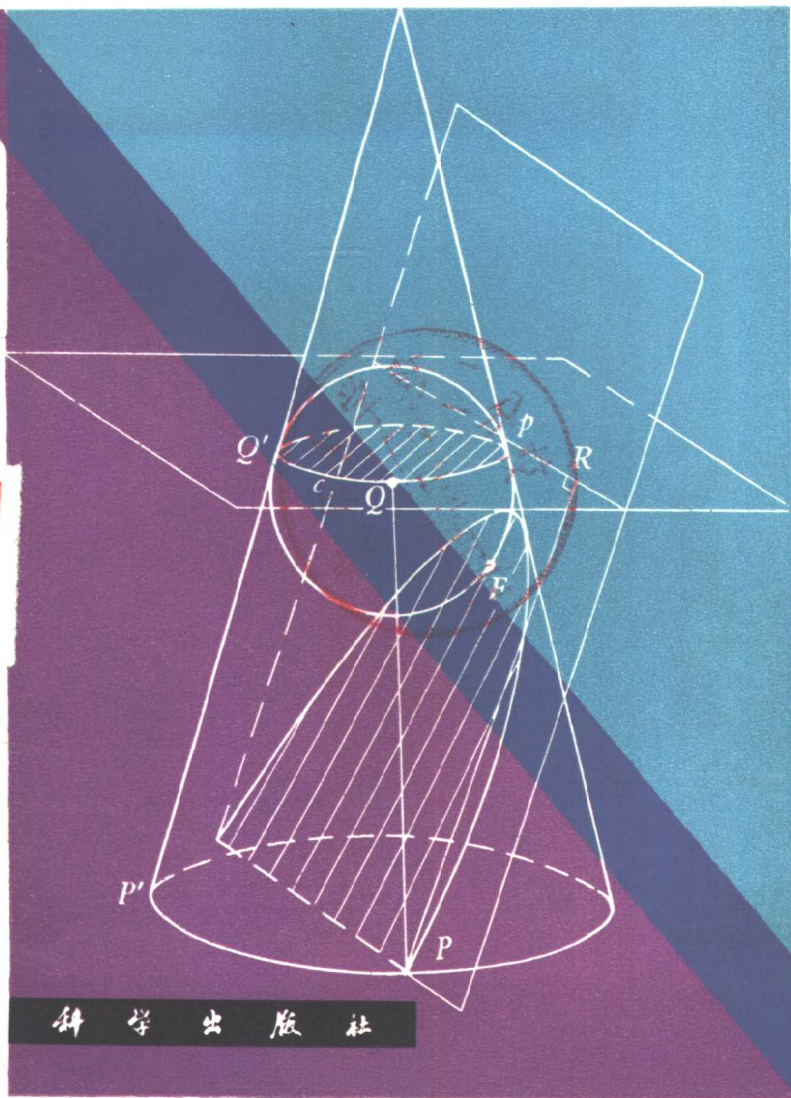


# 几何学的源起与演进

项武义



科学出版社

数学小丛书

# 几何学的源起与演进

项武义

科学出版社

1983

## 内 容 简 介

美国加利福尼亚大学数学系教授项武义等，怀着为祖国四化贡献一份力量的满腔热情，为我国青年编写了一套供课外阅读的《数学小丛书》，每册只讲一个主题，本书是继《从算术到代数》之后的第二本。

本书以空间的“形”为主线，由浅入深地介绍了平面几何、立体几何以及解析几何的基本概念和基本法则，并扼要地介绍了它们的源起和发展。为便于自学，每章均附有练习和思考题。该书取材广泛，阐述新颖，内容浅显易懂。

本书可供广大中学生、中学教师、自学青年及学生家长阅读。

### 数 学 小 丛 书

## 几 何 学 的 源 起 与 演 进

项 武 义

责任编辑 徐一帆

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1983年5月第一版 开本：787×1092 1/32

1983年5月第一次印刷 印张：7 5/8

印数：0001—17,600 字数：147,000

统一书号：13031·2256

本社书号：3086·13-1

定 价：0.95 元

## 《数学小丛书》编写前言

为了普及和提高我国的现代科学技术知识水平，培养我国青年思考和解决问题的能力，我们试着把基础数学中的题材编写成一套便于自学的小册子——《数学小丛书》，希望能成为在广度和深度上进一步充实我国的基础数学方面的参考读物。

在着手编写这套小丛书时，我们有下面几点认识与想法：

(一) 基础数学涉及的面比较广，这对于初学者自学是很困难的，也是不切实的。因此，我们采取化整为零的方法，每一册只对某些中心课题做深入细致的讨论，使得它不仅是整套丛书的不可分割的一部分，而且其本身又自成独立完整的体系。这样做，对自学者会更加方便些，也能使基础数学丰富多彩的各个分支和广泛应用，得到应有的反映。

