《数理天地》丛书　主编：周国镇

历届希望杯全国数学邀请赛试题详解

·高中一年级·

"希望杯"全国数学邀请赛
命题委员会　编

HOPE

气象出版社

《数理天地》丛书 主编 周国镇

历届“希望杯”全国数学邀请赛试题详解

高中一年级

“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会 编

气象出版社

图书在版编目(CIP)数据

历届"希望杯"全国数学邀请赛试题详解. 高一/周国镇主编. —北京:气象出版社,2002.1

ISBN 7-5029-3252-6

Ⅰ.历… Ⅱ.周… Ⅲ.数学课-高中-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 067958 号

责任编辑:黄丽荣　终审:周诗健

封面设计:彭小秋　责任技编:刘祥玉　责任校对:庚　申

气象出版社出版发行

(北京市海淀区中关村南大街 46 号　邮政编码:100081　电话:68406961)

北京市王史山印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

开本:787×1092　1/32　印张:9.25　字数:206 千字

2002 年 1 月第一版　2002 年 1 月第一次印刷

印数:1～6000

ISBN 7-5029-3252-6/G·0949

定价:13.00 元

出版前言

“希望杯”全国数学邀请赛自1990年开始举办，至今已经十二届了。第一届有11万名中学生参加，到第九届，每年的参赛人数都超过百万。12届以来，参赛中学生累计超过800万。国内中学生学科竞赛活动，有如此大的规模，有如此众多的中学生参加，除“希望杯”之外，还没有第二个。这充分说明了“希望杯”在中学生中受欢迎的程度。中学生为什么喜欢参加“希望杯”？很重要的一个原因是题目出得好，出得漂亮，有较大的思维空间。“希望杯”命题委员会拥有国内第一流的数学竞赛方面的专家，他们精心地编拟了历届的试题。同学们正是通过做这些题，学习它们、研究它们，从而更扎实、更开阔地掌握了知识，增长了智慧和才干，使学习更有信心，成绩更出色。“希望杯”如同一把金钥匙，对每个参赛的中学生，它既开启了智慧之门，更开启了信心之门。这正是“希望杯”的魅力所在。

在中学任教的数学老师们，同他们的弟子一样也很喜欢“希望杯”——因为，从这个“杯”中，层出不穷，不断涌现出来的一个一个问题，为改进自己的教学，带出高水平的学生提供了难得的素材和有益的启示。

为了让更多的中学生和他们的老师（尤其是没有参加过“希望杯”的），也能共享我们十余年来的智慧结晶，我们将第一届至第十一届的试题按初一、初二、高一、高二这四个年级分四册出版，供四个年级的师生分别使用。书中不当之处，请读者批评指正。

周国镇

“希望杯”命题委员会主任

2001年11月1日

“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会

主　任　周国镇　《数理天地》杂志社社长、总编

副主任　周春荔　首都师范大学数学系教授

　　　　那吉生　中国科学院数学科学与系统科学研究院研究员

　　　　余其煌　中国科学院数学科学与系统科学研究院研究员

高中一年级命题组成员

组　长　王人伟　北京航空航天大学附中特级教师

成　员　韩於羹　北京航空航天大学教授

　　　　连四清　首都师范大学副教授

　　　　周沛耕　北京大学附中特级教师

　　　　葛孟增　北京航空航天大学附中高级教师

　　　　葛　军　南京师范大学数学系副教授

　　　　吴　康　华南师范大学数学系副教授

希望杯数学邀请賽有
利于學生有利於教師
将促進中国数学教育
的发展

王寿仁 一九九〇年 五月

王寿仁：中国著名老数学家、原中国数学奥委会主席

寄希望于教育，
寄希望于青少年。

祝首届"希望杯"数学邀请赛
胜利举行

杨乐
1990年5月

杨 乐：中国科学院院士、国际著名数学家

肩负着祖國的希望，
迎接廿一世纪的到来！

龚昇

95年7月

龚 昇：原中国科学技术大学副校长、著名数学家

青出于蓝而胜于蓝，希望寄托在年轻一代身上。

梅向明

90.11.30.

梅向明：原北京师范学院院长、著名数学家、民进中央副主席

目　录

试题及解答

第一届(1990 年)

第一试

试　　题

一、选择题　以下每题的四个结论中,仅有一个是正确的,请将正确答案的英文字母填在每题后面的圆括号内.

1. 异面直线是指　　(　　)

(A)两条不同的直线.

