高中数学复习提要

新编高中理科复习参考书

福州教育学院　福州市数学学会　编

天津科学技术出版社

新编高中理科复习参考书

高中数学复习提要

福州教育学院
福州市数学学会 编

天津科学技术出版社

新编高中理科复习参考书

高中数学复习提要

福州教育学院
福州市数学学会 编

·

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

·

开本 787×1092毫米 1/32 印张 18.625 字数 397,000

一九八五年七月第一版

一九八五年七月第一次印刷

印数：1－40,200

书号：13212·92 定价：2.75元

前　言

为了提高中学教育水平，以适应教育要“面向四化，面向世界，面向未来”的需要，根据教育部制定的中学教学大纲和全国统编教材，对已出版的《新编高中数理化复习参考书》和《高中理科自习辅导》进行了修订，并增加了生物学科，同时将丛书改名为《新编高中理科复习参考书》出版。本丛书包括《高中数学复习提要》、《高中数学复习题解》、《高中物理复习提要》、《高中物理复习题解》、《高中化学复习提要》、《高中化学复习题解》、《高中生物复习提要及题解》共七册。

本丛书着眼于帮助学生切实掌握各科基础知识，增强分析问题和解决问题的能力，以达到灵活运用所学知识的目的。编写时，在总结教学经验、分析学生掌握和运用知识情况的基础上，特别注意了增强学生灵活运用知识的培养和训练；根据各科内容的系统性和内在联系，概括出简明学习要点，指明了易混、易错的概念和问题。为了便于复习使用，本书精选了一定数量的练习题和习题，并把全部习题做了系统的解答；在例题演示和习题解答中，着重引导学生掌握正确的分析方法和解题思路，以达到准确理解和运用概念、灵活而巧妙运用知识的目的。因此，本书可供高中毕业生总复习使用，也可供高中学生单元复习、阶段复习参考。

本书为《高中数学复习提要》，由池伯鼎、林宗炘、周

志文、林振铨、吴大钟、任寿彬、高玉栋、魏长庚、郭仰嵩、倪木森、李必成、陈敏贤、陈金华、马长冰、郭道平、林玉润等编写。书中带*号的为选学内容。

限于我们水平，书中难免有错误和不当之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

一九八五年五月

目　录

第一章　数　与　式

内 容 提 要

一、实数

1．实数的系统表．

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数（正、负）——可化为}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数（正、负）——无限不循环小数}\end{cases}
$$

2．数轴：规定了原点、方向和长度单位的直线叫做数轴．

实数与数轴上的点具有“一一对应”的关系．

3．相反数与绝对值：a 与 $-a$ 互为相反数；0 的相反数是 0．

正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零．即

$$
|a|=\begin{cases}a\text{，当 } a\geqslant 0 \text{ 时；}\\ -a\text{，当 } a<0 \text{ 时．}\end{cases}
$$

$|a|$的几何意义是：实数 a 在数轴上对应的点到原点的距离．

4．实数大小的比较：数轴上的点越往右，它所表示的数就越大．一切正数大于零；零大于一切负数；任何正数都大于任何负数；两个负数，绝对值大的反而小，绝对值小的反而大．

5．实数的运算律及运算法则．（略）

6．实数运算的顺序：先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减．如有括号，就先算括号内的数．

二、代数式

用代数运算（加、减、乘、除、乘方和开方）符号和运算顺序符号（括号）把数字、字母（表示数）连结而成的式子叫做代数式．代数式的分类如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

1．整式．

（1）整式的四则运算．（略）

（2）乘法公式：

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$；

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$；

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$．

（3）因式分解：将多项式表示成几个整式的积叫做因式分解．

因式分解应在指定的数的范围内分解到不能再分解为止.在一般情况下，不加说明，都是指在实数范围内.

因式分解的方法通常有：提取公因法，分组分解法，应用公式法.对二次三项式还常采用十字相乘法、配方法和求根法.

2．分式.

（1）分式的基本性质

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}\quad (m\neq 0).$$

（2）分式的约分、通分和运算.(略)

（3）繁分式的化简：繁分式实际上是分式除法的另一种写法，可以利用除法法则和分式的基本性质进行化简.

3．根式.

（1）性质：

$$(\sqrt[n]{a})^n=a\quad (a\geqslant 0,n\in N);$$

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & (a\in R,n=2m+1,m\in N), \\ |a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0,n=2m,m\in N), \\ -a & (a<0,n=2m,m\in N); \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}\quad (a\geqslant 0,m,n,p\in N,n,p>1);$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0,n\in N);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (a\geqslant 0,b>0,n\in N);$$

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\ (a\geqslant 0,m,n\in N);$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\ (a\geqslant 0,m,n\in N);$$