(二) 理论与实际之间的关系，概括地说，从实际到理论是“由繁精简”，而从理论到实际则是“以简御繁”。所以，基础理论必须对实际问题进行由浅入深的分析和由感性到理性的飞跃才能得到。反过来，只有深刻地理解了基础理论的高度概括性，才能够运用它来解决各种繁复多样的实际问题。这套小丛书，虽然各册讨论的课题互不相同，但每册都按上述这种自然演变过程，作一次由实践到理论再回到实践的小循环。

(三) 分析、综合、推理,这三种基本思考方法应该相互配合运用。然而,在许多数学书里往往过于偏重推理而忽略了分析与综合的工作,使读者缺乏对实际问题进行分析和综合的训练,也就不善于把实际问题归纳成数学问题来加以解决。因此,在编写这套小丛书时,我们将着重讲述如何认识问题和解决问题的思路。并通过一些实例来说明上述三种思考方法是怎样配合运用的,而不再过分追求形式的数理证明与逻辑体系。

最后我们建议由海内外的热心数学教学的工作者们,同心协力为中国青年编好这套数学小丛书,为祖国的四个现代化贡献我们的一份力量。

项武义

于美国加州大学

# 目 录

## 《数学小丛书》编写前言

引子	1
<b>第一章 实验几何学</b>	4
第一节 点、直线与平面的相互关系	4
第二节 方向、角度与平行	23
第三节 恒等、叠合与对称	40
<b>第二章 推理几何学</b>	56
第一节 萌芽时期——恒等形的研究与应用	56
第二节 拓展时期——从恒等到相似	77
第三节 全盛时期	111
<b>第三章 解析几何学</b>	141
第一节 空间结构的代数化——向量及其运算	142
第二节 向量几何初步	165
第三节 坐标与坐标变换	200
<b>结束语</b>	236

# 引 子

几何学所要研究、探讨的课题就是“空间”的各种性质。空间究竟是什么呢？先举几个实际的例子来看一看。例如目前你的身体所在的位置，就占据了空间的一小部分；当你移动位置时，你所做的也就是让出原先所占的那一部分空间，去改占另一部分空间。再者，你日常生活的范围、举目四望所见的地方与穹苍也都是空间的一部分。概括地讲，关于空间最原始、最基本的概念就是位置；而空间本身也就是全宇宙中所有可能的位置的总体。在几何学中我们以“点”表示一个位置，而空间中所有其他各种形象如线、面、体等等都是点的某种组合。再者，空间的各种形象如直线段、三角形、立方体、圆、球、柱等等，都是具体而实用的。空间的种种性质，如长度、角度、面积、体积等等，则又是我们在生产、实践中不可缺少的知识。

自古以来，世界上各古代文明都经过实地的观察、实验而总结出一套可观的空间知识。其中如中国、埃及、巴比伦和玛雅等古代文明，对空间的知识都已经十分丰富。例如我国古代，很早就发现了重要的直角三角形勾股定理和简易测量的知识。在西方文明中，对于空间知识的有系统研究，起源于古埃及与巴比伦，而在古希腊文明中得到蓬勃发展，并获得辉煌

的成果。其中流传至今的欧几里得所著的《几何原理》，可以说是古希腊在几何学上集其大成的一部代表作。此书原名“Elements”，于明代由传教士带到中国，徐光启将它译成中文，取名为《几何原理》。这也就是中文里“几何学”这个名词的源起。

几何学是一门源远流长的学科，又是一门在方法论上偏重于推理、论证的高度理论化的学科。远在古代希腊时代，几何学就已经建立起一个初步完整的演绎体系，成功地把种种空间性质、几何问题的探讨，归结成一系列精而简的基本概念与基本性质来推演、论证。但是几何学在本质上依然和任何实验科学一样，其基础肯定是建立在某些实验性的基本事实之上的。更普遍地说，因为任何论证必须有所依据，所以世界上根本就不可能有什么无中生有的论证，当然也没有什么不证自明、超越实验的理论！整个科学的基本精神与准则就是实事求是，实验求证。几何学当然也不例外，它的基础与源起就是我们将在第一章要详加讨论和分析的实验几何。大体上来说，我国古代和古埃及、巴比伦所研讨的，仅仅是实验几何学，而古希腊文明在几何学上的重大进展，正是在古埃及、巴比伦所总结的实验几何学知识的基础上，逐步发展成推理几何的。我们将在第二章中，简明扼要地介绍希腊时代在推理几何学上的重要成就。

