高等数学自学丛书

数学分析基础

张效先　王金耀

山东人民出版社

高等数学自学丛书

数学分析基础

张效先　王金耀　编

山东人民出版社

一九八一·济南

内 容 提 要

本书介绍数学分析这门课程的基础知识，是一本入门读物。内容包括集合论及点集论、数列及其极限、单调数列和有界数列、实数集的完备性、函数、函数的极限、连续函数、初等函数及其连续性等。

本书可供中等学校数学教师、理工科大学生、工程技术人员以及知识青年阅读、参考。

高等数学自学丛书

数学分析基础

张效先　王金耀 编

*

山东人民出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　12印张　254千字

1980年11月第1版　1981年2月第2次印刷

印数：4,101—10,100

书号 13099·87　定价 1.05 元

出版说明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册.

这套丛书起点较低，系统性较强，次序的编排尽量作到由浅入深，由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点.在编写过程中，力求作到内容讲述详细，文字通俗流畅；书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示.因此，这套丛书适合自学，也可以作为这些课程的教学参考书.

这套丛书由山东师范学院数学系主持编写.此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、山东师范学院聊城分院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢.

一九八〇年四月

目　　录

第一章　预备知识

本章所介绍的集合论及点集论的初步理论，对于以后整个数学分析课程的学习，是必要的预备知识.

§1·1　集的概念

数学是一门严密的学科，新的概念通常要用某些已有的概念来给以确切的定义. 但是，在数学中终究不可避免地要有一些不加定义的概念作为最初的出发点. 比如说，数学概念 A 要用数学概念 B 来定义，B 要用数学概念 C 来定义等等，如此追根求源，又要避免循环（循环的例：A 是用 B 定义的，B 是用 C 定义的，而 C 又是用 A 定义的——这在数学上不允许），这就必然要有一些不加定义的数学概念来作为最先有的概念依据.

数学中不加定义的概念，都是些简单和容易被人们接受的基本常识. 如数 1 、几何上的点、直线、面，等等. 我们这里要指出，在本书中，集（或称为集合）就是一个不加定义的数学概念.

“不加定义”这个说法，也不能绝对化，比如某些集论的著作就是引入了一组特定的公理来定义集的. 我们在本书中，不采用公理定义集的方法. 因为集毕竟是个简单的基本概念，所以我们可以不加定义，而只用一些同义语，特别是

用一些例子来予以阐明.

一、集

集是满足某些特定性质的事物的全体．总体或整体，是一些对象的全部或汇集．集里的事物或对象，叫做这个集的元素．

例如：山东省高等学校的集；某学校在校师生的集；这页书上所有字的集；某房间内全部桌椅的集；大于100的一切整数的集；小于1的正无理数的集；所有长方形组成的矩形集等等．

由此可见，集这个概念对我们来说并不陌生．但是，尚需注意以下两点：

1.集的元素的相异性.

同一个集的诸元素作为元素来说是彼此不同的．例如我们可以说“由三枚一分硬币组成的集”，因为这三枚硬币虽然币值相同，但它们毕竟是三个不同的个体，不能说这枚硬币就是那枚硬币．但是，不要说某个集里有三个元素都是数1，这时我们只说数1是这个集里的元素就够了．

2.集的元素的确定性.

给出一个集，那么，某个元素是否是该集的元素，当然这必须是完全确定的，不能含糊不清．例如：“大于100的整数”，这是个集，在这个集中有哪些元素是完全确定的，如128是该集的元素，35就不是．但是，“很大的数”这句话就不能认为是给定了一个集．因为，多么大的数才是很大的数，这是含糊不清的；判定一个数是否很大的数的标准，不是确定的．

二、有关的符号

1. 通常用大写字母

A，B，C，…，X，Y，Z，…表示集，用小写字母

a，b，c，…，x，y，z，…表示集的元素．

2. $a\in A$（读作 a 属于集 A）表示 a 是集 A 的元素．

$a\notin A$（读作 a 不属于集 A）表示 a 不是集 A 的元素．

3. $A\subset B$ 或 $B\supset A$（读作集 A 包含于集 B，或集 B 包含集 A）表示集 A 是集 B 的子集，即集 A 的元素皆为集 B 的元素，或对于任意的元素 $a\in A$，必有 $a\in B$，后一句话常简记为

