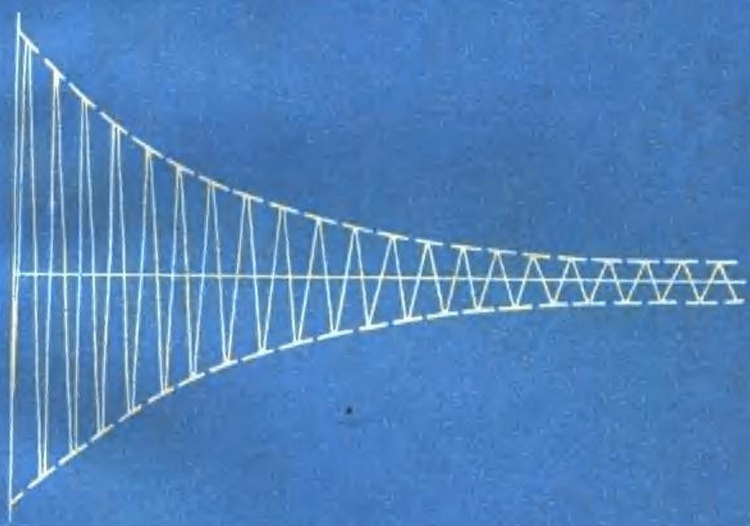
机械振动和机械波

王瑞旦



.1

湖南人民出版社

TH113.1
3
3

目　录

第一章 机 械 振 动

在我们周围经常可以看到各种机械振动现象。所谓机械振动就是物体在一定位置附近来回往复的运动。例如钟摆的运动，气缸中活塞的运动，机器开动时各固定部件的微小运动，一切发声体的运动等，都是机械振动。简称振动。

振动的传播过程，称为波动，简称波。如声波、地震波、爆炸波和水波等。由于在生产实践、科学实验和日常生活中，大量地遇到振动与波的问题，所以研究它的规律有着重要的实际意义。

本书所讨论的全是机械振动和机械波问题，但是这里用来描述振动和波的基本概念以及所得出的许多结论，却带有普遍性，在研究交流电、电磁振荡、电磁波以及微观客体（如分子、原子等）的运动规律时，也会用到它们。因此，振动和波的基本原理也是学习电工学、无线电电子学、光学和原子物理等的基础。

第一节 简 谐 振 动

一般地说，在生产实践中所碰到的振动问题都是很复杂的。但认识事物都是由简单到复杂，我们研究振动，也先从最

简单、最基本的机械振动——简谐振动开始。因为各种复杂振动都可以看作是多个简谐振动合成的结果，因此，了解了简谐振动的特征和运动规律，就为我们深入学习复杂振动打下了基础。

在研究问题时，为了简化，我们把具体的振动系统抽象为一种振动模型——弹簧振子进行研究。所谓弹簧振子就是从实际中抽象出来的由一个忽略了质量的弹簧和一个不发生形变的物体所组成的振动系统，如图1—1所示。又如一个安装在弹性支架上的车厢，我们可以把车厢和弹性支架组成的振动系统的质量看作都集中在一重物（质点）上，此重物联在弹簧上发生振动，振动时，只有弹簧发生形变，重物（质点）则仅有位置的变化，不发生形变。这就是一个竖直放置的弹簧振子。

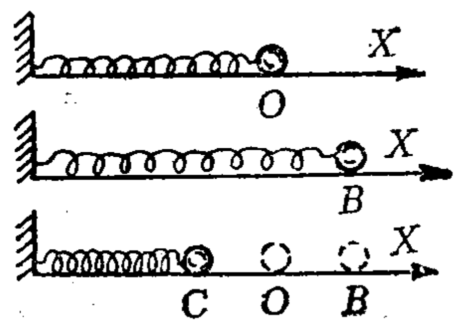


图1—1

当重物（质点）的位置只需要一个坐标就可确定时，称这系统具有一个“自由度”。在本章中只研究质点一个自由度的几种振动的基本特征及规律。

一、简谐振动的基本特征

我们现在用图1—1所示的弹簧振子来研究简谐振动。

在平衡状态时，把振子(重球)所在位置O取作坐标原点。若把重球拉到右方的位置B，然后放开，重球就在平衡位置O的附近振动。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