（2）最简根式与同类根式：符合下列条件的根式，叫

做最简根式：

①被开方式的每一个因式的指数都小于根指数；

②被开方式不含有分母；

③被开方式的指数与根指数互质．

两个或两个以上的根式化为最简根式后，如果它们的被开方式都相同，根指数也都相同，叫做同类根式．

（3）根式的运算．（略）

三、指数与对数

1．有理指数的概念．

正整数指数　$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}}$　$(n \in N)$；

零指数：　$a^0 = 1$　$(a \neq 0)$，

负整数指数：$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0, n \in N)$；

分数指数：　$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$　$(a \geqslant 0, n, m \in N)$；

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, n, m \in N).$$

2．指数的运算法则．

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$　$(a \in R^+; m, n \in Q)$；

$(a^m)^n = a^{mn}$　$(a \in R^+, m, n \in Q)$；

$(ab)^m = a^m \cdot b^m$　$(a, b \in R^+, m \in Q)$．

3．对数的概念：如果$a^b = N$（$a > 0$，$a \neq 1$），那么b就叫做以a为底N的对数；记作$\log_a N = b$．把$b = \log_a N$代入$a^b = N$中，可得对数定义恒等式：

$a^{\log_a N} = N$．　$(a > 0, a \neq 1, N > 0)$

4. 对数的运算法则.

$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$　（$a>0$，$a\neq 1$，M，$N\in R^+$）；

$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　（$a>0$，$a\neq 1$，$M,N\in R^+$）；

$\log_a M^n=n\log_a M$　（$a>0$，$a\neq 1$，$M\in R^+$，$n\in R$）；

$\log_a\sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$　（$a>1$，$a\neq 1$，$M\in R^+$，$n\in R$，$n\neq 0$）.

换底公式　$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$（$a,b>0$，$a,b\neq 1$，$N\in R^+$）.

5. 常用对数：以10为底的对数叫做常用对数.一个正数的常用对数可分为首数（整数部分）和尾数（正的纯小数部分或零）两部分.

（1）首数：大于1的数，其常用对数的首数等于真数的整数部分的位数减去1的差；小于1的正数，其常用对数的首数是负整数，它的绝对值等于真数里第一个有效数字前的零的个数（包括整数单位的一个零）.

（2）尾数：仅小数点位置不同的正数（即有效数字相同的正数），它们的常用对数的尾数都相同，只是首数不同；尾数可从对数表中查得.

例　题

【例1】 本题共有4个小题，每一个小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中只有一个结论是正确的，试就每一小题写出正确结论的代号.

（1）如果$n\in N, m=n+\sqrt{130n+3}$，那么

(A) $m\in N$；　(B) $m\in Z$；

(C) $m\in Q$；　(D) $m\in$ {无理数}

（2）如果$a>b>1$，且$\log_a b+3\log_b a=\frac{13}{2}$，那么式子$\frac{a+b^4}{a^2+b^2}$的值是

(A) 1；　(B) 3；

(C) 5；　(D) 7.

（3）如果n是正整数，那么$\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$的值

(A) 一定是零；　(B) 一定是偶数；

(C) 是整数但不一定是偶数；

(D) 不一定是整数.

（4）使$(a+b)^2=a^2+b^2$的充要条件是

(A) $a=b$；　(B) $a=-b$；

(C) a，b至少有一为零；(D) $a=b=0$.

解　（1）分析　当$n\in N$时，$130n+3$是个位数码为3的正整数，但任何整数的平方数的个位数码都不可能是3，所以$\sqrt{130n+3}$是无理数。于是，$m=n\sqrt{130n+3}$也是无理数。答：(D).

（2）分析　$\log_a b+3\log_b a=\frac{13}{2}$可化为$2(\log_a b)^2-13\log_a b+6=0$，解得$\log_a b=\frac{1}{2}$或$\log_a b=6$，但$a>b>1$，故只有$\log_a b=\frac{1}{2}$，即$b=\sqrt{a}$，代入$\frac{a+b^4}{a^2+b^2}$求得其值为1.

答：（A）。

（3）分析 ∵ $\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)=$

$\begin{cases} 0 & (n\text{为偶数})； \\ \frac{n^2-1}{4} & (n\text{为奇数})； \end{cases}$ 而当 n 为奇数时，可令 $n=2m-1$，（m 是正整数），于是 $\frac{n^2-1}{4}=\frac{(2m-1)^2-1}{4}=m(m-1)$，这是两个连续整数之积，一定是偶数．所以，$n$ 是正整数时，$\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$ 的值一定是偶数． 答：（B）．

（4）分析 ∵ $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$，要使 $a^2+b^2+2ab=a^2+b^2$，须且只须 $ab=0$，即 a,b 至少有一为零。答：（C）。

【例2】 求 $\left[\frac{x^{n-2}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{n}{4}}}\right]^{1\frac{1}{3}}\div\left[\frac{x^{8n-16}yz^4}{(x+y)^{2n}}\right]^{\frac{1}{6}}$ 的值，

其中 $x=127$，$y=64$， $z=\sqrt{53}$，$n=91$

解 原式 $=\{[x^{n-2}\cdot y^{\frac{3}{4}}\cdot z^{\frac{1}{2}}\cdot(x+y)^{-\frac{n}{4}}]^{8}\cdot$

