THE WIDE VISION

# 景山大视野

JINGSHANDASHIYEJINGSHANDASHIYEJINGSHAN

初三几何（全一册）

课本中的

是什么

为什么

怎么办

北京景山学校主编

河北教育出版社出版

# 出版者的话

“思源于疑”，有思有疑能提高和进步。

学习是一个特殊的认知过程。在这个过程中，教师的帮助是重要的，但更重要的是学生能够通过自学，主动获取知识。自学就会遇到疑难，有了疑难怎么办？一套优秀的助学读物无疑是学生的良师益友。

北京景山学校是享誉海内外的国家级重点学校，该校根据多年的教学体会，邀请全国多家名校的名师，组织编写了这套《景山大视野——课本中的是什么，为什么，怎么办》丛书。

这套丛书充分吸收了景山学校和其他名校的教学理念和实践经验，以对学生进行素质教育为前提，培养综合能力为目的，从“解惑”的角度出发，深挖教材，启发式地帮助学生解答在学习过程中碰到的一些问题，同时使用精选的、具有针对性的习题帮助学生巩固在课堂上学到的知识。

每本书均与现行教材相配套，其内容按单元均分为六部分：

**(一)知识平台：**该部分详细给出本单元的知识重点、难点、疑点和能力要求，使学生对本单元内容一目了然，有助于学生总结复习。

**(二)学法旨要：**该部分按知识能力要求，以问答的形式从学习方法、知识导向、思维基础方面给出思路，引导学生开拓视野，达到事半功倍的效果。

**(三)精点答疑**:该部分以问答的形式写出课本中的是什么、为什么、怎么办,问题新颖,重点突出,分析透彻,解法规范,评点全面。

**(四)练习解答**:该部分将课本中课后主要习题按进度给出详细解答,以规范学生的解题方法。

**(五)知识链接**:该部分为课本的拓展和渗透性问题,源于课本但又高于课本,能满足知识水平较高学生的需要,为其今后的学习和升学打下基础。

**(六)同步题库**:给出一组配合本单元的练习题库。难度适宜,既照顾到大部分学生,又能满足能力较高学生的要求。

总之,这是一套源于课本又高于课本的、以创新为主线的新型助学读物。读者有了这套书,就像有了一位无言的名师。换言之,这套书是助学读物,是教参,是解答课本问题的百科全书,是开启智慧之门的金钥匙。

河北教育出版社

教改播智慧
桃李遍中华

景山教改系列丛书出版之贺

二〇〇二年六月 柳斌

# 序

过去，中小学除了学生用的课本以外，还有一本教师用的参考书，后来又发展到学生用的各种各样的参考资料。前两者是课堂教学用的，后者则是为升学考试用的。我在国外只见到过学生用的课本，没有见到过别的什么“教参”之类的东西。可见这是我们中国的特色。有了教师用的“教参”，可以帮助教师了解教学大纲的精神、要求，领会课本内容，抓住授课的重点和难点。这对于我国这样一个教育发展不平衡，师资水平不整齐的泱泱大国，无疑是有好处的。但对于一位高水平的老师来讲，恐怕并不是必须的，有时候甚至会束缚老师的思维。但是自从出现统一考试以后，“教参”的性质就变了，变成考试的指挥棒，于是不论是有水平的老师，还是没有水平的老师，都离不开“教参”了。至于学生用的参考资料则是五花八门，大多是练习题和解题的方法。学生无非想多了解各种题型，多做题，以便应付各种考试。出版商无非想从学生身上多赚些钱，于培养人才有多大好处却说不上来。

那么，是不是除了课本什么书都不要呢？当然不是。相反，学生需要阅读各种各样的课外读物来丰富他们的知识；老师也需要阅读各种图书以增强教学能力。教学参考书也是要的，但要把参考的眼光放大放宽，能够给学生和老师无论是在教学上还是学习上都有启发和帮助。因此要超越课本，更多的是给老师、学

生提供教、学的资料，供师生选择，指导学生选择正确的学习路线和学习策略，提供多种方法供学生选择。

景山学校是全国著名的实验学校，从它创建开始就开展教改实验。四十多年来他们在教学上有许多创新，积累了丰富的经验。由河北教育出版社与景山学校教师合作，也吸收其他学校的优秀教师参加，编写一套新的教学参考用书，我想会有新意。从他们设计的方案来看，这套书不同于一般的教师用的“教参”，也不同于学生用的练习册，既与课本有联系，又超越课本；既可以学生用，又可以教师用。这确有点新意。我不是学科专家，难以对它的内容作什么评价。它的价值恐怕要由广大教师和同学在使用过程中来评判。