整个中古时期，欧洲的文明陷入暴力、迷信的深渊，这是一段漫长的黑暗时代，一直到“文艺复兴”才逐渐挣脱迷信、封建的束缚。当时由阿拉伯传到欧洲的“代数学”在十六世纪获



得很大进展。十六世纪末维特 (Viète) 所著的“代数学”启发了笛卡尔 (Descarte) 和费尔玛 (Fermat), 使他们想到可以用新兴的代数学作为研究几何学的有力工具, 从而产生“解析几何学”。解析几何学的基本想法是用代数方法来研究几何学。这样, 不但为空间的研究开辟了新的途径; 而且把整个几何学的研究从原先“定性的层面”推进到能进行有效计算的“定量的层面”。我们将在第三章中详细讨论如何有系统地全面地使空间的几何结构代数化, 使之成为建立解析几何学的理论基础。

从几何学的发展与演进来看, 解析几何的根源基于推理几何 (通常也叫做欧氏几何), 而推理几何的根源则基于实验几何。本书将以认识论和方法论的观点, 对于上述几何学的逐步进展详加分析。

# 第一章 实验几何学

整个科学所做的工作，不外乎实事求是地去认识问题和解决问题。所以，研究几何学当然要从认识几何问题做起。本章将对于空间的各种常见的形象和常用的概念进行细致、深入的观察与分析，从而确立空间的基本概念，把握空间的基本性质。这就是实验几何学的中心课题，它也是后面几章要讲到的推理几何学中用来推论、研究其他空间性质和解决各种几何问题的依据与基础。

## 第一节 点、直线与平面的相互关系

点、直线与平面是空间中最简单、最常见的基本图象，它们可以说是空间各种图象的组成单元，本节将对于它们的直观内含和相互关联详加分析，从而确立几何学中点、直线、平面这三个基本概念，并且总结关于点、直线、平面之间相互关联的空间基本性质。

### 一、点与直线

位置是空间中最原始也是最基本的单元。在几何学中，

我们用“点”来标记一个位置。所以从概念上来说：点就是位置的抽象化。例如在一张地图上，我们以一个个小黑点来标记各地的位置。再者，在日常生活中，我们经常要从一个地方走到另一个地方。抽象地说，就是一个“动点”从一个点的位置移动到另一个点的位置。这个动点所经过的路径叫做它的轨迹。所以，空间中第二个最原始的基本概念就要算是“路径”了，它是一个动点从一点移动到另一点的“轨迹”，在几何的讨论中，我们用一条“线段”（通常是曲线段）来表示路径。换句话说，“线”就是路径的抽象化。如下图所示，设 $P$ 、 $Q$ 两点分别表示空间相异的两个位置，则联结于 $P$ 、 $Q$ 两点之间的各种可能路径有很多很多：

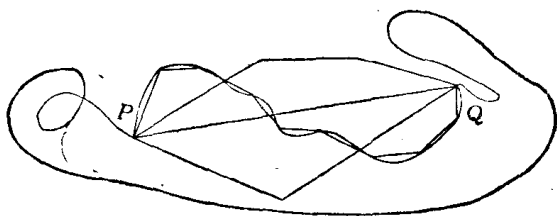


图 1-1

当然，在实际的情况中，都希望所要走的路愈短愈好，所以很自然地会提出下述问题：

“在联结于 $P$ 、 $Q$ 两点之间的各种可能路线之中，以哪一条为最短呢？”

光线的存在，很明显地启示了空间的下述基本性质：

“联结于 $P$ 、 $Q$ 两点之间的最短路径唯一存在，它就是联结于 $A$ 、 $B$ 两点的那条直线段。并用符号 $\overline{PQ}$ 表之。”

由光学实验，我们知道光在“均匀介质”中走的是直线。更进一步的光学实验表明光实际上走着最省时间的路线，而且光的速度是随着所通过的“介质”而定的。例如，它在真空中走得最快，在空气中的速度则稍慢些，在水中的速度则更慢。在均匀介质中光线的速度是个不变的常数，所以最省时间的路径也就是最短的路径，即直线段。这也就是我们常见并且常用的事实：即光在均匀介质中走直线。

再者，如图 1-2 所示，由  $P$  点射向  $Q$  点的光线可以向  $Q$  点那一端无限延伸，而由  $Q$  点射向  $P$  点的光线则又可以向  $P$  点那一端无限延伸。

