名师导学系列丛书 MSDX

依据国家教育部 2002年《考试说明》学科标准 编写

CHAOYUE KETANG

中国教育电视台 CETV-1 黄金时间配套讲解

高考数学

总策划／刘　强（美澳国际学校校长）
总主编／王后雄（湖北黄冈特级教师）

超越课堂

点例练三环紧扣　课堂学习大超越

3+x 高考总复习

- 最新大纲　突出教改方向
- 名家撰写　传播高考信息
- 精品荟萃　紧扣时代脉搏
- 全新概念　超越平凡课堂

北京教育出版社　九州出版社

新世纪同步学典 TBXD

CHAOYUE KETANG

总策划／刘　强（美澳国际学校校长）

总主编／王后雄（湖北黄冈特级教师）

高考 数学

超越课堂

3＋x 高考总复习

本册主编：郑晓玲　马春华

本册编者：余国清　汪海涛　王国庆　樊炎生　余汉涛　丁仁贵　卢自学　秦红安　周建国

北京教育出版社　九州出版社

超越课堂·3+X高考数学总复习

郑晓玲　马春华　主编

*

北京教育出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

北京出版社出版集团总发行

新 华 书 店 经 销

德州文源印刷有限公司印刷

*

880×1230　16开本　16印张　490000字

1999年8月第1版　2002年7月第2版第1次印刷

ISBN 7-5303-0822-X

G·793　定价:19.50元

地址:北京市西三环北路27号北科大厦北楼四层　邮编:100089

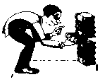
北京英澳学苑教育考试研究中心　电话:010-68434992

前言

点例练三环紧扣
课堂学习大超越

人类已经进入到21世纪，如何培养新世纪的优秀人才，如何全面依据实验教材的内容，充分融汇试验教材的改革思想和精神，如何使丛书体例符合学生课堂学习的接受心理和认知规律，形式上便于学生阅读、理解和迁移，这是摆在广大教师和学生家长面前的一个重大课题。《超越课堂》丛书即是顺应这个素质备考时代的产物。

本丛书以人教社最新教材（高中必修加选修）为蓝本，依据最新《考试说明》及高考考向编写，旨在透彻整理学考要点及解题依据，实例点拨应考技巧，轻松提高应考技能，使学生花费最少的时间和精力轻松学习、从容应考。本丛书系一套真正让学生易学、好懂、会用的梦寐以求的新概念教辅书。



丛书特点

1、按节或课同步展开，围绕学习、考试中易出现的种种问题编写，应考立竿见影。
2、能立即了解教科书的要点，考点指要突出每节（课）的知识点，注重学习方法，培养创新能力，帮助学生掌握解题依据或答题要点。
3、讲、例、练三案合一，相互对照，套餐式学习新概念。

考点指要	点击名题	拓展迁移
归纳、整理知识点，讲解方法、注重能力，形成解题依据和答案要点。	思路点拨与考点摘要一一对应，一讲一例，点例对应，清晰明了。	同类题同步训练，题目新、活，体现能力与素质，题目少而精。
对预习、考试最有用，最需掌握的得分指要。	解题依据切中考点指要，随文解题，强化理解，提高学习效率。	与讲例对照，训练配合学习，有助于解题，提高应考能力。

4、 全方位备考，章（单元）末附一套能力检测题，基本题、提高题、发展题按6:3:1的比例编排，优等生通过努力可得满分，中等人可得70~80分，后进生可得50~70分。试卷整体难度控制合理，题目新颖，富有时代特色（与时事、生产、生活、科技、环境等相联系）。

名师典范

参与本丛书编写的作者均系黄冈、武汉教学第一线上有声望、有丰富教学经验的教师。他们有湖北省特级教师、湖北省状元教师，有国家级骨干教师，有享受国务院政府津贴的专家等，从而保证本丛书为真正名师严谨缔造的品牌图书。

效果卓著

本丛书由一批名师编著，体例突破以往教辅书讲、例、练三案脱离的模式，教、学、练、测相互点击，形成功能齐备的学考体系。这一切无疑确保了本丛书的权威性、实用性和高效性。

学考选《超越》，梦想志必得！

《超越课堂》编委会

2002年7月

第一章　幂函数、指数函数、对数函数

第1讲　集　合

高考大纲目标　　本讲重点·难点·考点

考试说明

1. 理解集合的有关概念，了解空集、全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义．
2. 理解并掌握集合交、并、补的运算法则，能够运用集合语言和集合思想解决有关问题．

轻松学考　⇨　知识&方法·名题伴读·轻松做题

集合的有关概念

❶一组确定对象的全体形成一个集合，它具有三大特性：确定性、互异性、无顺序性．

❷元素与集合之间是属于关系，用$\in$或$\notin$表示；集合与集合之间是包含关系，用$\subsetneqq$，$\subseteq$表示．

❸若$x\in A$　$x\in B$，则$A\subseteq B$，且$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$．

若$A\subseteq B$，且存在$x_0\in B$但$x_0\notin A$，则$A\subsetneqq B$　若$A\neq\varnothing$，$\varnothing\subsetneqq A$．若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则$A=B$．

考点指要　点击名题　拓展迁移 ➡ 6

考例　已知集合$M=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$N=\{0,|x|,y\}$，并且$M=N$，求：$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+(x^3+\frac{1}{y^3})+\cdots+(x^{2002}+\frac{1}{y^{2002}})$的值．

点拨　本题依据集合相等的概念，由$M=N$知它们的元素分别对应相等，故集合M中一定有一个元素为0，若x、y有之一为0，则$\lg(xy)$无意义，因而只能是$\lg(xy)=0$，所以$xy=1$；再分别研究x、y之值，然后求原式的值．

因为$M=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$N=\{0,|x|,y\}$，且$M=N$，

所以$\lg(xy)=0$（因为当x，y之一为0时，$\lg(xy)$无意义），即$xy=1$．再由集合N知$|x|=1$或$y=1$．

当$y=1$，则由$xy=1$得$x=1$，于是N中的元素有相同的元素，由元素的互异性知，$y=1$不可能，所以只能$|x|=1$且只能取$x=-1$（请读者考虑为什么?），此时$y=-1$．由$x=-1$，$y=-1$知$x^{2n}=y^{2n}=1$，$x^{2n-1}=y^{2n-1}=-1(n\in\mathbf{N}_+)$．