顾明远

2002年3月23日于北京

# 目　　录

**第六章　解直角三角形** …………………… (1)
知识平台 …………………… (1)
学法旨要 …………………… (1)
精点答疑 …………………… (2)
练习解答 …………………… (32)
知识链接 …………………… (33)
同步题库 …………………… (39)
**第七章　圆** …………………… (56)
知识平台 …………………… (56)
学法旨要 …………………… (56)
精点答疑 …………………… (57)
练习解答 …………………… (139)
知识链接 …………………… (146)
同步题库 …………………… (159)

# 第六章　解直角三角形

## 知识平台

**重点**　本章的重点有三个，一是三角函数的定义，30°、45°、60°角的三角函数值和互余两角三角函数间的关系；二是直角三角形的解法，包括一些能化为直角三角形的几何问题；三是解直角三角形在实际中的应用性问题.

**难点**　本章的难点有三个，一是锐角三角函数定义的理解；二是正确选用边、角关系解有关直角三角形的问题；三是如何将实际问题转化为解直角三角形的问题.

**疑点**　本章的疑点有四个，一是理解三角函数概念时，应弄清哪些问题；二是互余两角三角函数间的关系适用于两角互余的情况，是否要求这两角是同一直角三角形的两个锐角；三是 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$，$\cot A$ 中的$\angle A$ 的角的记号"$\angle$"习惯上省略不写，但对于用阿拉伯数字表示的角，角的记号"$\angle$"能否省略不写；四是如何将非直角三角形的问题和实际应用的问题转化为解直角三角形的问题.

## 学法旨要

### 1. 学习本章的目标是什么？

本章的学习应达到以下目标：

(1)了解锐角三角函数的概念，能够正确地应用 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$，$\cot\alpha$ 表示直角三角形中两边的比.

(2)熟记 30°，45°，60°角的三角函数值，会计算特殊角的三角函数值以及与三角函数有关的代数式的值.

(3)掌握互余两角的三角函数关系和同角的三角函数关系.

(4)会用科学计算器由已知锐角求它的三角函数值，由已知三角函数值求它对应的锐角.

(5)了解解直角三角形的意义，掌握直角三角形中除直角外的五个元素之间的关系. 会运用勾股定理、直角三角形两锐角互余及锐角三角函数解直角三角形.

(6)了解仰角、俯角、坡度、方位角、方向角等概念，会用解直角三角形的有关知识解某些简单的实际问题.

(7)通过与三角形或四边形有关的实习作业，培养解决实际问题的能力和学数学用数学的意识.

(8)能从多种角度思考解答以三角函数为题设条件的三角形综合题，以提高解决综合问题的能力.

### 2. 学好本章知识的关键在哪里？

三角函数的概念是本章的重点，它是全章乃至整个三角学的预备知识. 有了它，对解直角三角形和引入任意角的三角函数概念就有了基础. 因此，它是学好本章的关键.

另一个关键是掌握方法. 其一是,应用数形结合的数学思想方法,即在推理论证、化简计算时,要注意画出图形,利用几何图形的直观性,加深对相关问题的理解和认识;其二是,紧密联系实际,加强应用意识,灵活应用解直角三角形的知识解决实际问题,培养创新能力;其三是,在计算距离、高度和角度时,要注意公式的选择和变换,合理设计解题程序,注意分类讨论和化归思想的应用.

## 精点答疑

### 1. 为什么要引进锐角三角函数?

在平面几何里,我们已比较系统地学习了直角三角形的有关性质. 如:

直角三角形的两个锐角互余;

直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方,即勾股定理;

直角三角形中,如果一个锐角等于 30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

借助这些性质,我们可以研究一些直角三角形中角与角、边与边和角与边之间的关系.

但是,如本章引言中的测量问题,要求出某些线段的长度,而这些线段中,有的端点测量者无法到达,使线段长度无法直接测得,这样的新问题单靠勾股定理无法解决.

在实际问题中,有时涉及的直角三角形,其锐角往往不是 30°、45°或 60°,所以单靠含 30°角的直角三角形和等腰直角三角形的知识,也不能解决新问题.

解决这类新问题,关键在于找到一种新的方法,为了更深刻、更普遍地揭示直角三角形中的边、角相依关系,必须引进锐角三角函数定义.