$[x^{-(8n-16)}y^{-1}z^{-4}(x+y)^{2n}]\}^{\frac{1}{6}}$

$=\{[x^{8n-16}\cdot y^6\cdot z^4(x+y)^{-2n}]\cdot$

$[x^{-(8n-16)}\cdot y^{-1}\cdot z^{-4}(x+y)^{2n}]\}^{\frac{1}{6}}$

$=y^{\frac{5}{6}}$。

当 $y=64$ 时，原式 $=64^{\frac{5}{6}}=32$。

【注】 求式子的值，一般先化简，然后代入求值．

【例3】 已知 $2a>b>0$，求下式的值：

$$\frac{1-\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{1+\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}\cdot\sqrt{\frac{a+b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{a-b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}}.$$

解　因$\sqrt{\frac{2a}{b}-1}=\sqrt{\frac{2a-b}{b}}$，

当$2a>a>b>0$时，有$\sqrt{\frac{2a-b}{b}}>1$，

$$\text{此时，原式}=-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\frac{2a}{b}-1}-1}{\sqrt{\frac{2a}{b}-1}+1}\right)^2\cdot\frac{a+b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{a-b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}}$$

$$=-\sqrt{\frac{\frac{2a}{b}-2\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{\frac{2a}{b}+2\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}\cdot\frac{a+b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{a-b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}}$$

$$=-1.$$

又当$2a>b>a>0$时，有$\sqrt{\frac{2a-b}{b}}<1$.

同理可得：原式$=1$.

【例4】　已知六个整数a、b、c、d、e、f满足$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=f^2$，试证它们不能都是奇数.

证明　设a、b、c、d、e、f都是奇数，可令$a=2n-1$，$(n\in Z)$，于是$a^2=(2n-1)^2=4n(n-1)+1$，而$4n(n-1)(n\in Z)$一定是8的倍数，所以，a^2除以8所得余数为1.

同理，b^2,c^2,d^2,e^2,f^2分别除以8所得余数也都为1.

由　$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=f^2$，

可得　$a^2+b^2+c^2+d^2=f^2-e^2$，

上式左边除以 8 所得余数为 4 ，而右边却是 8 的倍数，矛盾。

所以，a、b、c、d、e、f不能都是奇数。

【例 5】 如果$xy(x+y)=c, yz(y+z)=a, zx(z+x)=b, xyz=d$ (x, y, z均不为零)，那么$a+b+c+2d=\frac{abc}{d^2}$

证明 $\because a+b+c+2d=yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)+2xyz$

$$=z^2(x+y)+z(x+y)^2+xy(x+y)$$

$$=(x+y)[z^2+z(x+y)+xy]$$

$$=(x+y)(y+z)(z+x), \qquad (1)$$

而 $xy(x+y)=c, yz(y+z)=a, zx(z+x)=b, xyz=d$,

又 x, y, z均不为零,

则 $x+y=\frac{c}{xy}$, $y+z=\frac{a}{yz}$, $z+x=\frac{b}{zx}$,

代入（1） 得$a+b+c+2d=\frac{abc}{(xyz)^2}=\frac{abc}{d^2}$

【例 6】 分解因式：

（1） x^5+x^4-4x-4 ；

（2） $3x^2-2xy-8y^2+9x+32y-30$。

解 （1）

原式$=x^4(x+1)-4(x+1)$

$$=(x+1)(x^4-4)$$

$$=(x+1)(x^2-2)(x^2+2)$$

$$=(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2).$$

（2）

解一 原式$=3x^2+(9-2y)x-2(4y^2-16y+15)$。

求关于x的方程$3x^2+(9-2y)x-2(4y^2-16y+15)=0$的两根得：

$$x_1=2y-5,\qquad x_2=\frac{1}{3}(6-4y);$$

$$\therefore\quad 原式=3[x-(2y-5)][x-\frac{1}{3}(6-4y)]$$

$$=(x-2y+5)(3x+4y-6).$$

解二 原式$=(x-2y)(3x+4y)+9x+32y-30$。

设 原式$=(x-2y+l)(3x+4y+m)$

$$=(x-2y)(3x+4y)+(3l+m)x$$

$$+(4l-2m)y+lm,$$

比较系数得：

$$\begin{cases}3l+m=9,\\ 4l-2m=32,\\ lm=-30.\end{cases}$$

解得：$l=5$，$m=-6$。

$\therefore$ 原式$=(x-2y+5)(3x+4y-6)$。

解三 原式$=(x-2y)(3x+4y)+[5(3x+4y)$

$$-6(x-2y)]+5\cdot(-6),$$

因此可进行两次十字相乘法加以分解：

$$\begin{array}{ccc} x & & -2y \\ & \times & \\ x & & 4y \end{array}\qquad 和 \qquad \begin{array}{ccc} x-2y & & 5 \\ & \times & \\ 3x+4y & & -6 \end{array}$$

也可以进行三叉相乘法加以分解：