所以$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+(x^3+\frac{1}{y^3})+\cdots+(x^{2002}+\frac{1}{y^{2002}})$

$$=[(-1+1)+\underbrace{(1+1)]+[(-1-1)+(1+1)]+\cdots+[(-1}_{100\text{个“}[(-1-1)+(1+1)]\text{”}}-1)+(1+1)]+[(-1)^{2001}+\frac{1}{(-1)^{2001}}]+[(-1)^{2002}+\frac{1}{(-1)^{2002}}]$$

$=0$

集合的表示法

❶列举法：将集合中的元素一一列举出来．

❷描述法：将集合中的元素的共同属性表示出来．

❸有的集合还可用韦恩图表示．

❹常见的数集表示符号如下：

$\mathbf{N}$表示自然数集，$\mathbf{N}_+$表示正整数集，$\mathbf{Z}$表示整数集，$\mathbf{Q}$表示有理数集，$\mathbf{R}$表示实数集，C表示复数集，有时$\mathbf{Q}^+$表示正有理数集，$\mathbf{R}^-$表示负实数集．$\varnothing$表示不含任何元素的集合，叫做空集．

考点指要　点击名题　拓展迁移 ➡ 1,2

考例　已知全集$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\complement_I A\cap\complement_I B=\{1,9\}$，$\complement_I A\cap B=\{4,6,8\}$，求集合$A$、$B$．

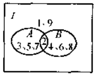


图1－1－1

点拨　用韦恩图（文氏图）将题中给出的数填入相应的位置，3、5、7三数只能填到右图中，$A\cap\complement_I B$处，所以$A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{2,4,6,8\}$

集合之间的包含关系和交、并、补的运算

❶子集：若$x\in A$，则$x\in B$，则$A\subseteq B$，$A\subseteq B$包含：$A=\varnothing$，$A\subsetneqq B$，$A=B$三种情形，对于含有n个元素的集合的子集个数为2^n．

❷交集：$A\cap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$，即由A与B中的公共元素组成的集合．$A\cap B=B\cap A$　$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，若$A\cap B=A$，则$A\subseteq B$．

❸并集：$A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$即由A与B中的所有元素组成的集合．$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$．若$A\cup B=A$，则$B\subseteq A$．

❹补集：设I为全集，$A\subseteq I$，则$\complement_I A=\{x|x\in I$且$x\notin A\}$，即所有全集中$A$以外的元素组成的集合．$A\cup\complement_I A=I$，$A\cap\complement_I A=\varnothing$，$\complement_I(\complement_I A)=A$，$\complement_I I=\varnothing$，$\complement_I(A\cap B)=(\complement_I A)\cup(\complement_I A)\cup(\complement_I B)$、$\complement_I(A\cup B)=(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$．

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 3、4、5、7

考例 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$，且 $A\cup B=A$，则实数 m 组成的集合是____.

点拨 集合 $A=\{2,3\}$，由 $A\cup B=A$，知 $B\subseteq A$. 若 $B=\varnothing$，则 $m=0$；若 $B\neq\varnothing$，则 $m\neq 0$，此时 $x=-\frac{1}{m}$. $\because B\subseteq A$，$\therefore -\frac{1}{m}\in A$，$\therefore(-\frac{1}{m})^2-5(-\frac{1}{m})+6=0$ 得 $m=-\frac{1}{2}$，或 $m=-\frac{1}{3}$，$\therefore m$ 组成的集合是 $\{0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\}$.

考例 集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x|x^2-mx+2=0\}$，已知 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a，m 之值.

点拨 本题应用韦达定理去解.

$\because A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$.

B 中必有元素 1(二次方程系数为 0).

又 $\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$，这时 B 有两种可能：

$B=\{1\}$；$B=\{1,2\}$. 若 $B=\{1\}$，则 B 中的方程有两个相等的根，$\Delta=a^2-4(a-1)=0$，

$\therefore a=2$.

若 $B=\{1,2\}$，则依韦达定理，有 $a-1=2$，$\therefore a=3$.

又 $\because A\cap C=C$，$\therefore C\subseteq A$，因此集合 C 有三种可能：

(1) $C=A$，此时 $m=3$；

(2) $C=\{1\}$，$C=\{2\}$，将 $x=1$，$x=2$ 代入 $x^2-mx+2=0$，得 $m=3$，但此时方程有两个相等的实根，$\Delta=0$，得 $m=\pm 2\sqrt{2}$，此为矛盾；

(3) $C=\varnothing$，$\Delta=m^2-8<0$，$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

综上所求 a 的值为 2，3；所求 m 的值为 3，或为一个范围 $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

利用集合的思想解决集合中的存在性问题

解决存在性问题的解法是首先假设这样的问题存在，从此出发，依据已知条件、已知公理、定理进行推理论证，推出一个较为明显的结论，最后根据这样的结论有无矛盾(与已知、假设、显然成立的事实等)得出问题的结论. 而集合中的存在性问题要将题中的集合关系转化成其他数学关系等，从而培养学生的思维能力和创造能力.

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 8

考例 设 a，b 是两个实数，$A=\{(x,y)|x=n,y=an+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$ 都是平面 xOy 内的点的集合，讨论是否存在 a，b，使得 (1) $A\cap B\neq\varnothing$ 和 (2) $(a,b)\in C$ 同时成立.

点拨 假设存在 a，b，使(1)、(2)同时成立，即存在整数 m、n，使得

$$\begin{cases} n=m, & ① \\ na+b=3m^2+15, & ② \\ a^2+b^2\leqslant 144. & ③ \end{cases}$$

由①、②消去 m，得 $na+b=3n^2+15$，

$b=3n^2-na+15$. 代入③并整理，得

$$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0. \quad ④$$

不等式④左边的二次三项式的判别式的值

$$\Delta=[-2n(3n^2+15)]^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]$$
$$=-36(n^2-3)^2.$$

$\because n\in\mathbf{Z}$，$\therefore n^2-3\neq 0$，$\therefore\Delta<0$

又 $\because 1+n^2>0$，$\therefore$ 不等式④无解.