(B)分别在两个平面内的两条直线.

(C)与任何一条直线都不相交的两条直线.

(D)不共面的两条直线.

2. 下面的四句话中,仅有一句是对的,这句话是　　(　　)

(A)平面 α 的斜线 l 与 α 所成的角的取值范围是 $[0°,90°)$.

(B)平面 α 的斜线 l 与 α 所成的角的取值范围是 $(0°,180°)$.

(C)平面 α 的斜线 l 与 α 所成的角的取值范围是 $(0°,90°)$.

(D)平面 α 的斜线 l 与 α 所成的角的取值范围是 $(0°,90°)\cup(90°,180°)$.

3. 由二面角的平面角的概念可以推知　　(　　)

(A)二面角的棱垂直于二面角的平面角所确定的平面.

(B)从二面角的棱上任意一点,在二面角的两个平面内各引出一条射线,在这两条射线构成的角中,这个二面角的平面角是最大的.

(C)二面角的平面角只能是锐角.

(D)二面角的平面角不能是 $180°$.

4. 元素 $\alpha=\cos30°$ 与集合 $M=\{x|\sin3<x<1/2\}$ 的关系应当表示成为 ( )

(A)$\alpha\subset M$.　　(B)$\alpha\in M$.

(C)$\alpha\not\subseteq M$.　　(D)$\alpha\notin M$.

5. 如果 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$,则 $\sin\theta,\cos\theta,\tan\theta$ 的大小关系是( )

(A)$\sin\theta<\cos\theta<\tan\theta$.　　(B)$\cos\theta<\sin\theta<\tan\theta$.

(C)$\tan\theta<\sin\theta<\cos\theta$.　　(D)$\cos\theta<\tan\theta<\sin\theta$.

6. M、N 是彼此不相等的两个非空集合,$M\cup N=P$ 且 $P\subseteq N$,则 $M\cap N=$ ( )

(A)M.　(B)N.　(C)P.　(D)ϕ.

7. 给出下面的六个函数:

(1)$y=3x-5$,　　(2)$y=\sin x$,

(3)$y=-x^2$,　　(4)$y=-\frac{1}{x}$

(5)$y=\log_2(-x)$　　(6)$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

其中,在区间$(-\infty,0)$上递减的函数的个数是 ( )

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

8. 已知集合 $M=\{1990,3,25\}$,则 M 的所有子集的个数是 ( )

(A)5.　(B)6.　(C)7.　(D)8.

9. 函数 $y=\sqrt{(2+x)(6-x)}$ ( )

(A)有最小值,没有最大值.

(B)有最大值,没有最小值.

(C)有最小值,也有最大值.

(D)没有最小值，也没有最大值.

10. 以 a,b,c 顺次分别表示方程

$x+\log_2 x=2$、$x+\log_3 x=2$、$x+\log_2 x=1$ 的根，则它们的大小关系是 ( )

(A)$a>b>c$. (B)$b>a>c$.

(C)$c>a>b$. (D)$c>b>a$.

二、填空题

11. 边长为 2 的正三角形的面积是________.

12. 函数 $y=-x^2+2$ 在区间$[0,+\infty)$上的反函数是 $y=f(x)$，则 $f(1)=$________.

13. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为对角线 A_1D 上的一点，Q 为对角线 B_1D_1 上的一点，则线段 PQ 的长度的最小值是________.

14. $\sqrt{(\sin x-1)^2+(1+\sin x)^2}$的最简结果是________.

15. 若 $2^x=(\sqrt{2})^{y+2}$ 并且 $9^y=3^{x-1}$，则 $x+y$ 的值是________.

16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AD_1 所在直线为 l，A_1C_1 所在直线为 m，则二异面直线 l,m 所成的角的度数是________.

17. 如果 $P=\sin 1970°-\sin 1990°$，$Q=\sin 1970°+\sin 1990°$则 $2^{PQ}=$________.

18. 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形 $ABCDSO$ 是锥高，$SO=\frac{1}{2}$，若 $SA=SD,SB=SC$，则面 ASB 与面 CSD 所成的二面角的度数是________.

19. 函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}$的最大值是________.

20. 函数 $f(x)$ 对一切实数 x 都满足 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$，并且方程 $f(x)=0$ 有三个实根，这三个实根的和是________.

答·提示

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	A	D	B	A	B	D	C	B

提示：

1. 考虑两条不同的平行线 $a /\!/ b$. 它们可确定一个平面，因而 a,b 不是异面的两条直线，故不选(A).