### 2. 学习锐角三角函数的概念时,应弄清哪些问题?

学习锐角三角函数的概念,应弄清以下问题:

(1)锐角三角函数的概念是以直角三角形和相似三角形为基础建立的.

(2)锐角三角函数是直角三角形的两边的比. 也就是说,在直角三角形中,每个锐角的正弦、余弦、正切、余切都是这个三角形的两边的比.

(3)$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$、$\cot\alpha$ 是整体符号,不能看成 $\sin\cdot\alpha$、$\cos\cdot\alpha$、$\tan\cdot\alpha$、$\cot\cdot\alpha$.

(4)锐角三角函数是一个比值,是一个实数,没有单位.

(5)当一个锐角确定之后,它的正弦、余弦、正切、余切中任意一个值都是不变的.

### 3. 为什么说当一个锐角确定后,它的正弦、余弦、正切、余切中任意一个值都是不变的?

当锐角 $A$ 确定后,即$\angle A$ 是一个固定值时,我们来看 $\sin A$ 的值是不是惟一的?

假设有多个直角三角形 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, …,它们有一个锐角相等.

我们把相等锐角的顶点 $A_1$, $A_2$, $A_3$, …重合在一起,记作 $A$,并使直角边 $A_1C_1$, $A_2C_2$, $A_3C_3$, …落在同一条直线上,则斜边 $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, …落在另一条直线上,如图 6-1所示.

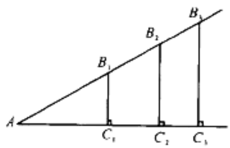


图 6-1

$\because$ $B_1C_1\perp A_1C_1$, $B_2C_2\perp A_2C_2$, $B_3C_3\perp A_3C_3$, …

$\therefore\ B_1C_1 /\!/ B_2C_2 /\!/ B_3C_3 /\!/ \cdots$

$\therefore\ \triangle AB_1C_1 \backsim \triangle AB_2C_2 \backsim \triangle AB_3C_3 \backsim \cdots$

$\therefore\ \dfrac{B_1C_1}{AB_1} = \dfrac{B_2C_2}{AB_2} = \dfrac{B_3C_3}{AB_3} = \cdots$

因此,在这些三角形中,$\angle A$ 的对边与斜边的比值是一个固定值,而这一固定值就是锐角 $A$ 的正弦值.

所以说当一个锐角确定后,它的正弦值是不变的.

请同学们用同样的方法证明,当锐角确定后,它的余弦、正切、余切值都是不变的.

并请用同样的方法考虑,锐角 $A$ 的其他三个三角函数值是怎样随 $\angle A$ 的变化而变化的?

### 4. sin0°为什么会等于 0?

我们知道,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90^\circ$,则 $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$的值在 0~1 之间变化.

通过查表我们知道:$\sin 0^\circ = 0$,这是为什么呢?

我们可以这样直观地考虑:在 Rt$\triangle ABC$ 中,不妨固定$\angle A$ 的邻边 $AC$. 当$\angle A$ 逐渐减小趋近 0°时,斜边 $AB$ 逐渐靠近$AC$,$\angle A$ 的对边 $BC$ 也随之逐渐缩短.一旦变化到$\angle A = 0^\circ$时,$\angle A$ 的对边 $BC$ 两个端点重合为一点,即 $BC = 0$,从而 $\sin 0^\circ = \dfrac{BC}{AB} = 0$.

试用同样的方法思考:为什么 $\sin 90^\circ = 1$,$\cos 0^\circ = 1$,$\cos 90^\circ = 0$,$\tan 0^\circ = 0$,$\cot 90^\circ = 0$,而且 $\tan 90^\circ$和 $\cot 0^\circ$均不存在?

### 5. 怎样才能更好地记住特殊角的三角函数值?

请看特殊锐角的三角函数值表:

| 三角函数值 \ $\alpha$ | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ |
| $\tan\alpha$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| $\cot\alpha$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ |

要记住这个应用广泛的数据表,不能单靠死记硬背,从以下几个方面理解记忆可帮你记准记牢:

(1)只要熟悉两个三角形,一个是有一个 30°角的直角三角形,另一个是等腰直角三角形.