$$\forall a\in A \Longrightarrow a\in B.$$

其中符号 $\forall$ 表示任意，符号 $\Longrightarrow$ 表示"蕴含"或说"可推出"．

例 1 某班全体学生的集记为 X，该班全体男生的集记为 Y，则 $X\supset Y$．

例 2 设 A 是任意一个集，则显然有 $A\subset A$，这表明任何一个集都是它自身的子集．

4. $A=B$（读作集 A 等于集 B）表示集 A 的元素皆为集 B 的元素，并且集 B 的元素皆为集 A 的元素．也就是说 $A=B$ 等价于 $A\subset B$ 且 $A\supset B$．这个等价关系常简记为

$$A=B \Longleftrightarrow A\subset B \text{ 且 } A\supset B.$$

其中符号 $\Longleftrightarrow$ 表示等价．

例 3 某班全体学生的集记为 X，该班某次数学测验及格者的集记为 Y，如果该次测验确有不及格者，则

$$X\supset Y \text{ 且 } X\neq Y.$$

5. $A=\{a, b, c, d\}$ 表示 A 是由元素 a，b，c，d 组成的集．

值得注意的是，根据两个集合相等的概念，显然有

$$\{a,b,c,d\}=\{d,a,c,b\}=\cdots\cdots$$

即在一个集里的诸元素之间，不考虑它们的先后次序.

例4 $A=\{1, 4, 3\}$ 表示A是由数1，4，3组成的集.

$I^+=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$表示 I^+ 是由全体自然数组成的集. 于是

$$1\in A,\ 1\in I^+,\ 3\in A,\ 3\in I^+,\ 4\in A,\ 4\in I^+,$$
$$2\notin A,\ 2\in I^+,\ 0\notin A,\ 0\notin I^+,\ A\subset I^+,\ A\neq I^+.$$

6. $A=\{x|p(x)\}$ 表示使得命题 $p(x)$成立的所有 x 组成的集. 在花括号中短竖线左侧的 x 表示集A的元素，而竖线右侧则表示 x 须满足的条件.

例5 $A=\{x|x^2-1=0\}$表示A是由满足方程$x^2-1=0$的x组成的集，即 $A=\{-1, 1\}$.

例6 $B=\{x|\lg x<0\}$ 表示B是由满足不等式 $\lg x<0$ 的 x 组成的集，即满足不等式 $0<x<1$ 的一切实数 x组成的集，或表示为 $B=\{x|0<x<1\}$.

例7 $C=\{x|x\in I^+$并且$x^2<40\}$表示 C是由数1，2，3，4，5，6组成的集，即 $C=\{1,2,3,4,5,6\}$.

下面举出一些由平面上的点组成的集. 我们约定：$p(x, y)$表示坐标平面OXY上以(x, y)为坐标的点p.

例8 $A=\{p(x, y)|y=x^2+1\}$ 表示一抛物线，见图1—1.

例9 $B=\{p(x, y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 表示以坐标原点为圆心的单位圆的边界及内部，见图1—2.