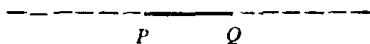


图 1-2

所以对于空间相异两点  $P$ 、 $Q$ ，不但有一条唯一的最短路径——“直线段  $\overline{PQ}$ ”。而且也唯一地确定了一条可以向两端无限延伸的整条直线。这也就是大家所熟知的空间的一个基本性质：“二点定一直线”。说得更加明确些，即通过空间给定的相异两点  $P$ 、 $Q$ ，有一条唯一的直线。以后将以符号  $PQ$  表示它。若在同一条直线上任取两点  $A$ 、 $B$ ，则直线上介于  $A$ 、 $B$  之间的点组成直线段  $\overline{AB}$ ，如图 1-3。



图 1-3

【思考与分析】:

(i) 光在均匀介质中走直线: 这是一个司空见惯的基本现象. 下面让我们举实例来分析一下.

【例 1】光线与影子: 光走直线, 所以当它笔直向前被某一物体所阻挡时, 它是不转弯绕过去的. 因此, 这一部分光线就射不过去了, 相应地在障碍物后面便形成了一个“影子”. 在太阳光的照射下, 房屋、树木或你自身都会在地上投出影子.

【例 2】月蚀与日蚀: 在东西方的古文明中, 人们很早就注意到了月蚀现象. 在一轮明月上所见到逐渐移动的黑影, 其实就是我们的“地球”在太阳光照射下, 投在月球上的影子. 它在本质上和我们在地面上常见的阳光下的影子是一样的 (如图 1-4 示意图所示).

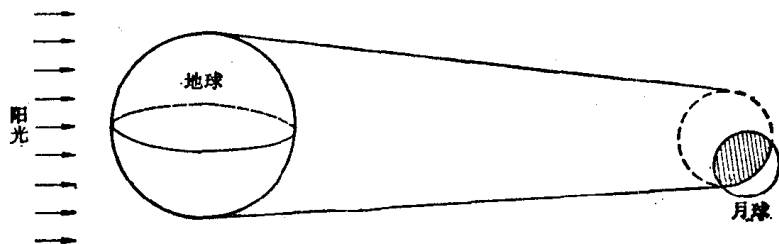


图 1-4

同时, 我们还可以“一目了然”地看到另外一个重要的基本事实, 即:

“我们所居住的大地, 从整体来看是一个在太空中运行的球体 (因为它投射在月球上的那一部分影子的外缘所显示的是一个圆弧), 所以叫做地球。”

反过来,日蚀则是因为月球运行到某个位置时(部分或全部)阻挡了阳光照射到地球上某些地区所造成的。换句话说,当你观察到日蚀现象时,你恰好站在被月球所阻挡的太阳光的阴影中。但是,因为月球的体积比较小,所以它只能阻挡住一部分阳光,这也就是为什么在日蚀中,以日偏蚀为最常见,日环蚀次之,而日全蚀更难得原因(请同学们自行画几个示意图,分别说明太阳、月球与地球在日偏蚀、日环蚀和日全蚀这三种情形时的相对位置)。

(ii) 相交两直线定一点: 上述事实是两点定一直线的直接推论。因为当两条直线  $l, l'$  的交点至少包含有相异两点  $A, B$  时,  $l, l'$  就必须都是由  $A, B$  这两点所唯一确定的那条直线, 即  $l = AB = l'$  是同一条直线而不是相异的两条了! 下面我们举一些运用上述基本事实的实例。

[例 3] 视觉与目测。光的存在以及人的眼睛的巧妙配合,才使我们有了视觉,可以看到周围各发光点的位置。我们眼睛的结构基本上是一个球形的“暗箱”。其前方的“晶状体”是一个能调节其焦距的凸透镜; 它的后面则是密布着善于感光黄斑细胞的“视网”。如图 1-5 所示,调节晶状体的焦距,

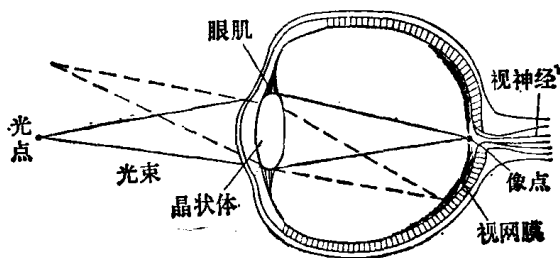


图 1-5

就能把从光点射到晶状体上的光线，在视网膜上重新聚集成一个像点，因而形成视觉。

从几何的观点，我们的眼睛也就是这样一种装置，它能够通过从发光点到两眼的两条“光束”，去反求两光束的共同交点（即原发光点）的位置。所以说，在视觉中所用到的几何原理就是“相交二线定一点”。