即不存在实数 a，b，使(1)和(2)同时成立.

应用与创新拓展训练题 ➡ 答案见本书第 192 页

1. 设集合 $A=\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是(　　)

(A)11　(B)10　(C)16　(D)15

(2001·东城)

2. 如图右，I 是全集，M、P、S 是 I 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是(　　)

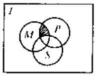


图 1-1-2

(A) $(M\cap P)\cap S$

(B) $(M\cap P)\cup S$

(C) $(M\cap P)\cap S$

(D) $(M\cap P)\cup\overline{S}$　　(1999·全国高考)

3. 已知集合 $M=\{(x,y)|x+y=0,x,y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)|x^2+y^2=0,x,y\in\mathbf{R}\}$，则有(　　)

(A) $M\cup N=M$　　(B) $M\cup N=N$

(C) $M\cap N=M$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

(2002·春)

4. 已知 $\{a,b\}\subsetneqq A\subseteq\{a,b,c,d,e\}$，则 A 的个数为____.

(2001. 黄冈)

5. 已知 $A=\{x|x^2-2x+a\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$，若 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是____.

(2001·山东)

6. 已知 $A=\{a,a+d,a+2d\}$，$B=\{a,aq,aq^2\}$，若 $A=B$，求 q 的值.

(2001·湖南)

7. 已知 $A=\{x|x^3+3x^2+2x>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$ 且 $A\cap B=\{x|0<x\leqslant 2\}$，$A\cup B=\{x|x>-2\}$，求 a、b 的值.

(2001·上海)

8. 设集合 $A=\{(x,y)|y^2-x-1=0\}$，$B=\{(x,y)|4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)|y=kx+b\}$，是否存在 k，b ($k\in\mathbf{N}^*$，$b\in\mathbf{N}^*$)，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，证明你的结论.

(2001·海淀)

第2讲 映射与函数

高考大纲目标 **本讲重点·难点·考点**

考试说明

1. 了解映射的概念,并根据定义判断所给对应是否映射,会求映射中所指定的象或原象.
2. 理解函数的概念,掌握函数的三种表示方法.
3. 理解反函数的概念,掌握求反函数的方法和互为反函数的图象的对称关系.

轻松学考 知识&方法·名题伴读·轻松做题

映射的概念

❶映射的定义:一般地,设 A、B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f:A\to B$.

❷如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射,那么,和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b,叫做 a 的象,a 叫做 b 的原象.

| 考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 1 |

考例 已知映射 $f:A\to B$,其中,集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$,集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象,且对任意的 $a\in A$,在 B 中和它对应的元素是 $|a|$,则集合 B 中元素的个数是(　　)

(A)4　(B)5　(C)6　(D)7

点拨 根据映射的基本概念:"映射允许集合 A 中的不同元素在集合 B 中有相同的象."来解题.

已知映射 $f:A\to B$,在集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$ 中共有7个元素,其中两个不同元素 -3,3 对应 B 中相同的象 $|\pm3|=3$,-2,2 对应 B 中相同的象 $|\pm2|=2$,-1,1 对应 B 中相同的象 $|\pm1|=1$,4 对应 B 中的象 $|4|=4$.故 B 中的元素有4个.

函数的概念

❷函数的现代定义:从非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射 $f:A\to B$,叫做 A 到 B 的函数,记作 $y=f(x)$,其中 $x\in A$,$y\in B$,原象集 A 叫做函数的定义域,象集 C 叫做函数的值域,一般地 $C\subseteq B$.

❶函数的三要素:定义域、值域、对应法则,其中对应法则是核心,当函数的三个要素确定以后,函数随之确定.

| 考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 4 |

考例 判断下列各组函数是否表示同一个函数:

(1)$y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$;(2)$y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$;

(3)$y=\sqrt{x^2}-1$ 与 $y=x-1$;(4)$y=x$ 与 $y=\log_a a^x$($a>0$,且 $a\neq1$);(5)$y=|x|$ 与 $y=\begin{cases}x & x\in(0,+\infty),\\ -x & x\in(-\infty,0);\end{cases}$

(6)$y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=1-|x|$,$x\in[-1,1]$.

点拨 判断两个函数是否相同,先观察定义域是否一致,若定义域一致,再看对应法则是否一致,由此即可判断.

(1)$y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域是 $\{x|x\neq1,x\in\mathbf{R}\}$,而 $y=x+1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,两函数定义域不同,∴不是同一函数.

(2)$y=\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,而 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,∴两函数不是同一函数.

(3)$y=\sqrt{x^2}-1=\begin{cases}x-1 & (x\geqslant0)\\ -x-1 & (x<0)\end{cases}$ 与 $y=x-1$ 的对应法则不同,∴两函数不是同一函数.

(4)∵$y=\log_a a^x=x$($a>0$,且 $a\neq1$)的定义域与对应法则与 $y=x$ 都相同,∴两函数表示同一函数.

(5)∵$y=|x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,而 $y=\begin{cases}x & (x\in(0,+\infty))\\ -x & (x\in(-\infty,0))\end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,两函数的定义域不同,∴两函数不是同一函数.

(6)$y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=1-|x|$ $x\in[-1,1]$,虽然两函数的定义域与值域都相同,但两者的对应法则不相同,这一点也可以从函数图象上来看:前者为半个圆,后者为两条线段,所以两函数不是同一函数.

函数的表示法

❶函数的表示法有三种:列表法、图象法、解析法.

❷分段函数:当函数用解析法表示时,函数的解析式不一定是由一个式子给出的,它是有两个或两个以上的数学式子给出.分段函数的定义域为它在各段上定义域的并集.对应法则各段各异.分段函数是一个整体.