为了便于说明重球怎样作简谐振动，我们分四个阶段来进行分析。

1.重球从位置B向位置O运动　当重球被拉到右方位置B时，弹簧被拉长了。这样弹簧就产生了一个方向向左的弹性力，所以一放手，球就在这个弹性力的作用下，向左作加速运动。

在位置B，弹簧形变最大，弹性力也最大。从B到O的过程中，弹簧的伸长逐渐减小，弹性力也逐渐变小，但球的运动速度却逐渐增大。到了位置O，弹簧恢复了原长，弹性力也等于零，球的加速度为零，但球的运动速度却最大。

2.重球从位置O向位置C运动　重球在位置O时，弹性力虽然等于零，但因球的运动速度最大，由于惯性，它要继续向左运动。可是当球一离开位置O，弹簧即被压缩，因而又产生了弹性力，方向向右，而且重球向左运动越远，弹性力越大。

在这个阶段中，弹性力的方向和球运动的方向相反，所以球作减速运动。球从O到C的过程中，弹簧被压缩得越来越厉害，弹性力逐渐增大，但球的运动速度却逐渐减小。到位置C，弹性力最大，球的加速度最大，球的速度却减小到等于零，这时，球在这个弹性力的作用下开始向右作加速运动。

3.重球从位置C向位置O运动　球从C到O的运动过程中，弹簧逐渐恢复原长，弹性力逐渐变小，但速度却逐渐增大，到了位置O，弹簧已经恢复了原长，弹性力等于零，速度最大。这一阶段和第一阶段相似，不过运动的方向不同。

4.重球从位置O向位置B运动　这一阶段和第二阶段相似。球在位置O速度最大，由于惯性，要继续向右运动。一离

开位置O，弹簧又被拉长，因而又产生了方向向左的弹性力。球向右运动越远，弹簧被拉得越长，弹性力也越大。在从O到B的过程中，弹性力逐渐变大，而速度则逐渐变小，所以球作减速运动。到了位置B，弹性力最大，速度等于零。

这样，球就完成了一次全振动，以后的运动将重复上述的过程。

上述弹簧振子的振动是简谐振动的一个例子。在上例中，我们定性地分析了重球作简谐振动的过程。现在我们要定量地讨论简谐振动的特点。

胡克定律告诉我们：在弹性限度内，弹性力跟弹簧的伸长量或压缩量成正比。所以振动物体离开平衡位置的位移增加时，弹簧的弹性力也成正比地增加。如图1—1所示，取球（振子）的平衡位置为原点O，以弹簧伸长方向为x轴，当小球离原点的位移为x时，小球所受的弹性力为

$$f = -kx$$

式中k为弹簧的刚性系数或倔强系数，它在数值上等于弹簧伸长或压缩单位长度时所产生的弹性力。负号表示弹性力和位移的方向相反。因为f总是指向平衡位置的，所以它的方向总是与从平衡位置O量起的位移x的方向相反。例如，在球从B向O运动时，弹性力指向左方，球在平衡位置O的右方；球从O向C运动时，弹性力指向右方，球在平衡位置O的左方。

由此可见，物体在与位移成正比，并且总是指向平衡位置的力的作用下作简谐振动。

根据牛顿第二运动定律$f = ma$，代入上式得

$$a=-\frac{k}{m}x \qquad (1-1)$$

式中k和m（球的质量）都是不变的，所以a和x的比值也是一个恒量。

上式告诉我们：在简谐振动中，物体的加速度总是跟位移大小成正比，其方向与位移的方向相反。

这种作用力和位移的关系或加速度和位移的关系，是一切作简谐振动的物体所具有的特性。

二、简谐振动的描述

1.用参考圆方法求简谐振动方程

在相互联系的各个物体中，一个物体的振动可以转换为另一个物体的转动。例如柴油机气缸中活塞的往复振动，通过曲柄连杆机构可以转换为曲轴的转动，而转动物体上各点均作圆周运动，故可通过圆周运动来研究直线上的来回振动。