例10 $C=\{p(x, y)|y>0$ 且 $y<x\}$ 表示在 x 轴以上

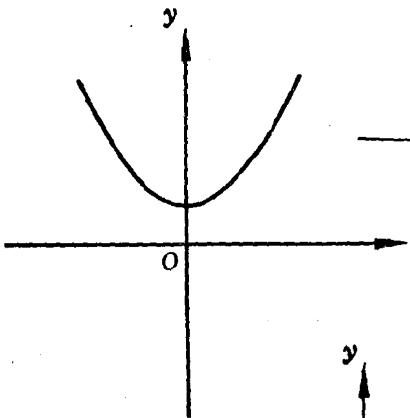

图 1—1

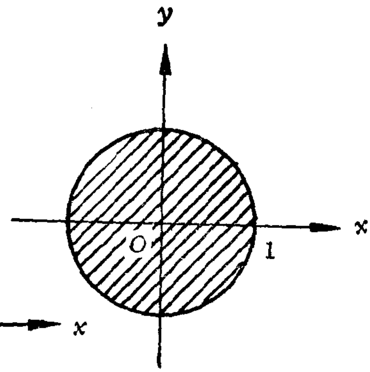

图 1—2

且在直线 $y=x$ 以下的平面区域，它不包括边界曲线．这区域位于第一象限，见图 1—3．

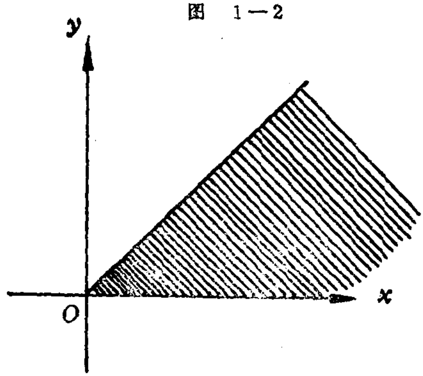

图 1—3

例11 $D=\{p(x,y)\,|\,x-y=0$ 且 $x+y=1\}$ 表示两直线 $x-y=0$ 和 $x+y=1$ 的交点的集，即由一个点 $p_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 所组成的集 $D=\{p_0\}$．

注意，由一个元素 a 组成的集 $\{a\}$ 和这一个元素 a 是不同的，前者是一个集，后者则是一个元素．

为了下一节介绍集的运算的需要，我们现在给出空集的概念。

7. ϕ表示空集，即不含有任何元素的集。

例12 $A=\{p(x,y)\mid 2x-y=1 \text{ 且 } y=2x+4\}$ 因为直线 $2x-y=1$ 和直线 $y=2x+4$ 相平行而没有交点，所以这个集里不含有任何元素，即$A=\phi$。

我们规定，空集是任何集的子集。可以这样理解：既然记号 $X\subset Y$表示集 X 的元素皆为集 Y 的元素；换句话说，$X\subset Y$表示集X不含有不属于Y 的元素。因此，对于任何集A而言，空集ϕ不含有不属于A 的元素。于是，对于任何集A，恒有

$$\phi\subset A.$$

再者，空集是唯一的，即若ϕ_1与ϕ_2是任意两个空集，则$\phi_1=\phi_2$。这是因为ϕ_1不含有不属于ϕ_2的元素；同样，ϕ_2也不含有不属于ϕ_1的元素。

8. 若$A\subset B$ 且$A\neq B$，则称集A 是集B 的真子集。

显然，集A 是集B的真子集等价于

$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$并且$\exists y\in B$但$y\notin A$。其中 符号$\exists$表示存在。

如在例1中，某班男学生的集Y是该班全体学生的集X的子集。如果该班确有女生，则Y是X的真子集。

再者，空集是任何集的子集，是任何非空集的真子集。

习 题 1·1

1. 将下面集合的元素，一一列举出来：

(1) $\{x\mid x^2-5x+4=0\}$；

(2) $\{x\mid x\text{是小于10的素数}\}$；

(3) $\{x|x$是首项为1，公差为2的等差数列的前三项$\}$；

(4) $\{x|x$是6的因数，6除外$\}$；

(5) $\left\{x \left| \dfrac{x^2-8x+15}{x-3}=0\right.\right\}$.

2.利用符号$\{x|p(x)\}$表示下面的集合：

(1)全体偶数；　　　　(2)全体奇数；

(3)全体有理数；　　　　(4) $\{1, 2, 3, 4\}$；

(5) $\{2, 4, 8, 16, 32, \cdots\}$.

3.判断下面的集是否相等：

(1) $\{a, b, c\}$与$\{b, c, a\}$；

(2) $\{\theta|\cos\theta=-1.3\}$与$\phi$；

(3) $\left\{x \left| \dfrac{x^2+5x-14}{x+7}=0\right.\right\}$与$\{2\}$；

(4) $\left\{\dfrac{1}{2}, 1.5, 3\right\}$与$\left\{3, \dfrac{3}{2}, 0.5\right\}$；

(5) $\{0\}$与ϕ.

4.全体两位整数的集里共有多少个元素？

5."小于$\frac{1}{2}$的正数"是不是一个集？为什么？

6.空集ϕ和由有限个元素组成的集统称为有限集，否则称为无限集.试举出两个有限集的例子和两个无限集的例子.

7.设$A=\{x, y, z\}$，试写出集A的所有子集.

8.设$A\subset B$，$B\subset C$，试证$A\subset C$（传递性）.

9.在坐标平面上绘出下列平面点集的图形：

(1) $A=\{p(x, y)|0<y<|x-1|\}$.

(2) $B=\{p(x, y)|x^2-4x+3\leqslant y\leqslant 0\}$.

(3) $C=\{p(x,\ y)|\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}\geqslant 1$ 且 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}\leqslant 1\}$.