❸复合函数:复合函数是由简单函数复合而得到的函数.若 $y=f(u)$,$u=g(x)$,则 $y=f[g(x)]$就是由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$的复合函数

| 考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 2、3、8 |

考例 已知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & (-1\leqslant x\leqslant1)\\ |x| & (x<-1)\\ 1, & (x>1)\end{cases}$

求:(1)$f\{f[f(-\pi)]\}$;(2)$f[f(x)]$.

点拨 分段函数的求值,要注意内层函数的值域落在外层函数定义域的哪一段内,需选作相应的表达方式进行计算.

(1)因为 $-\pi<-1$,

所以 $f(-\pi)=|-\pi|=\pi$

因为 $\pi>1$,所以 $f(\pi)=1$

因为 $|1|\leq 1$,所以 $f(1)=\sqrt{1-1^2}=0$.

所以 $f\{f[f(-\pi)]\}=0$;

(2)当 $x>1$ 时,$f(x)=1$,而 $1\in[-1,1]$

故 $f[f(x)]=f(1)=\sqrt{1-1^2}=0$;

当 $|x|\leq 1$ 时,因为 $f(x)=\sqrt{1-x^2}\in[0,1]$

所以 $f[f(x)]=\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}=|x|$

当 $x<-1$ 时,因为 $f(x)=|x|>1$

故 $f[f(x)]=1$.

反函数

❶反函数的定义:一般地,式子 $y=f(x)$ 表示 y 是自变量 x 的函数,设它的定义域为 A,值域为 C,我们从式子 $y=f(x)$ 中解出 x,得到式子 $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数,这样的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,即 $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$.

对调函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x、y,把它改写成 $y=f^{-1}(x)$.

❷求反函数的步骤

①求函数 $y=f(x)$ 的值域;

②由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$;

③在 $x=f^{-1}(y)$ 中,将 x、y 互换得到 $y=f^{-1}(x)$;

④标明反函数的定义域,即①中求出的值域.

❸函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象,在同一坐标系内关于直线 $y=x$ 对称.

函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图象相同.

函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,则它的反函数是它本身.

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 5,6,7

考例 求下列函数的反函数:

(1) $y=-\sqrt{x-1}\quad(x\geq 1)$;

(2) $y=\log_2(1-x)\quad(x\geq 0)$.

(3) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (0\leq x\leq 1)\\ x^2 & (-1\leq x<0).\end{cases}$

点拨 (1)由 $y=-\sqrt{x-1}$,得 $y^2=x-1$,所以 $x=y^2+1$,因为 $x\geq 1$,所以 $y\leq 0$.

于是有 $x=y^2+1(y\leq 0)$.

所以 $y=-\sqrt{x-1}(x\geq 1)$ 的反函数是

$y=x^2+1(x\leq 0)$.

(2)由 $y=\log_2(1-x)$,得 $x=1-2^y$.

由于 $y=\log_2(1-x)(x\geq 0)$ 的定义域是 $[0,1]$,所以它的值域是 $(-\infty,0]$,于是 $x=1-2^y(y\leq 0)$.

所以 $y=\log_2(1-x)(x\geq 0)$ 的反函数是

$y=1-2^x(x\leq 0)$.

(3)当 $0\leq x\leq 1$ 时,有 $-1\leq x^2-1\leq 0$,即 $-1\leq y\leq 0$. 由 $y=x^2-1(0\leq x\leq 1)$,

解得 $x=\sqrt{y+1}(-1\leq y\leq 0)$,$\therefore f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}(-1\leq x\leq 0)$.

当 $-1\leq x<0$ 时,$0<x^2\leq 1$,即 $0<y\leq 1$,由 $y=x^2(-1\leq x<0)$ 得 $x=-\sqrt{y}(0<y\leq 1)$,

$\therefore f^{-1}(x)=-\sqrt{x}(0<x\leq 1)$.

于是所求反函数为 $y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (-1\leq x\leq 0),\\ -\sqrt{x} & (0<x\leq 1).\end{cases}$

考例 设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leq x\leq 0)$,则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是(　　)

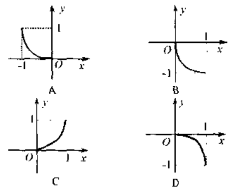


图 1-2-1

点拨 由 $y=1-\sqrt{1-x^2}$,得

$1-x^2=(1-y)^2$,即 $x^2=1-(y-1)^2$.①

因为 $-1\leq x\leq 0$,

所以 $f(x)$ 的值域是 $[0,1]$,

因此,由①可知,

$f^{-1}(x)=-\sqrt{1-(x-1)^2}(0\leq x\leq 1)$.

设 $y=-\sqrt{1-(x-1)^2}(0\leq x\leq 1)$,则

$(x-1)^2+y^2=1(0\leq x\leq 1,y\leq 0)$.

它的图象是以 $(1,0)$ 为圆心,以 1 为半径的圆的一部分,即 B 中的图象,因此选 B.

应用与创新拓展训练题 ➡ 答案见本书第 192 页

1. 设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 映射成集合 B 中的元素 $(x+y,x-y)$,则在映射 f 下,象 $(2,1)$ 的原象是(　　)

(A)$(3,1)$　　(B)$(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

(C)$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$　　(D)$(1,3)$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x(x>0),\\ 3^x(x\leq 0),\end{cases}$ 则 $f[f(\frac{1}{4})]$ 的值是(　　)

(A)9　　(B)$\frac{1}{9}$

(C)-9　　(D)$-\frac{1}{9}$

3. 如图 1-2-2 所示,四边形 $OABC$ 是正方形,在直线 $l:y=x+t$ 下方的面积为 S(图中阴影部分),当直线 l 由下而上匀速移动时,面积 S 关于 t 的函数图象是图 1-2-3 的(　　)

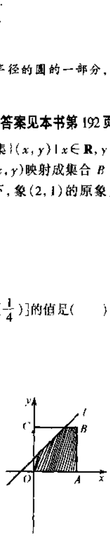


图 1-2-2

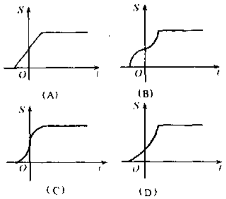


图 1－2－3

4. 已知函数 $y=f(x)$的图象经过 $A(0,2)$、$B(1,3)$、$C(2,5)$三个点,试写出满足上述条件的在定义域$[0,2]$上的两个函数关系是________.($f(x)$必须用一个代数式来表示)

5. 已知$f(x)=2^x+b$的反函数为$f^{-1}(x)$,若 $y=f^{-1}(x)$的图象经过点 $Q(5,2)$,则 $b=$________.

