高等院校经济应用数学系列教材

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

# 微积分

$\Sigma$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

温惠林 王学敏 主 编
孙激流 吕淑红 副主编

北京邮电大学出版社

经济应用数学基础(一)

# 微　积　分

主　编　温惠林　王学敏
副主编　孙激流　吕淑红

北京邮电大学出版社
·北京·

## 内容摘要

本书是按高等学校文科微积分、研究生入学考试及经济管理专业自学考试的教学大纲要求编写的，书中注意加强微积分在实际中的应用，建立数学模型并各章中尽可能地增加了一些应用例题，特别是将数学软件 Mathematica 引入本书，学生可以通过计算机这一高科技工具观察、联想、类比、分析、解决数学问题，充分调动学生学习数学的积极性，培养学生的动手能力。

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分/温惠林，王学敏主编．—北京：北京邮电大学出版社，2001.5

ISBN 7-5635-0492-3

Ⅰ.应…　Ⅱ.①温…②王…　Ⅲ.①应用数学—高等学校—教材 ②微积分—高等学校—教材　Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 08394 号

---

**书　　名**：微积分
**主　　编**：温惠林　王学敏
**责任编辑**：孙伟玲　徐[illegible]琨
**出 版 者**：北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
邮编：100876　电话：62282185、62283578(传真)
网址：http://www.buptpress.com
**经　　销**：各地新华书店
**印　　刷**：北京忠信诚胶印厂印刷
**印　　数**：1—5 500 册
**开　　本**：850 mm×1 168 mm　1/32　印张：16.875　字数：437 千字
**版　　次**：2001 年 7 月第 1 版　2001 年 7 月第 1 次印刷
**书　　号**：ISBN 7-5635-0492-3/O·29-1
**定　　价**：24.00 元

---

# 前　言

步入21世纪，科学、技术和社会都发生了巨大变化。数学作为一种实用的工具，不但深入到物理、化学、生物等传统学科，而且还深入到了经济、金融、信息、社会学等各个领域中。知识经济时代的到来，使得对数学方法的学习和掌握就显得更加重要。面向21世纪为了培养高素质的具有创新精神和强实践能力的人才，我们应该站在当代科学发展的高度，对微积分课程的整体结构进行提升、消化和改造，使它更准确、更通俗、更生动，使学生通过这门课程的学习更深刻地了解数学的实质和作用。

本书是按照国家教委印发的高等学校文科微积分教学大纲、研究生入学考试教学大纲以及经济管理专业自学考试大纲的基本要求编写的。根据我们多年的教学经验，本着不断改革、不断前进的原则，注意加强微积分在实际中的应用、建立数学模型。各章中尽可能地增加了一些应用例题。特别是将数学软件 Mathematica 引入书中，使学生通过计算机这一高科技工具，观察、联想、类比、分析、解决数学问题，充分调动学生学习数学的主动性和积极性，培养学生的动手能力。

本书由温惠林、王学敏主编、审稿，孙激流、吕淑红任副主编。全书分为十章，各章以极限为主线联成一体。一至六章为一元微积分，由吕淑红编写；七至十章为多元微积分、微分方程和级数由孙激流编写；数学软件 Mathematica 在各章中的应用由孙激流

编写。

本书既适合于大学本科生教学，也可供一般层次的专科生和成人教育作为教材。

由于编者水平有限，错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2001年1月

# 目　　录

# 第一章 函　数

## 1.1 预备知识

**1. 逻辑符号**

在数学的逻辑推理中，为书写方便，有时采用下列逻辑符号：

- 符号 $\forall$ 表示“任给”或“每一个”；
- 符号 $\exists$ 表示“存在”或“找到”；
- 符号 $A \Leftrightarrow B$ 表示命题 $A$ 与 $B$ 等价或互为充要条件.

**2. 邻域**

设 $x_0,\delta$ 是两个实数，且 $\delta>0$，实数集合 $\{x \mid |x-x_0|<\delta, \delta>0\}$ 在数轴上，表示一个以 $x_0$ 为中心，长度为 $2\delta$ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，称为点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域，或以 $x_0$ 为中心的 $\delta$ 邻域，点 $x_0$ 称为这个邻域的中心，$\delta$ 称为这个邻域的半径. 如图 1-1 所示.

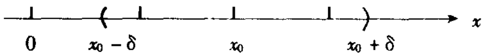


图 1-1

实数集合 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 表示在点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域内去掉 $x_0$ 点，其余点所组成的集合. 即集合 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 称为以 $x_0$ 为中心，$\delta$ 为半径的空心邻域，如图 1-2 所示.

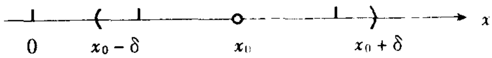


图 1-2

例如：

$|x-5|<\frac{1}{2}$表示以点 $x_0=5$ 为中心，$\frac{1}{2}$为半径的邻域，即开区间(4.5,5.5).

