财会数学问题解答

刘 洪 编写

江西科学技术出版社

财会数学问题解答

刘　洪　编写

江西科学技术出版社出版

（南昌市第四交通路铁道东路）

机械工业会计学会江西省分会赣州地区支会发行

江西赣南印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张8$\frac{3}{16}$　字数15万

1985年11月第一版　1985年11月第一次印刷

印数1—11,000

统一书号：4425 7　　定价1.50元

序　言

刘洪同志编写了《财会数学问题解答》一书，我作为原书《财会数学》的编写者，对该书的出版，深表欢迎。

当时，《财会数学》的编写意图是为财会工作者提供一本中等程度的教学用书，以提高经济管理工作的水平，使之适应我国四化建设的需要。现在，《财会数学问题解答》的出版，是对原书的反响、支持和合作。

近年来，常有读者来信，其中有刻苦钻研的自学者，询问书中问题。有选原书作课本的教师，讨论有关问题。每览信函，辄需解答。因此，这本既有问题解答，又有提示、补充的《财会数学问题解答》将会满足读者的需要，特别是对疏于数学的自学者更有裨益。

綦　芷

1985年6月于上海

前　　言

《财会数学》是蔡芷同志为财会专业编写的一本很好的教材。这本教材的最大特点是以数学为经，系统介绍了初等代数和线性代数两个与财会专业密切相关的数学内容，同时以财会业务为纬，列举了大量例题和习题，将极为抽象的数学与非常具体的业务联系起来，互为印证，从而达到易学易懂易用的目的，深受广大财会人员的欢迎。但《财会数学》是出于“中专教材”的设想而编写的，在数学内容和例题的介绍上，比较简要。《财会数学问题解答》就是作为广大在职财会人员自学《财会数学》的辅导书而编写的，希望能对广大在职财会人员的自学有所帮助。

本书绝大部分内容是根据蔡芷同志编写的《财会数学》作为蓝本，加以必要的提示和补充，因此章节的安排均按照《财会数学》的原有次序，以便对照。最后扼要补充了函数的极值部分，这是因为高等数学中的函数极值理论，是企业财会工作中应用甚广的部分。这一部分主要是根据本人撰写的论文编写而成。

本书的编写，得到赣州地区机械局崔立柱局长、赣州地区机械会计学会会长孙炳福同志及其他同志的大力支持，在此表示感谢。

由于编写者水平有限，错误、缺点在所难免，希望专家学者及广大财会工作同志批评指正。

编 写 者

1985年4月

目　录

第一章　初等代数部分

一、和　　式

（补充1）和式两个公式的证明。

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$。

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

现以具体数字为例展开和式并归纳证明如下：

1. 设 $n=6$，

$$\sum_{i=1}^{6} i = 1+2+3+4+5+6.$$

以上级数，顺次首尾两项之和均为7，且共有$\frac{6}{2}$组，故知其和：

$$\sum_{i=1}^{6} i = \frac{6}{2}(1+6) = \frac{1}{2}\times 6\times(6+1).$$

即：$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$。

又设 $n=8$，则：

$$\sum_{i=1}^{8} i = 1+2+3+4+5+6+7+8.$$

顺次首尾两项之和均为 9，共$\frac{8}{2}$组。

即：$\sum\limits_{i=1}^{8} i=\frac{8}{2}\times(8+1)=\frac{1}{2}\times 8\times(8+1)$。

即：$\sum\limits_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}n(n+1)$。

当n为任何整数时，$\sum\limits_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}n(n+1)$均成立，公式1.由此得到证明。