考虑正方体，它的不在同一个表面上的两条互相平行的棱所在直线不是异面的，故不选(B).

设 a,b 是异面的，d 是它们的公垂线，则 a 与 d,b 与 d 都相交. 因此不能说"异面直线是与任何一条直线都不平行的两条直线，故(C)也不对.

根据定义知，选(D).

2. 首先，斜线 l 与 α 所成的角是不超过 90°的角，因此(B)，(D)不对.

如果 l 与 α 成 0°角，则 $l\subset\alpha$ 或 $l /\!/ \alpha$. 与"l 是 α 的斜线"的条件矛盾. 因此不选(A). 根据排除原则，应选(C).

3. 根据二面角的平面角的定义，二面角的平面角可以是钝角，甚至可以是 180°。因而(C)、(D)不对.

考虑直二面角的两个半平面(例如正方体相邻的表面，如图 1)，在直二面角棱 CC_1 上取 CC_1 的中点，连结 MB、MD_1，

则 MB、MD_1 分别在直二面角 $B-CC_1-D_1$ 的两个半平面内.设正方体棱长为 1,则

$$\cos\angle BMD_1=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=-\frac{1}{5}.$$

可见$\angle BMD_1$ 是钝角.这说明(B)不对.根据排除原则,选(A).

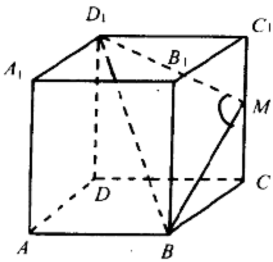

图 1

4. $\alpha=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$. M 中的元素应具有条件 $x<\frac{1}{2}$. 因为 $\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}$,所以 $\alpha\notin M$. 选(D).

5. 例如取 $\theta=\frac{\pi}{3}$,它满足 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$,这时 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,显然 $\tan\frac{\pi}{3}>\sin\frac{\pi}{3}>\cos\frac{\pi}{3}$,因此选(B).

6. 由 $M\cup N=P\subseteq N$,可知下列两个结论同时成立:

$N\supseteq M\cup N$,

$N\subseteq M\cup N$,

$\therefore\quad N=M\cup N$,

$\therefore\quad N\cap N=M$. 选(A).

7. 函数 $y=\log_2(-x)$的图像与函数 $y=\log_2 x$ 的图像关于 y 轴对称,所以函数 $y=\log_2(-x)$定义在$(-\infty,0)$,且是减函数.而题目中其他各函数都不是$(-\infty,0)$上的减函数,因此选(B).

8. 一般地，含 $n(n\in N)$ 个元素的集合 P 的子集合数目是 2^n. 本题中 M 含 3 个元素，因此 M 的子集有 $2^3=8$ 个. 选(D).

9. 函数 $y=\sqrt{(2+x)(6-x)}$ 的定义域是 $[-2,6]$. 当 $x=2$ 时，它有最大值 4，当 $x=-2$ 或 $x=6$ 时，它有最小值 0. 因此选(C).

10. 方程 $x+\log_2 x=1$ 即 $\log_2 x=1-x$. 分别作出函数 $y_1=\log_2 x$，$y_2=1-x$ 的图像后可知(见图 2)该方程有唯一解 $x=1$.

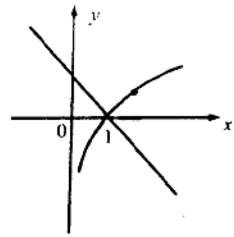

图 2

同理，方程 $x+\log_2 x=2$，以及方程 $x+\log_3 x=2$ 的解由图 3，图 4 中的 x_1,x_2 分别给出：

可见 $1<x_1<x_2$. 也就是 $b>a>c$，选(B).

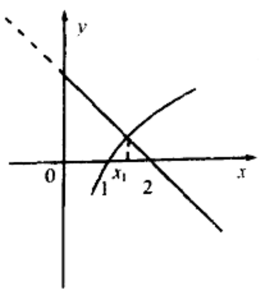

图 3

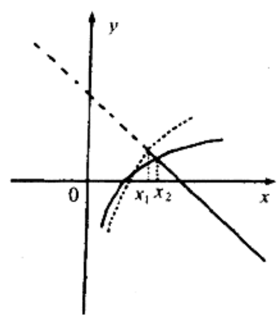

图 4

二、填空题

题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	1	60°	1	90°	$\sqrt{6}$	1.5