为此，引进一参考圆（见图1—2)。有一质点M在此圆周上以角速度ω沿逆时针方向作匀速圆周运动。我们可以看到M绕圆运动时，M点在水平直径上的投影点

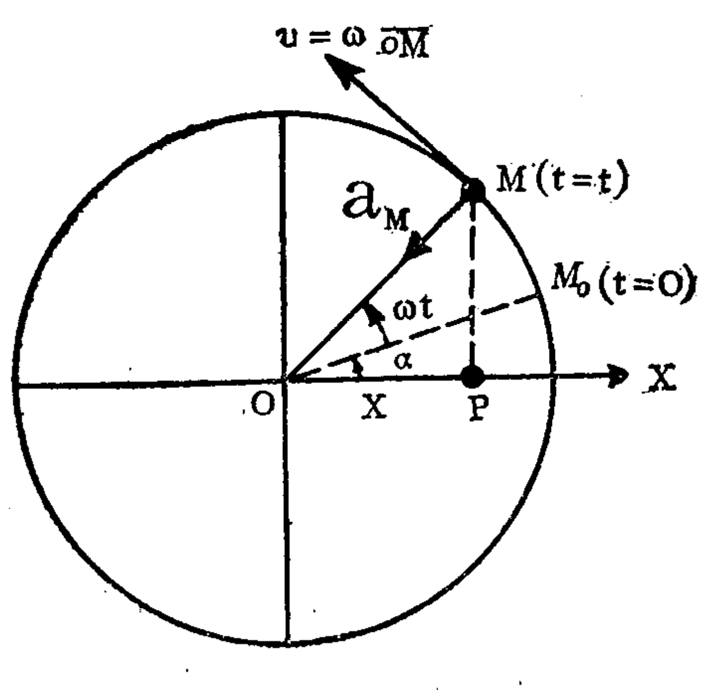


图1—2

p，将在水平直径上、以圆心O为平衡位置振动。

在初始时刻$t=o$，M点的初始位置为M_o，$\overline{OM_o}$与水平直径的夹角为α，经过时间t后，$\overline{OM}$转过角度ωt，M点在水平直径上的投影点P离开平衡位置O的位移$x=\overline{OM}\cos(\omega t+\alpha)$。因作匀速圆周运动的物体（质点）具有向心加速度$a_M$，故投影点P运动的加速度a就是$a_M$在水平方向上的投影。即

$$a=-a_M\ \cos(\omega t+\alpha)$$

在此，M点运动的角速度为ω，圆周半径为$\overline{OM}$，所以，

$$a_M=\omega^2 r=\omega^2\overline{OM},\quad 故$$

$$a=-\omega^2\overline{OM}\cos(\omega t+\alpha)$$

而$\overline{OM}\cos(\omega t+\alpha)=x$是P点离开平衡位置O的位移，因此，投影点P运动的加速度与位移满足如下关系式

$$a=-\omega^2 x \tag{1—2}$$

加速度大小与位移成正比，而方向与位移方向相反，可见P点的运动是简谐振动。

参考圆半径$\overline{OM}$就是P点振动时离开平衡位置的最大位移，叫做振幅，通常以A表示。

将$a=-\omega^2 x$与$a=-\frac{k}{m}x$比较可知：ω^2相当于弹簧振子的$\frac{k}{m}$。如果以弹簧振子的振幅A为半径作一圆，质点M在此圆周上以$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$的角速度运动，那么它在水平直径上的投影点P的运动就与弹簧振子的振动完全相同。因此弹簧振子的简谐振动方程可以写为

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (1\text{—}3)$$

同理可知，P点的振动速度就是M点的线速度V_M在水平方向上的投影。即

$$V = -V_M \sin(\omega t + \alpha)$$

$$= -\omega \cdot \overline{OM}\sin(\omega t + \alpha)$$

即 $$V = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) \qquad (1\text{—}4)$$

上式中的V也就是弹簧振子的振动速度。

又由于 $\cos(\omega t + \alpha) = \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

若令 $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$ 则(1—3)式也可写成

$$x = A\sin(\omega t + \alpha')$$

故简谐振动又可定义为：凡运动物体的位移是时间的余弦（或正弦）函数的运动，称为简谐振动，或谐振动。

值得注意的是由于余弦函数或正弦函数都是周期性的，所以简谐振动是一种周期性振动，但并非所有周期性振动都是简谐振动。

为了能够形象地看出物体振动时位移随时间而变化的规律，我们常以位移为纵坐标，时间为横坐标，把位移与时间的关系用曲线表示，称为位移时间图线或振动图线。图1—3是简谐振动的位移时间图线，它是一条余弦（或正弦）曲线。按同样