§1·2 集的运算

今后，根据需要常常要将几个集并在一起，或选取几个集的公共部分等，这样就要进行集的运算.

一、并集、交集、差集的概念

将两个集的元素合在一起所成的新集叫做这两个集的并集，即

定义 1 集 $C=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为集 A 与集 B 的并集（或称为和集），记为

$$C=A\cup B.$$

换言之，集 A 与集 B 的并集，是属于 A 或属于 B 的全体元素所构成的集.（参看图 1－4）

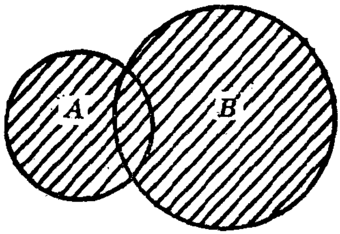

图 1－4

例 1 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$,
$B=\{d,e,f,g\}$.

在求 A 与 B 的并集时，根据集的元素的相异性，便有

$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$.

例 2 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$,
$C=\{a,c,e\}$,

则 $$A\cup C=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}=A.$$

实际上恒有：若 $A\supset C$，则 $A\cup C=A$.

定义 2 集 $C=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为集 A 与集 B 的交

集，记为

$$C=A\cap B.$$

换言之，集A与集B的交集，是既属于A同时又属于B的全体元素所构成的集.（参看图1—5）

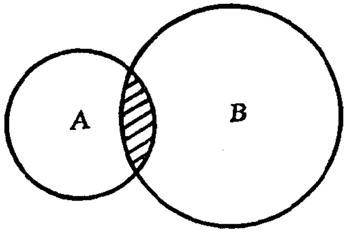

图 1—5

例3 设$A=\{a,b,c,d,e\}$，

$B=\{d,e,f,g\}$，

则 $A\cap B=\{d,\ e\}$.

例4 设$A=\{a,b,c,d,e\}$，

$C=\{a,\ c,\ e\}$，

则 $A\cap C=\{a,\ c,\ e\}=C$.

实际上，恒有：若$A\supset C$，则$A\cap C=C$.

定义3 $C=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$称为集A与集B的差集（或称为B在A中的补集），记为

$$C=A-B.$$

换言之，集A与集B的差集，是属于A但不属于B的全体元素所构成的集.（参看图1—6）

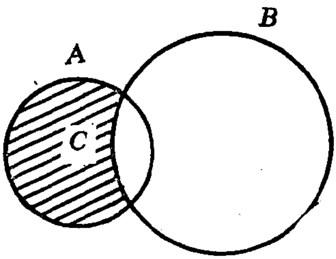

图 1—6

例5 对于例1、例2中的集A、B、C有下列关系：

$A-B=\{a,\ b,\ c\}$，

$B-A=\{f,\ g\}$；

$A-C=\{b,\ d\}$，

$C-A=\phi$，

$B-C=\{d,f,g\}$，

$C-B=\{a,\ c\}$.

二、集的运算性质

定理 1（集的运算律） 设A,B,C是任意三个集，则有

（交换律） $A\cup B=B\cup A$， （1）

$A\cap B=B\cap A$； （2）

（结合律） $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$， （3）

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$； （4）

（分配律） $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$， （5）

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$. （6）

很明显，（1）式和（3）式均可由定义 1 直接得到，（2）式和（4）式均可从定义 2 直接得到. 于是，需要证明的只是分配律的两个等式（5）和（6），下面先用具体例子说明（5）、（6）两式是成立的，然后给出等式（5）的证明，而把等式（6）的证明留作习题.

例 6 设$A=\{a, b, c, d, e\}$，

$B=\{d, e, f, g\}$，

$C=\{a, c, e, g, h\}$，

则 $(A\cup B)\cap C=\{a,b,c,d,e,f,g\}\cap\{a, c, e, g, h\}$

$=\{a, c, e, g\}$，

$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\{a, c, e\}\cup\{e, g\}$

$=\{a, c, e, g\}$.

这表明（5）式对于这具体的集A，B，C是成立的. 另一方面

$(A\cap B)\cup C=\{d, e\}\cup\{a, c, e, g, h\}$

$=\{a, c, d, e, g, h\}$，

$(A\cup C)\cap(B\cup C)=\{a,b,c,d,e,g,h\}\cap\{a,c,d,f,g,h\}$

$=\{a, c, d, e, g, h\}$.