2.设$n=5$，

$$\sum_{i=1}^{5} i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$$

$$=\frac{6}{6}(1+4+9+16+25)$$

$$=\frac{1}{6}(\underline{6+24}+\underline{54+96+150})$$

$$=\frac{1}{6}(300+30)\quad=\frac{1}{6}\times 5\times 6\times 11.$$

即：$\sum\limits_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

又设：$n=8$，

$$\sum_{i=1}^{8} i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2$$

$$=\frac{6}{6}(1+4+9+16+25+36+49+64)$$

$$=\frac{1}{6}(6+24+54+96+150+216+294+384)$$

$$=\frac{1}{6}\times 8\times 9\times 17 \qquad （注：17=2\times 8+1）。$$

即：$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

当n为任何正整数时，以上归纳均成立，由此公式2得到证明。

（提示1）在经济、财会专业中，和式的应用很广，因此，必须熟练地掌握和式的表达、展开、和式的性质与和式的运算法则。

（提示2）在和式的学习中应注意以下8点：

1.在和式的运算过程中，应严格遵照性质和法则，并尽可能的应用以上两个公式，使运算简单。

2.当和式的变量从0开始时，$\sum_{i=0}^{n} i$说明和式的末项是n，

$\sum_{i=0}^{n} i=\frac{1}{2}\times n\times(n+1)$如：

$$\sum_{i=0}^{5} i=\frac{1}{2}\times 5\times(5+1)=\frac{1}{2}\times 5\times 6=15。$$

3.当和式符号遇到常数时，以和式的项数乘常数，即：

$\sum_{i=0}^{n} C=C(n+1)$，如：

$$\sum_{i=0}^{4} 5=5\times(4+1)=5\times 5=25。$$

（应注意2、3两点不可混淆）。

习题1·1

（6）$\sum\limits_{n=0}^{7}\left(2n-1\frac{1}{2}\right)=2\sum\limits_{n=0}^{7}n-8\times1\frac{1}{2}$

$=2\times\frac{1}{2}\times7\times8-8\times\frac{3}{2}=56-12=44$。

（13）计算：$\sum\limits_{n=1}^{6}(n+1)(n+3)$

$$\sum_{n=1}^{6}(n+1)(n+3)=\sum_{n=1}^{6}(n^2+4n+3)$$

$$=\sum_{n=1}^{6}n^2+4\sum_{n=1}^{6}n+6\times3$$

$$=\underline{\frac{1}{6}\times6\times7\times13}+4\times\underline{\frac{1}{2}\times6\times7}+18=193.$$

（提示3）和式符号遇有两项式（或多项式）相乘，应先求其乘积，然后再按和式法则计算，计算中尽量利用公式。

（15）$\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{5}(i+3)(2j+1)$

$$=\sum_{i=1}^{4}(i+3)\sum_{j=1}^{5}(2j+1)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{4}i+4\times3\right)\left(2\sum_{j=1}^{5}j+5\times1\right)$$

$$=\left(\underline{\frac{1}{2}\times 4\times 5}+12\right)\left(2\times\underline{\frac{1}{2}\times 5\times 6}+5\right)$$

$$=22\times 35=770。$$

（提示4）遇双重和式后跟两项式（或多项式）相乘，同时因式中各有不同的变量时，两因式则不宜先求其乘积。

〔例题14〕有产品一堆，堆成正棱台形，最高层为31×31只，第二层为32×32只，…………最底层为39×39只，求这堆产品的总数。

解：设这堆产品的总数为N，则：

$$N=31^2+32^2+33^2+\cdots\cdots+39^2$$

$$=\sum_{i=1}^{9}(30+i)^2=\sum_{i=1}^{9}(30^2+60i+i^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{9}30^2+60\sum_{i=1}^{9}i+\sum_{i=1}^{9}i^2$$

$$=9\times 30^2+60\times\underline{\frac{1}{2}\times 9\times 10}+\underline{\frac{1}{6}\times 9\times 10\times 19}$$