6. 求下列函数的反函数

(1)$f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}(x>1)$.

(2)$f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}(a>0,a\neq 1)$

7. 已知$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+a}(x\neq -a,a\neq\dfrac{1}{2})$.

(1)求 $f(x)$的反函数;

(2)若 $f(x)=f^{-1}(x)$,求 a 的值;

(3)如何作出满足(2)中条件的 $y=f^{-1}(x)$的图象.

8. 设函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$的图象为 C_1, C_1 关于点$(2,1)$对称的图象为 C_2, C_2 对应的函数为 $g(x)$.

(1)求 $g(x)$的解析式表达式;

(2)解不等式 $\log_a g(x)<\log_a\dfrac{9}{2}(a>0$,且 $a\neq 1)$.

第3讲 函数的解析式和定义域

高考大纲目标 本讲重点·难点·考点

考试说明

1. 理解函数的概念,能根据函数所具有的某些性质或它所满足的一些关系,求出它的解析式,并掌握解析式的一些形式变换.
2. 理解函数的定义域,掌握函数定义域的求法和复合函数的定义域.

知识&方法·名题伴读·轻松做题

❶函数解析式

●如果一个函数能用一个数学式子表示出来,那么这个数学式子叫做函数的解析式.

●确定函数的解析式的原则:①求出函数的对应法则;②在对应法则的后面标注函数的定义域.

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 7

考例 如图 1－3－1,△OAB 是边长为2的正三角形,直线 $x=t$ 截这个三角形所得的位于此直线左方的图形的面积为y,求函数 $y=f(t)$的解析式,并求出其定义域和值域.

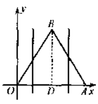


图 1－3－1

点拨 如图,$|OA|=|OB|=|AB|=2$,边 OA 的中点 D 的坐标为$(1,0)$.

当$0<t\leq 1$时,所截图形是一个直角三角形,其面积 $y=\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot t\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2$;

当$1<t<2$时,所截图形是一个四边形,它的面积可由正三角形的面积减去一个直角三角形的面积来计算,即此时 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2-\dfrac{1}{2}(2-t)\cdot(2-t)\tan 60^\circ=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2-t)^2$.

于是,$y=f(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2 & (0<t\leq 1)\\ \sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2-t)^2 & (1<t<2)\end{cases}$

此函数的定义域为$(0,2)$,值域为$(0,\sqrt{3})$.

❷求函数的解析式

●已知$f[g(x)]$的解析式,求 $f(x)$的解析式,一般有两种方法:换元法、凑配法.

●已知函数 $f(x)$的类型,求 $f(x)$的解析式,一般利用待定系数法.

●已知 $f(x)$与 $f(-x)$或 $f(x)$与 $f(\dfrac{1}{x})$之间的关系式求 $f(x)$的解析式,一般用消元法.

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 4,6

考例 (1)已知$f(x)$是定义在 **R** 上的函数,$f(1+\dfrac{1}{x})=\dfrac{x}{1-x^2}$,求 $f(x)$;

(2)已知 $f(x)$是一次函数,且 $f[f(x)]=4x-1$,求 $f(x)$的解析式;

(3)$2f(x)-f(-x)=\lg(x+1)$,求 $f(x)$的解析式.

点拨 (1)令 $1+\frac{1}{x}=t$，∵在 $f(1+\frac{1}{x})=\frac{x}{1-x^2}$ 中，$x\neq0,x\neq\pm1$，∴ $t\neq1,2,0$. ∴由 $1+\frac{1}{x}=t$ 可得 $x=\frac{1}{t-1}$，于是

$$f(t)=\frac{x}{1-x^2}=\frac{\frac{1}{t-1}}{1-(\frac{1}{t-1})^2}=\frac{t-1}{t^2-2t}(t\neq0,1,2).$$

即 $f(x)$ 的解析式

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x}(x\neq0,1,2).$$

(2)设 $f(x)=kx+b(k\neq0)$，则 $k(kx+b)+b=4x-1$，即有

$\begin{cases}k^2=4,\\(k+1)b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=-\frac{1}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-2,\\b=1.\end{cases}$

∴ $f(x)=2x-\frac{1}{3}$，或 $f(x)=-2x+1$.

(3) $f(-x)$ 化为 $f(x)$，于是有：

$2f(x)-f(-x)=\lg(x+1)$，①

$2f(-x)-f(x)=\lg(-x+1)$，②

由①、②消去 $f(-x)$，得

$f(x)=\frac{2}{3}\lg(x+1)+\frac{1}{3}\lg(1-x),-1<x<1.$

求函数的定义域

❶根据函数的解析式求定义域时，一般如果解析式是多项式，那么定义域为 R；如解析式是分式，则定义域是使分母不为零的一切实数；如解析式是根式，则应取使根式有意义的 x；而对数函数则必须真数大于零，底数大于零且不等于1.

❷如果函数是由一些基本函数通过四则运算结合而成的，那么它的定义域是各基本函数定义域的交集.

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 2

考例 求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{|x+1|-2}$

(2) $y=\log_{(2x+1)}(32-4^x)+\arcsin2x$.

点拨 (1)要使函数有意义，必须使

$\begin{cases}x^2-3x-4\geq0,\\|x+1|-2\neq0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}(x+1)(x-4)\geq0,\\x-1\neq0\\x+3\neq0.\end{cases}$

解得 $x\leq-1,x\neq-3$，或 $x\geq4$.

∴函数的定义域是 $\{x|x\leq-1,x\neq-3$，或 $x\geq4\}$.