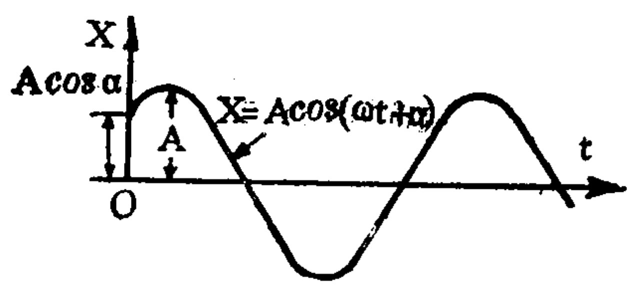


图1—3

方法，还可作出速度时间图线与加速度时间图线。

2.描述简谐振动的物理量

从振动方程(1—3)可知，作简谐振动的物体的运动状态完全由A、ω和α三个量所决定。下面我们就从三角函数的特性并结合图1—2，分别讨论这些描述简谐振动的物理量的物理意义。

(1) 振幅

因为简谐振动的方程是余弦函数，而余弦函数的绝对值不能大于1，可知A就是简谐振动中最大位移的绝对值，它表示质点振动时偏离平衡位置的最大幅度，所以叫做振幅。前已指出，图1—2所示参考圆的半径$\overline{OM}$，就是投影点P作简谐振动的振幅。

(2) 周期、频率、圆频率

物体完成一次全振动（来回一次）所经过的时间叫做振动的周期。一般用T来代表。上面讨论重球的振动时，我们曾经把它分为四个阶段，振动物体经历这四个阶段就完成了一次全振动，所以振动物体完成这四个阶段（即作一次全振动）所经过的时间就是1周期。

在图1—2中，当质点M绕参考圆旋转一周，即经过$\frac{2\pi}{\omega}$时间，其投影点P完成一次全振动，所以$\frac{2\pi}{\omega}$就是P点作简谐振动的周期。即

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad (1—5)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

这是确定简谐振动周期的基本公式。简谐振动的特征之一是它的等时性或叫周期性，即振动物体从任何地方出发，每完成一次全振动所经过的时间都是相等的。这从(1—5)式可以看出，周期T取决于ω(2π是一个常数)，而对弹簧振子来说 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，与振动物体的初始位置、初始速度和振幅都无关。

物体在单位时间（1秒钟）内完成全振动的次数（简称振动次数)，叫做振动的频率。频率的单位是1/秒，常称为赫兹(H_Z)，简称赫。如果用f表示物体振动频率，那么它与同一物体的振动周期T之间的关系是

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \qquad (1—6)$$

我国现在市用交流电的频率为50赫兹，即它的振动周期为 $\frac{1}{50}$ 秒。

频率 f 的2π倍即 $2\pi f=\omega$，就是质点M在参考圆上运动的角速度，故ω称为圆频率。它表示物体在2π秒内振动的次数。

用 $\omega=2\pi f$ 或 $\omega=\frac{2\pi}{T}$ 依次代入(1—3)、(1—4)和(1—2)式，可得位移、速度和加速度公式的另一种表示形式：

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right) \quad 或 \quad x=A\cos(2\pi ft+\alpha)$$

$$V=-\frac{2\pi}{T}A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right) 或 V=-2\pi fA\sin(2\pi ft+\alpha)$$

$$a=-\frac{4\pi^2}{T^2}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right)\text{或}a=-4\pi^2f^2A\cos(2\pi ft+\alpha)$$

由(1—5)和(1—6)两式可知，简谐振动的圆频率确定了，则它的周期和频率也就确定了。例如对于前面所讲的弹簧振子来说，$a=-\frac{k}{m}x$，用它与$a=-\omega^2x$相比较，得

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

故 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 或 $f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

由上式可知：此处所表示的振动物体的周期和频率，都是由振动物体本身的性质（如弹簧振子的质量m和刚性系数k）决定，故分别称它为该振动物体（系统）的固有周期和固有频率。

(3) 位相与初位相

对于一定的简谐振动来说，其振幅A和圆频率ω是确定的，这时根据(1—3)、(1—4)、(1—2)三式可知，质点在振动过程中不同时刻的位移、速度、加速度就由$(\omega t+\alpha)$的不同值所确定。例如图1—2中的P点，当$\omega t+\alpha=0$时，$x=A$，$V=0$，$a=-\omega^2A$，即振动质点在正方向离开平衡位置最远的位置上，速度为零，加速度绝对值最大，方向沿负方向；当$\omega t+\alpha=\frac{\pi}{2}$时，$x=0$，$V=-A\omega$，$a=0$，即振动质点正以最大速度沿负方向通过平衡位置；当$\omega t+\alpha=\pi$时，$x=-A$，$V=0$，$a=A\omega$，即振

