95

全国高等教育自学考试辅导丛书

《高等数学(二)第一分册线性代数》自学考试指导与题解

主　编　吴向阳

知识出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学(二)第一分册线性代数》自学考试指导与题解/吴向阳主编. 一北京:知识出版社,2001. 4

(全国高等教育自学考试辅导丛书)

ISBN 7-5015-2928-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 吴… Ⅲ. 线性代数-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 22630 号

知识出版社出版发行

(北京阜成门北大街 17 号　邮编 100037)

河南长城印刷厂印刷

新华书店经销

开本:850×1168　1/32　印张:9.75　字数:240 千字

2001 年 5 月第 1 版　2001 年 5 月第 1 次印刷

印数:1～5000 册

定价:15.00 元

前　言

为满足广大自学应考者复习要求，我们编写了这本《〈高等数学(二)第一分册线性代数〉自学考试指导与题解》。

本书根据全国高等教育自学考试指导委员会最新审定的《〈高等数学(二)第一分册线性代数〉自学考试大纲》和指定教材——武汉大学出版社出版的《高等数学(二)第一分册线性代数》(姚慕生、高汝熹主编)进行编写的。全书分为自学指导意见、综合练习、模拟自测题等三部分。其中，综合练习包括填空题、单项选择题、多项选择题、判断分析题、简答题、计算证明题等题型，基本上涵盖了本课程的考试内容。各章均附有参考答案，供考生复习时参考。

由于编写时间紧，书中疏漏之处在所难免，还望考生在使用时认真学习《高等数学(二)第一分册线性代数》教材，并给我们提出宝贵意见，以便修订时参考。

编　者

2001 年 2 月

目　　录

第一部分　自学指导意见

第二部分　综合练习

第三部分 《高等数学(二)第一分册线性代数》模拟自测题及参考答案

第一部分　自学指导意见

全国高等教育自学考试已经进行十几年了，为我国培养了大量的各类人才，也促进了我国高等教育的健康发展.高等数学是经济类专业的基础理论课程之一，也是其它很多专业要考试的课程.但是从这些年情况来看，高等数学的考试通过率却不尽人意，很多考生往往考两三次还不能通过，有些考生其它课程都通过了，就是高等数学过不去，结果拿不到毕业证.这不仅使一部分考生失去信心，还使一部分考生望而却步，严重影响一些考生的学习积极性，阻碍了高等教育的正常发展.

难道高等数学真的这么难吗?答案是否定的.问题的关键在于是否有正确的学习方法，是否花费一定的时间和精力，是否有正常的应试心理，是否对考试试卷作过认真分析，是否有一本好的学习参考书.

学习方法对任何一门课程来说都是非常重要的，对高等数学尤其如此.自学考试与考研或其它选拔性考试有所不同，它是一种过关性考试，重在考查考生是否掌握该课程的基本概念和基本技能技巧，考试面广，几乎每章节都考，题量大，类型多.因此，学习这门课程的最重要的方法是牢固地掌握好概念，要从各个角度透彻地去理解它，切不可囫囵吞枣，模棱两可.当然，这不是要求考生去死记硬背.在高等数学试卷中很少、几乎没有直接对概念的填空或名词解释，但是其它形式的考查题(如单项选择题，多项选择题，判断分析题)却占据了很大比重(35%以上)，尤其是容易出错或容易混淆的概念.如线性相关和线性无关，矩阵的秩和可逆，特征值和特征向量，这些都是每次考试都有的内容.熟练掌握概念的性质和有关定理是进一步理解概念的必要途径，也是做计算题和证明题

的必备知识.性质和定理往往是对概念的延伸和发展,是对概念间的相互关系的描述,在选择题和判断分析题里的份量较重.只要概念清楚,很多题都可攻克,尤其是对证明题最为有效,只要找出概念的等价命题,一步一步向下推导,很快就能得到结果.如1995年上半年河南省高考教育自学考试试题中有这样一道题:"设n阶实对称矩阵,A和B相似,试证:存在正交阵P,使$P^{-1}AP=B$".这题8分,主要有三个考点,一是矩阵相似的概念和性质,二是实对称矩阵的性质,三是正交矩阵的性质.我们知道,A与B相似就是指存在一个可逆矩阵Q,使$Q^{-1}AQ=B$,另一方面,实对称矩阵总是正交相似于元素为其特征值的对角矩阵.结合这两点,很容易看出A与B都正交相似于同一个对角矩阵Λ,即存在正交矩阵M和N,有$M^{-1}AM=\Lambda=N^{-1}BN$,把这个式子改写为题目要证明的形式,即$NM^{-1}AMN^{-1}=(MN^{-1})^{-1}A(MN^{-1})=B$.经比较可知,若令$P=MN^{-1}$且$P$正交的话,就可得出结论.由正交矩阵的性质"正交矩阵之积仍正交,正交矩阵的逆矩阵仍正交"可知,P为正交矩阵.这样8分就到手了.