现在，让我们再进一步分析一下：为什么我们要要有两只眼睛呢？两只眼睛比“独眼龙”有什么好处呢？同学们不妨暂且闭上一只眼睛，只用独眼来观察事物，就不难发现你依然可以把周围各种物体的形状看得清清楚楚，但是，对于距离的远近和立体感就大打折扣了。假如你不信就请你自行表演一下“独眼龙穿针引线”吧，你一定会体会到这个任务有多难！为什么用双眼比独眼更能够估计距离呢？我们的脑子是根据哪些信息来“目测”距离的呢？如图 1-5 所示，同一个点，到两个眼的连线之间有一个夹角。

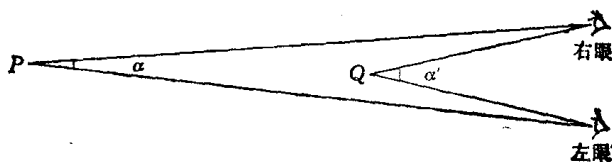


图 1-6

显然，距离愈远则其夹角愈小。所以，目测的基本道理还是用二线交汇来决定一个点的位置。只是我们根据远近和夹角之间的关联进一步作出量的估计吧了。

【例 4】反射与镜像。镜面是一种能够反射光线的平面，

如图 1-7 所示。眼睛所见到的光线其实是由光点  $P$  射出来的。但是它们都先经过镜面的反射之后，才照射到眼睛之上。对于视觉来说，它只能推论所射来的光束的反向汇聚点应该位于  $P'$  点。所以你的视觉就判断出“在  $P'$  点有一发光点”。这就是镜像形成的道理。

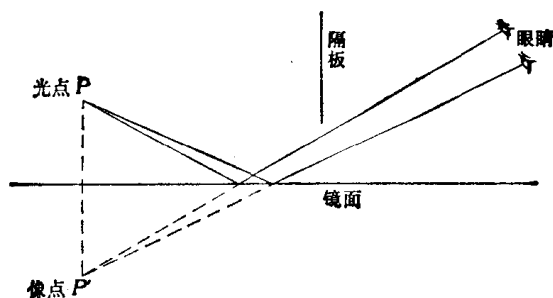


图 1-7

[思考题]:

(1) 做一个如图 1-8 所示的针孔成像装置。

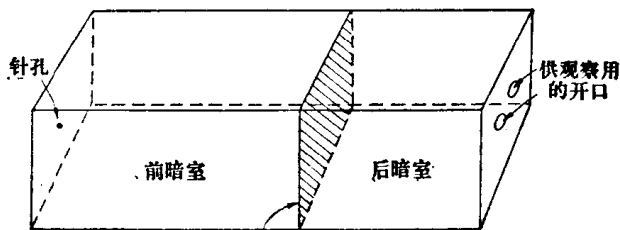


图 1-8 显像的毛玻璃

上述装置对着一个发光体，就可以在毛玻璃上看到它的一个倒像。这种现象叫做针孔成像。请分析一下针孔成像的原理是什么？为什么是倒像呢？试用图解说明之。是否针孔愈小，则所成的像愈清晰？是否针孔愈小，则所成的象亮度也愈



小？为什么？

(2) 能不能设计另一种光学装置，使得所成的像又亮又清晰呢？照相机是不是这样的一种装置呢？

(3) 一架最简单的照相机的结构基本上就是把一个凸透镜安装在一个可以伸缩其深度的暗箱的前方；而在暗箱后方有一个可供插入感光底片的装置。如下图 1-9 所示。

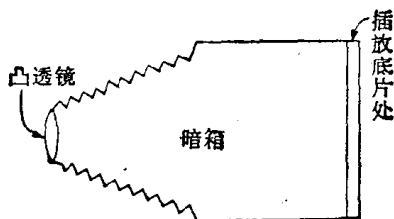


图 1-9

试比较眼睛和照相机在基本结构上的异同。试比较针孔成像装置和照相机在基本结构上的异同。

总结(A)一节的讨论，几何学中点和直线这两个最原始的基本概念可以简要列述如下：

(i) “位置”与“路径”是空间中最原始、最基本的两个概念。在几何学的讨论中，我们以点表示位置，以线段表示路径。换句话说，点是位置的抽象化，线是路径的抽象化。

(ii) 对于空间任意给定的两相异点  $P$ 、 $Q$ ，在连结  $P$ 、 $Q$  两点之间的所有可能的路径之中，以直线段  $\overline{PQ}$  为最短。

(iii) 在均匀介质中，光走直线。在几何学中，直线是可以向两端无限延伸的。

(iv) 相异二点定一直线，相交二直线定一点。