动质点在负方向离平衡位置最远的位置上，速度为零，但具有最大的正向加速度，即准备沿正方向运动；当$\omega t+\alpha=\frac{3\pi}{2}$时，$x=o$，$V=A\omega$，$a=o$，即质点又以最大速度通过平衡位置，不过此时是沿正方向运动。可见$(\omega t+\alpha)$这个量的各个不同数值，能够反映振动质点在各个时刻的不同位置和运动状态，我们称它为位相。$t=o$时的位相α，称为初位相，它决定于质点在开始时的位置和运动状态。

实际上，A和α是由初始条件确定的。所谓初始条件，就是当$t=o$时振动质点的位移X_o和速度V_o（即设$t=o$时，$x=x_o$，$V=V_o$）。将它们代入(1—3)式和(1—4)式，得

$$x_o=A\cos\alpha$$

$$V_o=-\omega A\sin\alpha$$

从此两式，立即可求得

$$A=\sqrt{x_o^2+\frac{V_o^2}{\omega^2}} \qquad (1—7)$$

$$tg\alpha=-\frac{V_o}{\omega x_o} \qquad (1—8)$$

上面两式再结合$x_o=A\cos\alpha$就唯一地确定了简谐振动的振幅A和初位相α〔由于在O到2π范围内对每一个正切值，(1—8)式中的α都有两个解α_1和α_2，故要唯一地确定α，此α还必须满足$x_o=A\cos\alpha$〕。从(1—7)和(1—8)式可知，对于不同的振动系统(ω不同)，即使初始条件相同，振幅和初位相仍不相同。

位相和初位相是很重要的物理量。因为在实际问题中，常

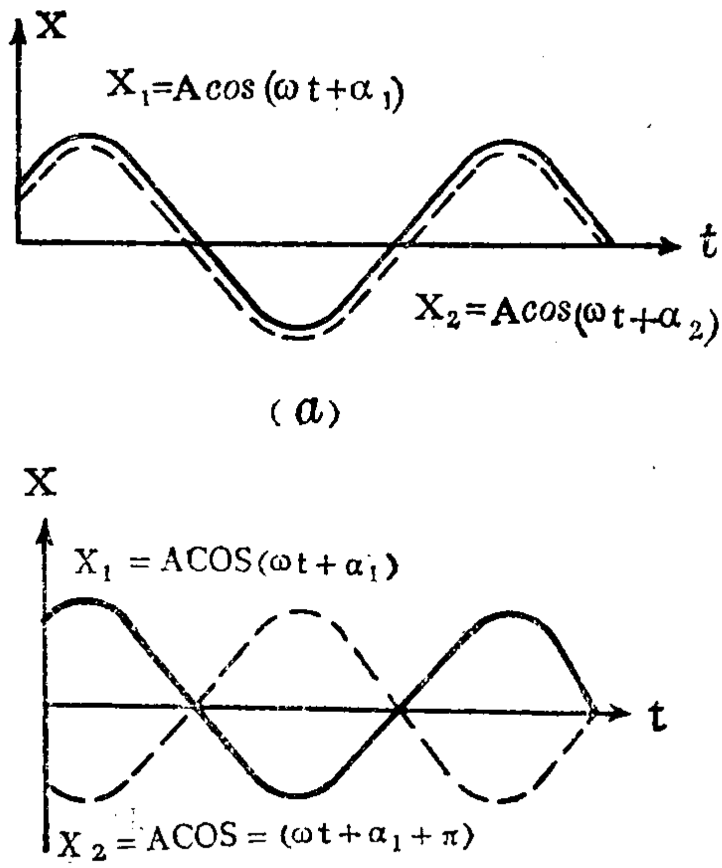
常要比较两个同频率的简谐振动的步调是否一致（即是否同时达到最大位移或是否同时通过平衡位置等），这时，起决定作用的就是它们的位相差。若有两个振动物体，其振动方程分别为

$$x_1 = A\cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \alpha_2)\text{（振幅A不一定要求相同）}$$

则位相差

$$\Delta\alpha = (\omega t + \alpha_2) - (\omega t + \alpha_1) = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad (1\text{—}9)$$



(b)