(2)要使函数有意义，等价于 $\begin{cases}32-4^x>0,\\2x+1>0,\\2x+1\neq1,\\-1\leq2x\leq1.\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x<\frac{5}{2},\\x>-\frac{1}{2},\\x\neq0\\-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}.\end{cases}$ 解得：$-\frac{1}{2}<x\leq\frac{1}{2}$ 且 $x\neq0$.

∴函数的定义域是 $\{x|-\frac{1}{2}<x\leq\frac{1}{2}$ 且 $x\neq0\}$

求与复合函数有关的定义域问题

❶复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域是先由 $y=f(u)$ 成立的条件确定 u 的取值范围，再由 u 的取值范围来确定 $u=g(x)$ 中 x 的范围，即为 $y=f[g(x)]$ 的定义域.

❶已知 $y=f[g(x)]$ 的定义域，求 $y=f(x)$ 的定义域，即为 $u=g(x)$ 的值域.

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 1,3

考例 函数 $y=f(x+1)$ 的定义域是 $[-2,3]$，则 $y=f(2x-1)$ 的定义域是(　　)

(A) $[0,\frac{5}{2}]$　　(B) $[-1,4]$

(C) $[-5,5]$　　(D) $[-3,7]$

点拨 ∵ $f(x+1)$ 的定义域是 $[-2,3]$，∴ $-2\leq x\leq3$，

∴ $-1\leq x+1\leq4$，∴ $f(x)$ 的定义域是 $[-1,4]$.

再由 $-1\leq2x-1\leq4$，得 $0\leq x\leq\frac{5}{2}$.

∴ $f(2x-1)$ 的定义域是 $[0,\frac{5}{2}]$. 故本题应选A.

利用分类讨论的思想求含参数函数的定义域

对于求含有字母的函数的定义域，或已知其定义域，求参数的取值范围，必须对字母的取值情况进行分类讨论.

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 5,8

考例 求函数 $f(x)=\lg(a^x-k\cdot2^x)(a>0$，且 $a\neq1,k\in\mathbf{R}$ 的定义域.

点拨 ∵ $a^x-k\cdot2^x>0$ 即 $(\frac{a}{2})^x>k$.

(1)当 $k\leq0$ 时，∵ $a>0$ 且 $a\neq1$，不论 x 取何实数，总有 $(\frac{a}{2})^x>0$，故 $(\frac{a}{2})^x>k$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，这时函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2)当 $k>0$ 时，

①若 $\frac{a}{2}>1$，即 $a>2$，则 $x>\log_{\frac{a}{2}}k$；这时函数的定义域为 $(\log_{\frac{a}{2}}k,+\infty)$；

②若 $0<\frac{a}{2}<1$，即 $0<a<2$ 且 $a\neq1$，则 $x<\log_{\frac{a}{2}}k$ 这时函数的定义域为 $(-\infty,\log_{\frac{a}{2}}k)$；

③若 $\frac{a}{2}=1$，即 $a=2$，则当 $0<k<1$ 时，这时函数的定义域为 $\mathbf{R}$；$k\geq1$ 时，使函数有意义的 x 不存在，这时函数不存在.

应用与创新拓展训练题 ➡ 答案见本书第192页

1. 若 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-2,4]$，则函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 的定义域是(　　)

(A) $[-1,3]$　　(B) $[-3,1]$

(C) $[-2,2]$　　(D) $[-1,1]$

2. 函数 $y=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是(　　)

(A) $\{-1,1\}$　　(B) $[-2,2]$

(C) $[-1,1]$　　(D) $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$，则函数 $f(x^2-1)$ 的定义域为(　　)

(A) $[-1,\sqrt{3}]$　　(B) $[0,\sqrt{3}]$

(C)$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　(D)$[-4,4]$

4. $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}(x>0)$则 $f(x)=$ ______.

5. 已知函数 $f(x)=\log_a(-x^2+\log_{2a}x)$的定义域是$(0,\frac{1}{2})$,则实数 a 的取值范围是______.

6. (1)已知$f(x)$是二次函数,且$f(0)=0$,$f(x+1)=f(x)+x+1$,求$f(x)$;

(2)若$f(x)$满足关系式$f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x$,求$f(x)$.

7. 已知等腰梯形 $ABCD$ 的下底$AB=10$,上底 $CD=4$,两腰 $AD=BC=5$,动点 P 在梯形各边上运动,由 B 经 C、D 至 A.求$\triangle APB$ 的面积S随P点所行路程x的变化而变化的函数关系式.

8. 求函数 $y=\log_a(a^x-1)(a>0,a\neq1)$的定义域.

第4讲　函数的值域

高考大纲目标　　**本讲重点·难点·考点**

THINK

考试说明

1. 理解函数的概念,掌握求值域常用的几种方法:配方法、判别式法、换元法,反函数法、不等式法.

2. 会利用函数的单调性和有界性,数形结合等方法求值域.

轻松学考　知识&方法·名题伴读·轻松做题

配方法和换元法

❶配方法:对于形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$或求二次复合的函数的值域可用配方法.

❷换元法:对于形如 $y=ax+b+\sqrt{cx+d}$的函数令 $t=\sqrt{cx+d}$,$x=\frac{t^2-d}{c}$且$t\geq0$,使之变形为二次函数,利用再配方,对于含$\sqrt{a^2-x^2}$的结构的函数,可利用三角代换,令 $x=a\cos\theta$,$\theta\in[0,\pi]$,或令 $x=a\sin\theta$,$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

考点指要　点击名题　拓展迁移 ➡ 1,6

考例 求下列函数的值域:

(1)$y=\frac{1}{x^2-2x-1}$　(2)$y=x-\sqrt{1-2x}$

(3)$y=x+\sqrt{1-x^2}$

点拨 (1)(换元法)设 $t=x^2-2x-1$,则

$y=\frac{1}{x^2-2x-1}$化为 $y=\frac{1}{t}(t\neq0)$.

$\because t=x^2-2x-1=(x-1)^2-2\geq-2$,(配方).

$\therefore y=\frac{1}{t}(t\geq-2$,且 $t\neq0)$,

$\therefore y\leq-\frac{1}{2}$,或 $y>0$.