$$=8100+2700+285=11085。$$

（提示5）在季末或年终材料、半成品、成品等物资的盘点时，经常会遇到类似的问题，应根据堆放的几何形状建立算式，然后再利用和式计算，可节约很多时间。

二、阶乘与连乘

2·2阶乘的运算

（补充2）

（3）证明$n!+(n+1)!=(n+2)n!$。

设 $n=3$，则：

$3!+(3+1)!=3!+4!=1\times2\times3+1\times2\times3\times4$

$=1\times2\times3(1+4)=(n+2)n!$。

(4)证明 $(n+1)!-n!=n\cdot n!$。

$(n+1)!-n!=(n+1)n!-n!$

$=(n+1-1)n!=n\cdot n!$。

(6)证明 $\dfrac{m!}{n!}=m(m-1)\cdots(n+1)$。

设 $m=7$，$n=3$，则：

$$\therefore\quad \frac{7!}{3!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}$$

$$=\underset{m}{7}\times\underset{(m-1)}{6}\times\underset{(m-2}{5}\times\underset{n+1}{4}$$

$$\frac{m!}{n!}=m(m-1)\cdots(n+1)。$$

〔例5〕$6!-7!+8!=6!-7\times6!+8\times7\times6!$

$=6!\times50=720\times50=36000$。

〔例7〕求证：$(2n+1)!!=\dfrac{(2n+1)!}{2\cdot n!}$

证明：$(2n+1)!!=1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)$

$$=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)\times(2n)!!}{(2n)!!}$$

$$=\frac{1\times2\times3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}$$

$$=\frac{1\times2\times3\times\cdots\times(2n+1)}{(2\times1)\times(2\times2)\times(2\times3)\times\cdots\times(2\times n)}$$

$$=\frac{(2n+1)!}{2^n\times(1\times2\times3\times\cdots\times n)}$$

$$=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$$

〔例16〕利用性质（3），求$\prod_{n=1}^{4}(n+1)(n+2)$的值。

解：$\prod_{n=1}^{4}(n+1)(n+2)=\prod_{n=1}^{4}(n+1)\times\prod_{n=1}^{4}(n+2)$

$$=5!\times\frac{6!}{2!}=120\times\frac{720}{2}=43200.$$

（注：$\prod_{n=1}^{4}(n+2)=3\times4\times5\times6=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{1\times2}=\frac{6!}{2!}$

〔例18〕某企业的基期产值为A，职工人数为B，以后每年产值与人数较上一年的递增率为下表，求第10年的全员劳动生产率。

项　　递增%　年份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
产　值	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
人　数	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1

解：第10年的产值$=A(1.05)(1.055)(1.06)\cdots(1.095)$

$$=A\prod_{i=0}\left(1.05+\frac{5i}{1000}\right)=A\prod_{i=1}^{10}\left(1.045+\frac{5i}{1000}\right).$$

第10年的人数 $=B(1.02)(1.019)(1.018)\cdots(1.011)$

$$B\prod_{i=0}^{9}\left(1.02-\frac{i}{1000}\right)=B\prod_{i=1}^{10}\left(1.021-\frac{i}{1000}\right)。$$

$$\text{第10年的劳动生产率}=\frac{A\prod_{i=1}^{10}\left(1.045+\frac{5i}{1000}\right)}{B\prod_{i=1}^{10}\left(1.021-\frac{i}{1000}\right)}=\frac{A}{B}\prod_{i=1}^{10}\frac{1.045+\frac{5i}{1000}}{1.021-\frac{i}{1000}}$$

$$=\frac{A}{B}\prod_{i=1}^{10}\frac{1+\frac{45}{1000}+\frac{5i}{1000}}{1+\frac{21}{1000}-\frac{i}{1000}}=\frac{A}{B}\prod_{i=1}^{10}\frac{1+\frac{45+5i}{1000}}{1+\frac{21-i}{1000}}.\text{ 其中：}$$

$$\frac{1+\frac{45+5i}{1000}}{1+\frac{21-i}{1000}}\approx\left(1+\frac{45+5i}{1000}\right)\left(1-\frac{21-i}{1000}\right)$$