在第一个三角形中,如图 6-2(1)所示,$\angle A = 30^\circ$,$\angle B = 60^\circ$,若设 $BC = 1$,则 $AB = 2$,$AC = \sqrt{3}$.从而 $\sin 30^\circ = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{2}$,$\sin 60^\circ = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

在第二个三角形中,如图 6-2(2)所示,$\angle A = \angle B = 45^\circ$,若设 $BC = 1$,则 $AC = 1$,$AB = \sqrt{2}$,从而 $\sin 45^\circ = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

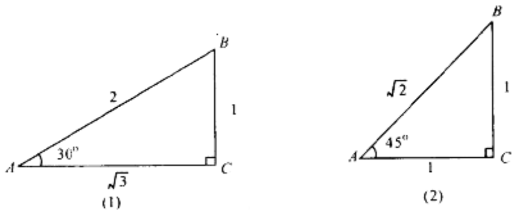


图 6-2

在此基础上，就容易记住这三个特殊角的正弦值了.

请用此法尝试记忆这三个特殊角的余弦值、正切值和余切值.

(2)利用关系式进行联想记忆的方法也是可取的.

当我们运用三角形法记准三个特殊角的正弦值后，可以利用平方关系 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得到相应的余弦值；也可以利用 $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ 求出三个特殊角的余弦值.

三个特殊角的正切值.除运用三角形记忆法外，还可以在掌握同一锐角的正弦值、余弦值的基础上，运用商数关系 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 求出.

对于三个特殊角的余切值，既可以利用 $\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$ 求出，也可以运用同角的倒数关系 $\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ 求出.

综上，采用联想记忆法，只需记准三个特殊锐角的正弦值，其他函数值也就相应记住了.

(3)另外 30°、45°、60°的正弦、余弦、正切值也可用下面口诀记忆.

1、2、3，3、2、1，3、9、27，弦比 2，切比 3，分子根号别忘添.其中余切值可利用正切与余切互为倒数求得.

**6. 命题“当锐角 A 取任何一个固定值时，∠A 的对边与斜边的比值是一个固定值”有什么重要性？**

(1)有了这一事实，我们就可以知道，∠A 的对边与斜边的比值由∠A 的值“惟一确定”.就是说，当∠A 在大于 0°且小于 90°的范围内取任何一个值时，比$\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$都有“惟一确定”的值(这个值大于 0 且小于 1)与∠A 对应.这样，我们才能用一个符号 $\sin A$ 来代表与∠A 对应的这个比值(即上述比的值).如果∠A 取固定值时，其对边与斜边的比值不是“惟一确定”的，我们就难以运用 $\sin A$ 来进行计算或推导.

(2)正因为 $\sin A$ 实际上是一个比值，所以有些书上把 $\sin A$ 看作一种“三角比”.正弦 $\sin A$、余弦 $\cos A$、正切 $\tan A$、余切 $\cot A$ 是最常用的四种三角比.至于为什么把 $\sin A$、$\cos A$、$\tan A$、$\cot A$ 叫做锐角三角函数，其原因只有等我们学到《代数》第十三章“函数及其图象”时才能明白.在本章中，我们可以把“锐角三角函数”作为一个专有名词来记忆.

**7. 对同一锐角 A，它的正弦、余弦、正切、余切之间有什么关系？**

对同一锐角 A，它的四个三角函数之间存在如下关系：

(1)平方关系：$\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

(2)商数关系：$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$，$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$.

(3)倒数关系：$\tan A=\frac{1}{\cot A}$，$\cot A=\frac{1}{\tan A}$.

由倒数关系可得又一个关系式：

$\tan A\cdot\cot A=1$.

怎样证明上述关系呢？仅以平方关系为例：

$\because\ \sin^2 A=\left(\frac{a}{c}\right)^2=\frac{a^2}{c^2}$，$\cos^2 A=\frac{b^2}{c^2}$，$a^2+b^2=c^2$，

$\therefore\ \sin^2 A+\cos^2 A=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$.

### 8. 公式：$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$，$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$，$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$，$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$，它们有什么作用？

至少有以下四个作用：

(1)可以把求某一锐角的三角函数值转化为求它的余角的三角函数值.

(2)有利于明白正弦表与余弦表、正切表与余切表为什么可以分别合成为一张表.就是说，一共只需要两张表，而不是四张表.

(3)有利于明白，当正弦值逐渐增大时，其余角的余弦值也逐渐增大.由于正弦值是随着锐角的增大而增大的，锐角变大了，其余角变小了.这就是说，余弦值随着锐角的减小而增大.同理，正切值随着锐角的增大而增大，余切值却随着锐角的减小而增大.