图 1—4

位相差为零，这表示在任意时刻两个振动物体的振动步调完全一致。如图 1—4（a）所示，这种情况通常叫做“同相”或“同步”。如果它们的位相差为π，这表示一个振动物体到达正方向位移最大处，另一振动物体正处在负方向位移最大处；或一个振动物体通过平衡位置向下运动，另一个振动物体正好通过平衡位置向上运动。如图 1—4(b)所示，

这种情况通常叫做“反相”。一个作简谐振动的物体的位移 $x = A\cos(\omega t+\alpha)$ 和速度 $V = -A\omega\sin(\omega t+\alpha)$

$= A\omega\cos\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ 就不是同相的，二者位相差为 $\frac{\pi}{2}$。

【例题 1】 若两个同频率 ω 的简谐振动，其振幅均为 A，初位相各为 O 和 $\pi/2$。求两个振动的振动方程及在 $t=\frac{T}{4}$、$\frac{T}{2}$、$\frac{3}{4}T$、$T\left(\text{即}\ \omega t=\frac{\pi}{2}、\pi、\frac{3}{2}\pi、2\pi\right)$ 各时刻的位相和它们之间的位相差，并将两个振动的 $x-t$ 图线作在同一张图上。

解 其振动方程分别为

$$x_1 = A\cos\omega t$$

$$x_2 = A\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

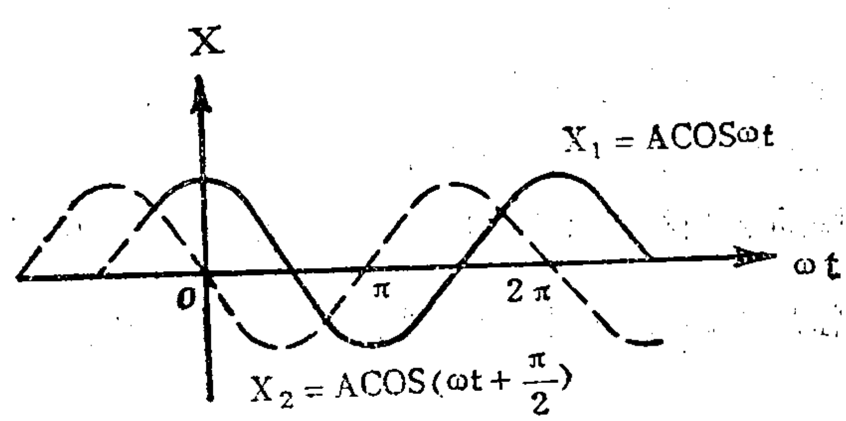


图 1—5

两振动的 $x—t$ 图线见图1—5。各时刻的位相和它们之间的位相差如下表所示：

时刻 t (ωt)	o (o)	T/4 ($\pi/2$)	T/2 (π)	3/4T ($3/2\pi$)	T (2π)
位相α_2	$\pi/2$	π	$^3/_2\pi$	2π	$^5/_2\pi$
位相α_1	O	$\pi/2$	π	$^3/_2\pi$	2π
位相差$\alpha_2-\alpha_1$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$

比较此例中两个同频率的简谐振动的位相关系，我们还可看到这样一个特点：振动 2 的位相达到某一数值之后，过T/4的时间$\left(\text{或过}\frac{\pi}{2}\text{角度}\right)$，振动 1 的位相就达到这个数值。如当振动 2 达到正向最大位移时，振动 1 正通过平衡位置向上运动，经过 T/4时间$\left(\text{即}\frac{\pi}{2}\text{角度}\right)$，振动 1 就达到正向最大位移。在这种情况下，通常我们就说：振动 2 比振动 1 超前T/4周期（即超前$\pi/2$角度）；或振动 1 比振动 2 落后1/4周期（即落后$\pi/2$角度）。

根据(1—9)式还可以得到这样一个结论：两个同频率的简谐振动之间的位相差是不随时间改变的。因此，象例题 1 中那样，当振动 2 和振动 1 的初位相相差$\pi/2$时，以后任何时刻的位相差总是$\pi/2$。而位相增加$\frac{\pi}{2}$所需的时间可由$\frac{\pi}{2}=\omega t=\frac{2\pi}{T}\cdot t$计算出来，恰好是$\frac{T}{4}$。由此可见，一个简谐振动比另一个同频率的简谐振动超前或落后多少个周期，是完全由它们之间的(初)位相差所决定了的。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com