$0<|x-1|<2$ 表示以点 $x_0=1$ 为中心，2 为半径的空心邻域，即$(-1,1)\cup(1,3)$.

## 1.2 函　　数

数学是一门研究数量关系与空间形式的科学，函数关系在现实生活中无处不在. 它不仅描述科学技术中的一些变量关系，如两个数之间的“大于”、“小于”、“等于”、“集合与集合的包含”等等，而且也能反映生活盅的一些变量关系，如人与人之间的关系(像“父子”关系)，在经济领域中的“成本与价格”关系、“本金与利息”关系等等.

### 1.2.1 函数定义

函数关系是满足一定条件的一种关系，如在中学学过的下列函数：

(1) $y=x^{\alpha}$，$\alpha$ 为实数　(幂函数)

(2) $y=a^{x}$，$a>0$，$a\neq1$　(指数函数)

(3) $y=\log_a x$ 或 $y=\ln x$，$a>0$，$a\neq1$　(对数函数)

(4) $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ (三角函数)

(5) $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ （反三角函数）

以上这五类函数统称为基本初等函数.

当然函数关系不仅限于以上这些,下面用集合的语言给出一般函数关系的定义.

**定义 1** $D$ 是一个非空实数集合,设有一个对应规则 $f$, $\forall x \in D$ 都有一个确定的实数 $y$ 与之对应,则称这个对应规则 $f$ 为定义在 $D$ 上的一个函数关系,或称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数,记为

$$y=f(x), x \in D$$

集合 $D$ 叫做这个函数的定义域, $x$ 叫做自变量, $y$ 叫做因变量.

当 $x$ 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 $x_0$ 对应的 $y$ 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的函数值,记作 $y_0, f(x_0)$,或 $y|_{x=x_0}$;当 $x$ 取遍 $D$ 的各个数值时,对应的全体函数值的集合:

$$\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中的对应规则也可改用其他字母,例如 $\phi, h, F, g$ 等,这时函数可记作

$$y=\phi(x), \ y=h(x), \ y=F(x), \ y=g(x)$$

在实际问题当中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 而在数学当中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象认为:函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切数值. 如函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

的定义域是开区间 $(-1,1)$.

**例 1** 确定函数

$$y=\frac{1}{\lg(3x-2)}$$

的定义域.

【解】 当 $3x-2>0$ 且 $3x-2\neq 1$ 时,即 $x>\frac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$ 时,$\frac{1}{\lg(3x-2)}$才有意义. 因此

$$y=\frac{1}{\lg(3x-2)}$$

的定义域为集合$\left(\frac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$.

**例 2** 确定函数

$$y=\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$$

的定义域.

【解】 $\left|\frac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $x^2<25$,得

$$|x-1|\leqslant 5 \text{ 且 } |x|<5$$

即

$$-4\leqslant x\leqslant 6 \text{ 且 } -5<x<5$$

因此有 $-4\leqslant x<5$. 于是,给定函数的定义域为集合$[-4,5)$.

### 1.2.2 单值函数与多值函数

**定义 2** 如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总有一个,这种函数叫做单值函数;否则叫做多值函数.

**【注意】** 以后凡是没有特别说明的函数都是指单值函数.

例如,$y=\pm\sqrt{25-x^2}$,$\forall x\in[-5,5]$都有两个 $y$ 值与之对应,所以该函数为多值函数. 对于该多值函数,可以把它分成两个单值函数$y=\sqrt{25-x^2}$,$y=-\sqrt{25-x^2}$. 如图 1-3.

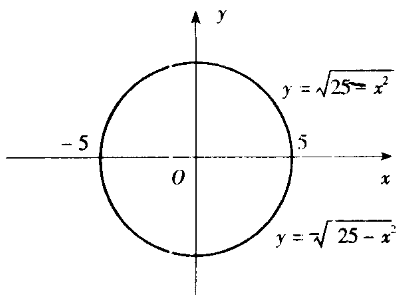


图 1-3

### 1.2.3 初等函数

**1. 复合函数**

若 $y=10^u$,变量 $u$ 又是 $x$ 的函数 $u=\sin x$,则用代入法将 $u=\sin x$ 代入 $y=10^u$ 中,可得变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数 $y=10^{\sin x}$.

**定义 3** 已知 $y$ 是 $u$ 的函数,$y=f(u)$,而且 $u$ 又是 $x$ 的函数 $u=\varphi(x)$,当 $x$ 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域内取值时(或部分值),由 $u=\varphi(x)$ 得到函数值 $u$ 均落入函数 $y=f(u)$ 的定义域内,则称 $y$ 是 $x$ 的复合函数. 记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

该函数由 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 复合而成. 其中 $x$ 叫做自变量,$u$ 叫做中间变量,函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是使 $u=\varphi(x)$ 的函数值落入 $y=f(u)$ 的定义域中的 $x$ 取值的全部.