(4)有利于结合 Rt△$ABC$ 的图形理解直角三角形边角之间的关系.在$\angle C$为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别为$a$、$b$、$c$的条件下，知道$\sin A=\cos B$，$\cos A=\sin B$，$\tan A=\cot B$，$\cot A=\tan B$，在解题时就可以灵活运用其中的式子，使解直角三角形的过程变得简单.

### 9. 怎样求锐角三角函数式的值？

**例** 求下列各式的值：

(1)$\sin30°-\cos0°\cdot\tan60°+\cot30°-2\cos^2 45°$；

(2)$\sqrt{(\cos30°-1)^2}+|\sin60°-1|$；

(3)$\sin^2(30°+\theta)+\cos^2(30°+\theta)-\frac{\sin(30°+\theta)}{\sin(60°-\theta)}\cdot\tan(60°-\theta)$；

(4)$\sqrt{1-\sin^2 20°}+\left|\sin20°-\frac{1}{2}\right|-\sqrt{\tan33°\cdot\tan57°-2\sin20°\cdot\cos20°}$.

**规范解法**

(1)原式$=\frac{1}{2}-1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}-2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1$

$=-\frac{1}{2}$.

**思路启迪** 求锐角三角函数式的值不仅应准确掌握特殊角的三角函数值，还应认真观察各锐角间的关系及三角函数名称之间的关系，灵活运用同角或互为余角的三角函数关系进行变形.

**点评** (1)在化简过程中除应准确掌握特殊角三角函数值外，还应注意到角度不同时各三角函数间的大小关系.

(2)化简过程中应注意区分以下三个根式的化简结果：①$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\cos\alpha$，由于$\alpha$是锐角，$0<\sin\alpha$，$\cos\alpha<1$，此时无须考虑$\cos\alpha$的符号问题.②$\sqrt{(\sin\alpha-1)^2}=|\sin\alpha-1|=1-\sin\alpha$，此时无须考虑“$1-\sin\alpha$”的符号变化情况.③$\sqrt{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=$

(2)原式$=|\cos30^\circ-1|+|\sin60^\circ-1|$

$=1-\cos30^\circ+1-\sin60^\circ$

$=2-\dfrac{\sqrt3}{2}-\dfrac{\sqrt3}{2}$

$=2-\sqrt3$.

$|\sin\alpha-\cos\alpha|=\begin{cases}\cos\alpha-\sin\alpha & (0^\circ<\alpha<45^\circ),\\ 0 & (\alpha=45^\circ),\\ \sin\alpha-\cos\alpha & (45^\circ<\alpha<90^\circ),\end{cases}$ **此时由于随 $\alpha$ 角的变化 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的大小在变化，所以须讨论各种范围内 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的符号变化情况.**

(3)原式$=1-\dfrac{\sin(30^\circ+\theta)}{\cos(30^\circ+\theta)}\cdot\cot(30^\circ+\theta)$

$=1-\tan(30^\circ+\theta)\cdot\cot(30^\circ+\theta)$

$=1-1=0$.

(4)原式$=\cos20^\circ+\dfrac12-\sin20^\circ-\sqrt{1-2\sin20^\circ\cdot\cos20^\circ}$

$=\dfrac12+\cos20^\circ-\sin20^\circ-\sqrt{(\sin20^\circ-\cos20^\circ)^2}$

$=\dfrac12+\cos20^\circ-\sin20^\circ-(\cos20^\circ-\sin20^\circ)$

$=\dfrac12$.

## 10. 怎样运用同角的三角函数关系式解题?

同角三角函数的基本关系式主要有:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$; $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

这些关系式在解题时非常有用，主要应用有三个方面，现举例说明.

(1)已知某角的一个三角函数值，求其他三角函数值.

在问题 5 的利用关系式进行联想记忆法中已涉及到这种应用，不再举例.

(2)化简求值或证明.

**例 1** 不查表，计算 $\sin85^\circ-\cot5^\circ\cdot\sin5^\circ+\dfrac{\cos18^\circ\cdot\tan45^\circ\cdot\cos30^\circ}{(\sin^214^\circ+\sin^276^\circ)\cdot\sin72^\circ}-\dfrac{2\cos60^\circ}{\tan33^\circ\cdot\tan57^\circ}$.

答案：$\dfrac{\sqrt3}{2}-1$.