$\therefore$原来的函数的值域是$\{y|y\leq-\frac{1}{2}$,或 $y>0\}$

(2)令$\sqrt{1-2x}=t$,则 $t\geq0$,$x=\frac{1-t^2}{2}$.

$\therefore y=\frac{1}{2}(1-t^2)-t=-\frac{1}{2}(t+1)^2+1(t\geq0)$

由二次函数的性质知,$t\geq0$时,二次函数为减函数,当 $t=0$时,$y=\frac{1}{2}$　$\therefore y\leq\frac{1}{2}$,即值域为$(-\infty,\frac{1}{2}]$

(3)函数的定义域是$\{x|-1\leq x\leq1\}$.

设 $x=\sin t$,$-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$,

则　$y=x+\sqrt{1-x^2}$化为　$y=\sin t+\cos t$,

$y=\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$.

$\because-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$,$\therefore-\frac{\pi}{4}\leq t+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{4}$,

$\therefore-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\sin(t+\frac{\pi}{4})\leq1$,$\therefore-1\leq y\leq\sqrt{2}$.

$\therefore$原来的函数的值域是$[-1,\sqrt{2}]$.

反函数法及判别式法

❶反函数法:反函数的定义域即为原函数的值域,形如 $y=\frac{cx+d}{ax+b}(a\neq0)$的函数值域可用此法.

❷判别式法:把函数转化成关于 x 的二次方程 $F(x,y)=0$,通过方程有实根,判别式 $\Delta\geq0$,从而求得原函数的值域.形如 $y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$($a_1$、$a_2$ 不同时为0的函数的值域常用此法求得).

考点指要　点击名题　拓展迁移 ➡ 2

考例 求下列函数的值域:

(1)$y=\frac{1-x}{2x+5}$;(2)$y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

点拨 (1)解法1　(逆求法)由 $y=\frac{1-x}{2x+5}$解出 x,

得 $x=\frac{1-5y}{2y+1}$.$\because 2y+1\neq0$.

$\therefore$函数的值域为$\{y|y\neq-\frac{1}{2}$,且 $y\in\mathbf{R}.\}$

解法2(分离常数法)$\because y=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{2}}{2x+5}$,$\frac{\frac{7}{2}}{2x+5}\neq0$,

$\therefore y\neq -\dfrac{1}{2}$.

(2) ∵分式函数的分子 x^2+x+1 是 x 的二次式，可以将函数式化为 x 的二次方程，∴由 $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$，解 $x^2+(1-y)x+(1-y)=0$，∵ $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq -1$，

∴ $\Delta=(1-y)^2-4(1-y)\geq 0$，∴ $y\leq -3$，或 $y\geq 1$，故函数的值域为 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

不等式法和函数的单调性

❶不等式法：利用基本不等式：$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$.（a、b、$c\in\mathbf{R}^+$）用此法求函数值域时，要注意条件"一正二定三相等".

❷函数的单调性法：确定函数在定义域（或某个定义域的子集上）的单调性质求出函数的值域，当利用不等式法等号不能成立时，可考虑用函数的单调性.

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 3

考例 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；(2) $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$.

点拨 (1) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}=\dfrac{1}{2^x+\frac{1}{2^x}}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}}}=\dfrac{1}{2}$

又 $y>0$. ∴ $0<y\leq\dfrac{1}{2}$

∴函数的值域为 $(0,\dfrac{1}{2}]$

(2) $y=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 令 $t=\sqrt{x^2+4}\geq 2$，故不能使用不等式，但是 $y=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $t\geq 1$ 时为增函数

∴ $y\geq 2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$.

∴函数的值域为 $[\dfrac{5}{2},+\infty)$

利用数形结合法求函数的值域

利用函数所表示的几何意义，如分式形式（$\dfrac{a-b}{c-d}$）联想斜率，平方和联想距离等，借助于几何方法来求函数的值域.

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 5

考例 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$；

(2) $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+2x+10}$.

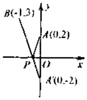


图 1-4-1

点拨 (1)（数形结合法）$y=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}=-\dfrac{\sin x-0}{\cos x-2}$ 可看作是点 $A(2,0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 上的点 $P(\cos x,\sin x)$ 连接斜率的相反数，结合图象得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leq y\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

∴函数的值域为 $[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$

(2)（几何法）

$y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+2x+10}$

可化为：$y=\sqrt{(x-0)^2+(0-2)^2}+\sqrt{[x-(-1)]^2+(0-3)^2}$，表示直角坐标平面内 x 轴上的点 $P(x,0)$ 到两定点 $A(0,2)$、$B(-1,3)$ 的距离之和，如图 1-4-1，有 $y\geq|A'B|$

$=\sqrt{(-1-0)^2+[3-(-2)]^2}=\sqrt{26}$

∴ $y\in[\sqrt{26},+\infty)$.

一类有关函数值域的逆向问题

已知函数的值域，求函数的其他问题，这是关于值域的逆向思维问题，它利用等价转换的思想转化为函数的其他问题，如已知函数 $y=\lg(ax^2+x+1)$ 的值域为 R，即转换为 $\mu=ax^2+x+1(a>0)$ 这个二次函数至少与 x 轴有一个交点，即 $\begin{cases}a>0\\\Delta\geq 0\end{cases}$

考点指要 | 点击名题 | 拓展迁移 ➡ 4,7,8

考例 已知函数 $f(x)=\log_3\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,2]$，求 m、n 的值.

点拨 这是一道关于函数定义域和值域的逆向问题，从何入手？我们可注意力放在对数的真数上. 显然，函数 $u=\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域由题设知应为 $[1,9]$.

由 $u=\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$，得 $(u-m)x^2-8x+(u-n)=0$.

∵ $x\in\mathbf{R}$，且设 $u-m\neq 0$，

∴ $\Delta=(-8)^2-4(u-m)(u-n)\geq 0$，

即 $u^2-(m+n)u+(mn-16)\leq 0$.