**例 3** 如果 $y=\ln u$,$u=2+v^2$,$v=\sin x$,将 $y$ 表示为 $x$ 的函数.

**【解】** 用代入法可得:

$$y=\ln(2+v^2)=\ln(2+\sin^2 x)$$

**例 4** 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的:

(1) $y=\sin^2 x$; (2) $y=\cos(3x+1)$;

(3) $y=\lg(x\sin x+2)$; (4) $y=\lg\cos x^2$.

**【解】**

(1) 因为 $y=\sin^2 x=(\sin x)^2$,所以 $\sin^2 x$ 是由

$$y=u^2, u=\sin x$$

复合而成.

(2) $y=\cos(3x+1)$是由

$$y=\cos u, u=3x+1$$

复合而成.

(3) $y=\lg(x\sin x+2)$是由

$$y=\lg u, u=x\sin x+2$$

复合而成. 其中 $u=x\sin x+2$ 是由基本初等函数 $x$,$\sin x$ 和 2 经四则运算而成的函数,是简单函数而不是复合函数,复合函数的中间变量有的可能不止一个,可能有两个、三个甚至更多.

(4) $y=\lg\cos x^2$ 是由

$$y=\lg u, u=\cos v, v=x^2$$

复合而成.

**【注意】**

(1) 一般地,$f[g(x)]\neq g[f(x)]$.

例如,设 $f(x)=2x^3+1$,$g(x)=x^2$,则

$$f[g(x)]=f(x^2)=2(x^2)^3+1=2x^6+1$$

$$g[f(x)]=g(2x^3+1)=(2x^3+1)^2$$

$$=4x^6+4x^3+1$$

(2) 并不是任意两个函数都可复合成为函数.

例如,$y=\arcsin u$,$u=x^2+3$. 因为 $u=x^2+3$ 的值域中不曾有值落入 $y=\arcsin u$ 的定义域,所以

$$y=\arcsin(x^2+3)$$

并不是 $x$ 的复合函数.

**例 5** 已知 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=a-x^2$，考察 $a=1$，$a=-1$时，$y=f[\varphi(x)]$是不是复合函数.

**【解】**

(1) $a=1$ 时，$y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$. 此时，$y=\sqrt{u}$ 的定义域为$[0,+\infty)$，$u=1-x^2$ 的值域为$(-\infty,1]$，所以

$$y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}$$

是复合函数.

(2) $a=-1$ 时，$y=\sqrt{u}$，$u=-1-x^2$. 此时，$y=\sqrt{u}$ 的定义域为$[0,+\infty)$，$u=-1-x^2$ 的值域为$(-\infty,-1]$，所以

$$y=f[\varphi(x)]=\sqrt{-1-x^2}$$

不是复合函数.

将一个复合函数分解成几个简单函数的复合，这一点在复合函数求导中非常重要.

**2. 初等函数**

**定义 4** 由基本初等函数(常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)经过有限次四则运算及有限次复合而成的函数，叫做初等函数.

例如，有理分式函数

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$f(x)=\lg^3\arctan 2^{\sqrt{x}}+\sin 3x$$

$$f(x)=\ln\sin 3x-e^{\arctan\sqrt{x}}$$

等都是初等函数.

### 1.2.4 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 $x$ 不同的值，不能用一个

统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数.

例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=[0,+\infty)$，当 $x\in[0,1]$时，对应函数值为 $f(x)=2\sqrt{x}$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)=1+x$. 此函数的图形如图 1-4 所示.

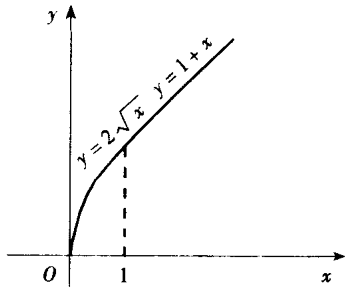


图 1-4

用几个式子来表示一个函数，不仅与函数定义不矛盾，而且有现实意义. 例如：

(1) $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 其图形如图 1-5 所示.

(2) $y=\begin{cases}x+1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ x-1, & x>0,\end{cases}$ 其图形如图 1-6 所示.

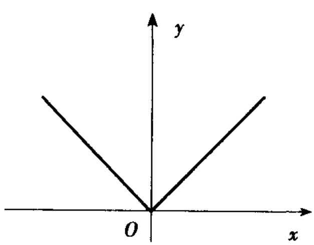


图 1-5

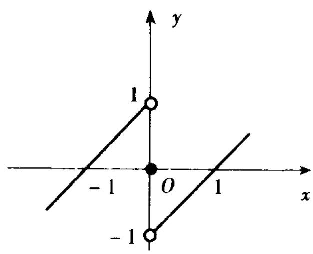


图 1-6

**例 6** 用分段函数表示函数 $y=3-|x-1|$，并画出它的图形.