**例 2** 已知锐角 $A$、$B$ 满足 $A+B=90^\circ$，且 $\tan A+\tan B=3$. 求证：$\tan^2A+\cot^2A=7$.

**规范证法** $\because\ A+B=90^\circ$，$\therefore\ \cot A=\tan B$.

又 $\tan A+\tan B=3$，$\therefore\ \tan A+\cot A=3$.

方法一：$\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}=3$，$\dfrac{\sin^2A+\cos^2A}{\sin A\cos A}=3$，

$\because\ \sin^2A+\cos^2A=1$，$\therefore\ \sin A\cos A=\dfrac13$，

$\therefore\ \tan^2A+\cot^2A=\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}+\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}=\dfrac{\sin^4A+\cos^4A}{\cos^2A\sin^2A}$

$=\dfrac{(\sin^2A+\cos^2A)^2-2\sin^2A\cos^2A}{\cos^2A\sin^2A}=\dfrac{1-2\times\frac19}{\frac19}=7$.

方法二：$\tan A+\dfrac{1}{\tan A}=3$，$\tan^2A-3\tan A+1=0$，

解得 $\tan A=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

当 $\tan A=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$时，$\cot A=\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$；

当 $\tan A=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$时，$\cot A=\frac{2}{3-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore\quad \tan^2A+\cot^2A=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=7.$

**例 3** 已知方程 $x^2+mx+n=0$ 的两个根是直角三角形两个锐角的余弦值，求证：$m^2-2n=1$.

**规范证法** 由题意可设该直角三角形为 $Rt\triangle ABC$，$\angle C=90°$. 则 $\cos A$、$\cos B$ 是方程 $x^2+mx+n=0$ 的两个根，由根与系数的关系，得

$$\begin{cases}\cos A+\cos B=-m, & ①\\ \cos A\cdot\cos B=n. & ②\end{cases}$$

$\because\quad A+B=90°,\quad\therefore\quad \cos B=\sin A.$

$\therefore$ ①，②又可化为 $\begin{cases}\cos A+\sin A=-m, & ③\\ \cos A\cdot\sin A=n. & ④\end{cases}$

$\because\quad \sin^2A+\cos^2A=1,\quad\therefore\quad 1=\sin^2A+\cos^2A=(\sin A+\cos A)^2-2\sin A\cos A.$

把③、④代入，得 $1=m^2-2n$.

## 11. 应用同角三角函数关系时，应注意哪些问题？

应用同角三角函数关系时，应注意以下几点：

(1)不能忽视这些三角函数关系式成立的前提条件："同角".

当角不相同时，三角函数关系式就不一定成立，如 $\sin^2 45°+\cos^2 30°\neq 1$.

(2)同角三角函数关系式成立的角的范围，不只限于同一锐角，更不是只限于同一特殊锐角. 如：$\sin^2 0°+\cos^2 0°=1$，$\sin^2 90°+\cos^2 90°=1$，$\sin^2 68°+\cos^2 68°=1$，$\tan 0°=\frac{\sin 0°}{\cos 0°}$，$\cot 90°=\frac{\cos 90°}{\sin 90°}$等均成立.

(3)运用平方关系式有时需对符号做出选择：$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$，$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，当 $\alpha$ 为锐角时，因 $\alpha$ 的正弦、余弦都是正的，故只取"+"号，即

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

(4)解题时，同角间的三角函数关系式常与如下关系式搭配使用：

$\sin A=\cos(90°-A)$，$\cos A=\sin(90°-A)$. $\quad\tan A=\cot(90°-A)$，$\cot A=\tan(90°-A)$.

其中$\angle A$ 为锐角.

(5)对关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，以及 $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$，要注意逆向思维：$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，$1=\tan\alpha\cdot\cot\alpha$. 有时"1"在解决问题时有"妙用".

## 12. 求锐角三角函数值的常用方法有哪些？

(1)已知一锐角的一个三角函数值，求这个锐角的其他三角函数值，其方法有二. 一是将此锐角置于一直角三角形中，根据勾股定理和锐角三角函数的定义来求；二是利用同角三角函数间的关系来求.

**例 1** 已知：$A$ 为锐角，$\cos A=\dfrac{15}{17}$. 求 $\tan A$ 的值.

**规范解法**

方法一：作 Rt△$ABC$，使 $\angle ACB=90^\circ$（如图 6-3）.

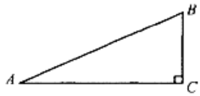

图 6-3

∵ $\cos A=\dfrac{15}{17}$，不妨设 $AB=17k$，$AC=15k$，

则 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8k$，

∴ $\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{8}{15}$.