如何才能清楚透彻地理解概念定理呢?笔者认为有两点,一是勤于思考,善于综合.对教材中的每个概念定理的每个字都要仔细地认真地琢磨,尤其是像"存在"、"任意"、"只有"、"不全为零"、"全不为零"、"全为零"、"充分"、"必要"、"充分必要"等关键字,一定要充分领会其中的含义.多想想如果条件不满足或部分满足结果会怎样,逆命题是否成立,若不成立能否找出一个反例,它的逆否命题应怎样描述,等等问题.在充分理解的基础上,要学会把书面数学语言转化为自己的语言,只有这样,才能更熟练、更灵活、更牢固地掌握知识.数学是一门彼此相关、互为印证、不断递进的学科,因此要善于找出相关概念的联系与区别,在头脑中形成一张网,把不同章节的相关问题综合串联在一起.二是解题.不解题是肯定不行的,任何理论的掌握都不只是纸上谈兵就能学会的,而是要进行实

战.有人说,搞题海战术不行的.笔者认为事实不一定如此,常言道:熟能生巧,题做多了,概念定理自然就熟悉了.尽管如此,但是由于一个人的精力和时间总是有限的,所以笔者并不主张搞题海战术,而是主张在思考的基础上作一定量的、有代表性的、各种类型的习题,也能达到同样的效果.很多学生和学员告诉我,他们成功的秘诀就是精练适量的习题,这样既熟练灵活地掌握了概念定理,又积累了一些技能技巧.

应试技巧对考试成绩也有很大影响,有好的应试技巧可以超常发挥自己的水平,做到快、准.一般说来,高等数学(二)自学考试的试题是按从易到难,从低分值到高分值的顺序编的.前面的填空和选择题,一般是基本概念题、基本公式或经简单计算就可得出答案的题,建议考生先做,这样既可以起到复习的作用,为顺利解答后面的判断分析题、简答题和计算证明题做一下准备,又可以起到平静心跳,增加信心的作用.填空题主要考查考生对基本公式的掌握情况,一般经过简单计算或化简就可以求出结果;选择题和判断分析题主要考查考生对基本概念、各种性质、概念的关系等问题的掌握情况.做这类题目时千万不要瞎猜,可适当计算或用排除法、倒推法、代入法等方法来缩小范围.如 1996 年下半年河南省高等数学(二)自考试卷中有一道单项选择题:A 为 n 阶实对称阵且正交,则①$A=I$,②$A\sim I$,③$A^2=I$,④A 合同于 I.显然如果①正确,则②也正确(相似的反身性),因此①排除了.由于 A 为实对称矩阵,如果②正确,则 A 正交相似于 I,一定也合同于 I,④也正确,因此②也排除了,对于④,由于只有正定矩阵才合同于单位矩阵,而题设中的 A 并不能保证 A 是正定矩阵.故只有③正确.也可以直接计算得出③正确,事实上,由于 A 正交,所以 $A^{-1}=A'$,又 A 为对称阵,即 $A'=A$,所以 $A^2=AA'=AA^{-1}=I$.计算证明题稍难一点,但也有规律可循.有两点值得注意,一是看到题目后不要冒然动笔,一定要先想想,看看有几种方法,不同的方法其难易程度和耗费的

时间是不同的.二是计算要仔细,尤其是行列式、矩阵、线性方程组等在变换过程中很容易算错数,而一个数错了,整个题都得不正确的结果,而且计算过程变得复杂,耽误时间.

良好健康的应试心理也是非常重要的.健康良好的应试心理是正常发挥自己的水平的前提,正如体育赛场上的运动员,有实力,还得有正常的心态.首先要排除畏惧心理,不要怕考不过去,其实自学考试的题都是比较简单的,有八到九成左右的题是容易和中等难度的题,只不过一成多较难的题.本书的内容覆盖了全部考点,也就是说学会本书的60%以上就可以过关了,有什么可怕的呢?其次不要有压力.在日常学习的时候多一点压力,可以促进学习,但考试的时候有压力就犹如负重赛跑,很难发挥自己的正常水平.轻松一点,潇洒一点,一切都会过去的.希望这段内容能对大家有所帮助,也希望本书能帮助大家学好本课程,顺利通过考试.

第二部分　综合练习

第一章　行 列 式

考核点提示

行列式是线性代数的重要内容，是其它内容的基础. n 阶行列式由 n 行 n 列元素(共 n^2 个元素)组成，其结果为一数值或含有未定量的代数表达式，等于某行(列)元素与相应元素的代数余子式乘积的代数和. 行列式有 6 条重要性质(参见教材)，读者应熟练掌握，灵活运用. 计算行列式是本章的一个重点，常有两种方法：一种方法是利用行列式的定义或(和)性质对行列式进行简化；另一种方法是利用拉普拉斯定理将行列式展开降阶. 但在实际的运算过程中二者经常交叉重复使用，不利用行列式的性质进行简化而直接展开往往使问题复杂化. 根据克莱姆法则求线性方程组的解，以及根据系数行列式是否等于零来判断齐次线性方程组是否有非零解是行列式的应用，也是第三章线性方程组的一个前奏.

