可行解。