$$\approx\left(1+\frac{45+5i}{1000}-\frac{21-i}{1000}\right)$$

$$\approx 1+\frac{45+5i-21+i}{1000}$$

$$\approx 1+\frac{24+6i}{1000}=1+\frac{24}{1000}+\frac{6i}{1000}=1.024+\frac{6i}{1000}$$

$$\therefore\text{原式}=\frac{A}{B}\prod_{i=1}^{10}\left(1.024+\frac{6i}{1000}\right)$$

$$=\frac{A}{B}(1.024+0.006)(1.024+0.012)(1.024+0.018)\cdots$$

$(1.024+0.06)$

$=\frac{A}{B}1.03\times1.036\times1.042\times1.048\times\cdots\times1.084=1.73\times\frac{A}{B}$.

（提示6）上题中应用了"近似计算"的公式，利用公式的部分，下面标注了"～～～～～"号；近似计算是下一节（第三节）的内容，这里先把有关的两个公式列下，以便对照：

$1°\ 10\frac{A}{1\pm\alpha}\approx A(1\mp\alpha)$.

上题中$\frac{45+5i}{1000}$相当A，$\frac{21-i}{1000}$相当于α。

$2°\ (1+\alpha)(1\pm\beta)\approx1+\alpha\mp\beta$.

在上题中$\frac{45+5i}{1000}$相当于α，$\frac{21-i}{1000}$相当于β.

习　题 1·2

将下列各题写成阶乘式连乘式：

（4）$1.1\times1.3\times1.5\times1.7\times1.9\times2.1\times2.3\times2.5$

$$=\frac{11}{10}\times\frac{13}{10}\times\frac{15}{10}\times\cdots\times\frac{25}{10}$$

$$=\frac{9!!\times11\times13\times\cdots\times25}{9!!\times10^8}=\frac{25!!}{9!!\times10^8}.$$

计算下列各题：

（6）$\frac{10!-9!}{8!+7!}=\frac{10\times9\times8\times7!-9\times8\times7!}{8\times7!+7!}$

$$=\frac{7!(10\times9\times8-9\times8)}{7!(8+1)}$$

$$=\frac{9\times8(10-1)}{9}=8\times9=72.$$

(7) $\frac{50!}{47!\times3!}=\frac{50\times49\times48\times47!}{47!\times3!}=\frac{50\times49\times48}{3!}$

$$=\frac{50\times49\times48}{6}=50\times49\times8$$

$$=50\times(50-1)\times8=400\times(50-1)$$

$$=20000-400=19600.$$

(8) $\prod_{n=}^{5}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}\times\frac{1}{1!}\times\frac{1}{2!}\times\frac{1}{3!}\times\frac{1}{4!}\times\frac{1}{5!}$

$$=1\times1\times\frac{1}{2!}\times\frac{1}{3!}\times\frac{1}{4!}\times\frac{1}{5!}$$

$$=\frac{1}{2!\times3!\times4!\times5!}=\frac{1}{2\times6\times24\times120}=\frac{1}{34560}$$

(9) $\frac{17!!\times16!!}{18!}=\frac{17!}{18!}=\frac{17!}{18\times17!}=\frac{1}{18}.$

(10) $6!-\sum_{n=1}^{5}n\cdot n!=6!-(5\times5!+4\times4!+3\times3!+2\times2!+1)$

$$=720-(600+96+18+4+1)=1.$$

(11) $(2n)!!=2\times4\times6\times\cdots\times2n$

$$=\underline{1\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{3\times2}\times\cdots\times\underline{2\cdot n}$$ (注，共n个2)

$$=2^n\times1\times2\times3\times\cdots\times n=2^n\times n!.$$

证明下列各题：

(12) $\prod_{i=1}^{n}e^i=e^1\cdot e^2\cdot e^3\cdot\cdots\cdots e^n$