综合练习

一、填空题

1. n 阶行列式的元素个数为＿＿＿＿.

2. 若 -5 为 a_{ij} 的余子式，则 a_{ij} 的代数余子式为＿＿＿＿.

3. 在函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & -x & -1 \\ 3 & 4x & -1 \\ 3 & 3 & -x \end{vmatrix}$$

中，x^3 的系数是＿＿＿＿.

4. 行列式

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}>0$$

的充分必要条件是＿＿＿＿.

5. 若 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，则此行列式的值为＿＿＿＿.

6. 当 x 等于＿＿＿＿时，行列式

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 0 & 4 & x \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

7. 三角形行列式的值等于＿＿＿＿元素的乘积.

8. 若行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ 30 & x & -43 \\ -1 & y & x \end{vmatrix}=-2,$$

则

$$\begin{vmatrix} x & 30 & -2 \\ y & x & 2y \\ x+y & -43 & 2x \end{vmatrix}=\underline{\qquad}.$$

9. 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=1$$

则

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$$

10. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$

11. $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1+x & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2+x+1 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3+x+2 \end{vmatrix}=0$

的所有根是______.

12. 设 $a,b\in R$,

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 100 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

则 $a=$______, $b=$______.

13. 设 a,b,c 为互异实数，则

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

的充分必要条件是________.

14. 设行列式为 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 6 \\ x & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

用 A_{ij} 表示 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=$

________.

15. 设五阶行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{vmatrix},$$

则 $A_{31}+A_{32}=$________；$A_{33}+A_{34}+A_{35}=$________.

16. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2+1 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2+1 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2+1 & (c+2)^2 \end{vmatrix} =$________.

17. $\begin{vmatrix} -x & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -x & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -x & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} =$________.

18. 当 $k=$________时，方程组

$$\begin{aligned} (k-2)x_1+2kx_2&=0 \\ -2kx_1+(k-2)x_2&=0 \end{aligned}$$

仅有零解.

19. 方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

当 $k=$ ______ 时,有非零解.

20. 方程组

$$\begin{cases} a_1^2x_1 + a_1x_2 + x_3 = 1 \\ a_2^2x_1 + a_2x_2 + x_3 = 2 \\ a_3^2x_1 + a_3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

当 a_1,a_2,a_3 满足 ______ 条件时,有惟一解.

二、单项选择题

1. 已知 $|A|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$,则 $|A|$ 中的一次项系数是(　　).

① 1　　② -1

③ 4　　④ -4

2. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x^2-2 \\ 2 & x^2+1 & 1 \end{vmatrix}$,则 $f(x)=0$ 的根是(　　).

① 1,1,2,2　　② $-1,-1,2,2$

③ $1,-1,2,-2$　　④ $-1,-1,-2,-2$

3. $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{vmatrix}<0$ 的充分必要条件是(　　).

① $x\geqslant 0$　　② $x<0$

③ $x\neq 0$　　④ $x=0$

4. 已知四阶行列式 D 中第三列元素依次为 $-1,2,0,1$，它们的余子式依次分别为 $5,3,-7,4$，则 $D=($　　$)$.

① -15　　② 15

③ 5　　④ -5

5. $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix}\neq 0$ 的充分必要条件是(　　).

① $k\neq -1$　　② $k\neq 3$

③ $k\neq -1$ 且 $k\neq 3$　　④ $k\neq -1$ 或 $k\neq 3$

6. 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=M\neq 0$,

$$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix},$$

那么 $D_1=($　　$)$.

① $2M$　　② 3×2^3M

③ $8M$　　④ 2^9M

7. 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=1$，则下列(　　)是方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1-a_{12}x_2+b_1=0 \\ a_{21}x_1-a_{22}x_2+b_2=0 \end{cases}$$

的解.

① $x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

② $x_1=-\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

③ $x_1=\begin{vmatrix}-b_1 & -a_{12}\\ -b_2 & -a_{22}\end{vmatrix}$，$x_2=\begin{vmatrix}-a_{11} & -b_1\\ -a_{21} & -b_2\end{vmatrix}$

④ $x_1=-\begin{vmatrix}-b_1 & -a_{12}\\ -b_2 & -a_{22}\end{vmatrix}$，$x_2=\begin{vmatrix}a_{11} & -b_1\\ a_{21} & -b_2\end{vmatrix}$

8. 如果$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=1$，

$$D_1=\begin{vmatrix}4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13}\\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23}\\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

那么 $D_1=$(　　).

① 8　　　　② -12

③ 24　　　　④ -24

9. $p(x)=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ 1 & a_1+x+1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ 1 & a_1 & a_2+x+2 & \cdots & a_{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+x+n-1\end{vmatrix}$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$是互不相同的实数，则 $p(x)=$(　　).

① 无实根　　　　② 根为 $1,2,\cdots,n-1$

③ 根为零　　　　④ 根为 $-1,-2,\cdots,-(n-1)$

10. $\begin{vmatrix}8 & 27 & 64 & 125\\ 4 & 9 & 16 & 25\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$(　　).

① 12　　　　② -12

③ 16　　　　④ -16