**注** 锐角三角函数值是一个比值，所以我们选择设"$k$"法，来表示出边长.

方法二：∵ $A$ 为锐角，$\sin^2A+\cos^2A=1$.

∴ $\cos A=\dfrac{15}{17}$时，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{8}{17}$.

∴ $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{8}{15}$.

（2）已知锐角在直角三角形中时，利用勾股定理和锐角三角函数的定义求其三角函数值.

**例 2** 在 Rt△$ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 $a$、$b$、$c$，且 $a=5$，$c=7$. 求 $\angle A$ 的四个三角函数值.

**思路启迪** 在 Rt△$ABC$ 中，已知两边 $a$、$c$ 的长，根据勾股定理可求 $b$ 边的长；然后利用锐角三角函数的定义求 $\angle A$ 的四个三角函数值.

**规范解法** 在 Rt△$ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$a=5$，$c=7$.

∴ $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{49-25}=2\sqrt{6}$.

∴ $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{5}{7}$；$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$；

$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{2\sqrt{6}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$；$\cot A=\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

**例 3** 已知 Rt△$ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$a:b=2:3$，求 $\sin A$ 和 $\cot B$.

**思路启迪** 由已知设 $a=2k$，$b=3k$，用勾股定理求出斜边 $c$，再利用锐角三角函数的定义求 $\sin A$，$\cot B$.

**规范解法** ∵ $a:b=2:3$.

∴ 设 $a=2k$，$b=3k(k>0)$，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2k)^2+(3k)^2}=\sqrt{13}k$.

∴ $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2k}{\sqrt{13}k}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$， $\cot B=\dfrac{a}{b}=\dfrac{2k}{3k}=\dfrac{2}{3}$.

（3）当所求锐角三角函数的锐角不在直角三角形中时，要先构造一个直角三角形，使这个锐角在其构造的直角三角形中，然后再根据锐角三角函数的定义求之.

**例 4** 如图 6-4，△$ABC$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=1+\sqrt{3}$，$AC=2$，求 $\angle B$ 的正弦值.

**思路启迪** 告诉我们一个三角形的三条边，但根据勾股定理逆定理它不是直角三角形，所以不能直接利用边与边的比来求三角函数值. 怎么办？我们首先要有一个直角三角形才行. 故过 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于 $D$.

**规范解法** 过 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于 $D$.

令 $BD=x$,则 $CD=1+\sqrt{3}-x$.

$\because$ $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle ACD$ 共用一条直角边 $AD$.

$\therefore$ $AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$.

$\therefore$ $2-x^2=4-(1+\sqrt{3}-x)^2$.解得 $x=1$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABD$ 中,$\angle ADB=90^\circ$.

$\therefore$ $\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

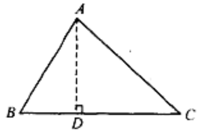

图 6-4

**注** 当题中没有直角三角形时,过某一顶点作一边的垂线(这是我们常添的一条辅助线),从而构成了直角三角形.另外,本例中还应用了代数中的方程思想:设出未知量,利用公共边建立方程.

**例 5** 已知:如图 6-5,$\triangle ABC$ 中,$\angle A=90^\circ$,$AB=AC$,$AD:DC=1:2$.求:$\angle DBC$ 的四个三角函数值.

**思路启迪** 由上例可知,应该添垂线,从而把$\angle BDC$ 放在直角三角形中.

**规范解法** 过 $D$ 作 $DE\perp BC$ 于 $E$,设 $AD=x$.

$\because$ $AD:DC=1:2$,$AB=AC$,

$\therefore$ $DC=2x$,$AB=AC=3x$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中,

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{(3x)^2+x^2}=\sqrt{10}x$.

在 $Rt\triangle CDE$ 中,$\angle C=45^\circ$,$DE^2+CE^2=DC^2$,

$\therefore$ $CE=DE$, $2DE^2=(2x)^2$. $\therefore$ $DE=\sqrt{2}x$.

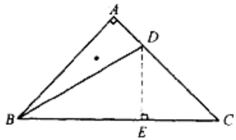

图 6-5

$\therefore$ $\sin\angle DBC=\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{10}x}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$;$\cos\angle DBC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$;$\tan\angle DBC=\dfrac{1}{2}$;$\cot\angle DBC=2$.