由 $1\leq u\leq 9$ 知，关于 u 的一元二次方程 $u^2-(m+n)u+(mn-16)=0$ 的两根为 1 和 9，由韦达定理，得

$\begin{cases}m+n=1+9,\\mn-16=1\times 9.\end{cases}$ 解得 $m=n=5$.

若 $u-m=0$，即 $u=m=5$ 时，对应 $x=0$，符合条件，

∴ $m=n=5$ 为所求.

应用与创新拓展训练题 ➡ 答案见本书第 192 页

1. 下列函数中，值域是 $(0,+\infty)$ 的函数是（　　）

(A) $y=x^2-x+1$　　(B) $y=(\dfrac{1}{3})^{1-x}$

(C) $y=3^{\frac{1}{2-x}}+1$　　(D) $y=|\log_2x^2|$

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{x-4}$，$g(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-7x+12}$ 的值域分别为集合 P、Q 是（　　）

(A) $P\subset Q$　　(B) $P=Q$

(C) $P\supset Q$　　(D) 以上答案都不对

3. 函数 $y=x^2+\dfrac{1}{x}(x\leq -\dfrac{1}{2})$ 的值域是（　　）

(A) $(-\infty,-\dfrac{7}{4}]$　　(B) $[-\dfrac{7}{4},+\infty)$

(C) $[\dfrac{3\sqrt{2}}{2},+\infty)$　　(D) $(-\infty,-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}]$

4. 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2-2ax+4-3a)$ 的值域为实数集 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是______.

5. $y=\sqrt{2x^2-6x+9}+\sqrt{2x^2-10x+17}$的值域为______.

6. 若函数 $f(x)$的值域是[2,5],则函数 $y=\sqrt{f(x)-1}-f(x)$的值域是______.

7. 若函数 $y=\frac{ax+b}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$的值域为[-1,4],求 a,b 的值

8. 已知函数 $f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)(p>1)$.

(1)求函数 $f(x)$的定义域;

(2)若函数 $f(x)$的值域为$(-\infty,\log_2\frac{(p+1)^2}{4}]$,求实数 p 的取值范围.

第5讲 函数的奇偶性

高考大纲目标 本讲重点·难点·考点

考试说明

1. 理解函数的奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的奇偶性.
2. 掌握奇偶性与函数图象的对称关系,并能利用函数图象的对称关系描绘函数图象.

轻松学考 知识&方法·名题伴读·轻松做题

函数奇偶性的概念

❶对于函数 $f(x)$,如果对于函数定义域内任意一个 x,都有 $f(-x)=-f(x)$(或 $f(-x)=f(x)$),那么函数 $f(x)$就叫做奇函数(或偶函数).

❷偶函数的图象关于 y 轴对称,奇函数的图象关于原点对称.

❸定义域在 x 轴上关于原点对称,是函数具有奇偶性的必要但非充分条件.如果函数的定义域关于原点对称,函数值恒为零,它既是奇函数又是偶函数.

考点指要 点击名题 拓展迁移 ➡ 1

考例 设函数 $y=f(x)$是最小正周期为2的偶函数,它在区间[0,1]上的图象为如图1-5-1所示的线段 AB,则在区间[1,2]上 $f(x)=$______

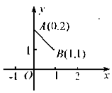


图1-5-1

点拨 由 $f(x)$在区间[0,1]上的图象为线段 AB,可得:

$f(x)=-x+2,x\in[0,1]$,因 $f(x)$为偶函数,则任取 $x\in[-1,0]$,$-x\in[0,1]$,$f(x)=f(-x)=-(-x)+2=x+2$.$x\in[-1,0]$,又 $f(x)$是最小正周期为2的函数,若任取 $x\in[1,2]$,则 $x-2\in[-1,0]$,$f(x)=f(x-2)=(x-2)+2=x$,$x\in[1,2]$,所以在区间[1,2]上,$f(x)=x$.

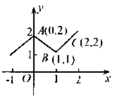


图1-5-2

判断(或证明)函数的奇偶性

❶用定义判断(证明)函数的奇偶性的一般步骤:

①验证定义域是否关于原点对称?否!非奇非偶函数.

②考察 $f(-x)=\pm f(x)$是否成立?若 $f(-x)=f(x)$,$f(x)$为偶函数,若 $f(-x)=-f(x)$,$f(x)$为奇函数.

❷对于有些复杂的函数,有时需要将函数进行化简,或应用定义的等价形式:$f(-x)=\pm f(x)\Leftrightarrow f(-x)\pm f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=\pm1(f(x)\neq0)$

❸对于分段函数的奇偶性的判断应分段逐一判断得同一结论.

考点指要 点击名题 拓展迁移 ➡ 6

考例 判断下列函数的奇偶性判断下列函数的奇偶性

(1)$f(x)=(x+5)\sqrt{\frac{x-5}{x+5}}$

(2)$f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$

(3)$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x+1}{\sqrt{1+x^2}-x-1}$

(4)$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$

(5)$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$

(6)$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+5 & (x>0)\\0 & (x=0)\\-x^2-2x-5 & (x<0)\end{cases}$

点拨 (1)$f(x)$的定义域为$(-\infty,-5)\cup[5,+\infty)$关于原点不对称,故 $f(x)=(x+5)\sqrt{\frac{x-5}{x+5}}$是非奇非偶函数.

(2)$f(x)$的定义域是 R,关于原点对称,由 $f(-x)=\lg(\sqrt{(-x)^2+1}-x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$,从而 $f(x)$为奇函数.

(3)$f(x)$的定义域$\{x|x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq0\}$关于原点对称.

$$f(x)+f(-x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x+1}{\sqrt{1+x^2}-x-1}+\frac{\sqrt{1+x^2}+x+1}{\sqrt{1+x^2}+x-1}$$
$$=\frac{[(\sqrt{1+x^2})^2-(x-1)^2]+[(\sqrt{1+x^2})^2-(x+1)^2]}{(\sqrt{1+x^2}-x-1)\cdot(\sqrt{1+x^2}+x-1)}$$
$$=0$$

即 $f(-x)=f(x)$,故函数 $f(x)$是奇函数.

(4)$f(x)$的定义域$\{x|x=\pm1\}$关于原点对称.