(4)当不能直接求出其值时,可考虑引入一个与此锐角相等或互余的角,通过求所引入角的三角函数值求之.

**例 6** 已知:$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形(如图 6-6),$\angle ACB=90^\circ$,过 $BC$ 的中点 $D$ 作 $DE\perp AB$,垂足为 $E$,连结 $CE$,求 $\sin\angle ACE$ 的值.

**思路启迪** 过 $E$ 作 $EF\perp BC$ 于 $F$,将$\angle ACE$ 的余角$\angle ECB$ 放在 $Rt\triangle ECF$ 中,通过求 $Rt\triangle ECF$ 中边之间的关系求 $\cos\angle ECB$ 的值.

**规范解法** 过 $E$ 点作 $EF\perp BD$,$F$ 为垂足.

$\because$ $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore$ $\angle A=\angle B=45^\circ$,$AC=BC$.$\because$又 $DE\perp AB$,

$\therefore$ $\triangle DEB$ 也是等腰直角三角形.

设 $BE=k$,则 $CD=BD=\sqrt{2}k$.

$BC=2BD=2\sqrt{2}k$,$DF=EF=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$.

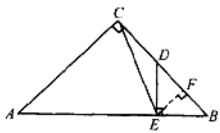

图 6-6

$CF=CD+DF=\sqrt{2}k+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}k$.

在 $Rt\triangle CEF$ 中,由勾股定理得 $CE=\sqrt{EF^2+CF^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}k\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}k\right)^2}=\sqrt{5}k$.

在Rt△$CEF$中，由三角函数定义得$\cos\angle ECF=\dfrac{CF}{CE}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

又∵ $\angle ACE+\angle ECF=90^\circ$,

∴ $\sin\angle ACE=\cos\angle ECF=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

## 13. 如何解关于"直角三角形两锐角的正弦是方程的两个根"的问题?

解这个问题的关键是，如何转化两锐角的正弦值.

**例** $m$为何值时，方程$(m+15)x^2-(3m+5)x+12=0$的两根分别是一个直角三角形两锐角的正弦.

**规范解法** 当$m=-15$时，不满足题目要求.

当$m\neq-15$时，设直角三角形的两锐角为$A$,$B$.

则$\begin{cases}\sin A+\sin B=\dfrac{3m+5}{m+15}, & ①\\ \sin A\cdot\sin B=\dfrac{12}{m+15}. & ②\end{cases}$

①式两边平方，得

$$\sin^2A+2\sin A\cdot\sin B+\sin^2B=\left(\frac{3m+5}{m+15}\right)^2. \quad ③$$

∵ $A+B=90^\circ$, ∴ $\sin B=\cos A$，则$\sin^2A+\sin^2B=1$.

再将②式代入③式，得$1+\dfrac{24}{m+15}=\left(\dfrac{3m+5}{m+15}\right)^2$.

整理，得$m^2-3m-70=0$. 解得$m_1=10$, $m_2=-7$.

经检验，当$m=-7$时，原方程无实数根.

故$m$的值为10.

**思路启迪** 本题是一道三角函数与一元二次方程知识的综合题. 这里，借助根与系数关系定理解题时，还要兼顾正弦值的几何意义.

**点评** 与一元二次方程结合的几何问题，要检验根的实际意义. 也可把$m=-7$代入①中，右边$<0$，而左边$>0$，故应舍去$m=-7$. 解题时应注意本题中的三个隐含条件：(1)方程有两根，则它是一元二次方程；(2)Rt△$ABC$中，$\angle A+\angle B=90^\circ$，则$\sin A=\cos B$；(3)$\sin A+\sin B>0$和$\sin A\cdot\sin B>0$.

## 14. 解直角三角形时总体上应明确哪些问题?

(1)明确什么叫解直角三角形.

在Rt△$ABC$中，共有6个元素：三角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$和三边$a$、$b$、$c$. 除直角$C$外，还有3条边和两锐角. 解直角三角形，就是由除直角外的已知元素，求出所有未知元素的过程.

(2)明确除直角$C$外的5个元素间有何关系.

①三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$(勾股定理).

②锐角之间的关系：$\angle A+\angle B=90^\circ$.

③边角之间的关系：

$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$； $\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$；

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\dfrac{a}{b}$； $\cot A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}=\dfrac{b}{a}$.

其中的$\angle A$用$\angle B$代替，关系式仍然成立.

(3)明确解直角三角形的依据是什么.