可能世界的逻辑

[美] R·B·马库斯等著

康宏逵　编译

上海译文出版社

可能世界的逻辑

[美]R·B·马库斯等著

康宏逵　编译

上海译文出版社

可能世界的逻辑

〔美〕R·B·马库斯等著

康宏途 编译

上海译文出版社出版、发行

上海延安中路 955 弄 14 号

全国新华书店经销

上海中华印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 13.5 插页 3 字数 302,000

1993 年 5 月第 1 版 1993 年 5 月第 1 次印刷

印数：0,001—8,000册

ISBN 7-5327-1214-1/B·067

定价：9.40元

(沪)新登字 111 号

可能世界的逻辑

模态逻辑的复兴是当代逻辑学最重要的新发展，它是哲理逻辑大批分支的凝聚点，并使这些分支可运用于数学、物理、语言学、计算机程序理论。本书收入几个成熟分支的著名综述，大多具有历史、哲学、技术三者统一的特点，立足点高，论述准确，从中可获得对该领域的鸟瞰。编译者增写的有趣案例，谈哥德尔式自指句，有助于读者掌握可能世界的分析技巧。

作者选介

R·B·马库斯：40年代开拓量化模态逻辑，曾任符号逻辑学会主席。

J·欣迪卡：可能世界语义学的设计者之一，对知识、时态、道义逻辑的创立作出很大贡献。

J·伯吉斯：多才多艺的逻辑家，尤其精通时态逻辑。

R·H·托马森：《哲理逻辑杂志》主编。

S·K·托马森：最先发现时态、模态逻辑中的不完全性现象。

目　录

四、条件句逻辑

五、自然语言的逻辑研究

模态、自指和哥德尔定理

——一个优美的模态分析案例(代序)

康 宏 逵

汇合在这部集子里的十来篇文章，差不多都是综述，大抵写得颇有活气，能反映模态逻辑及其变种的进化史，讲得出研究动机、有争议的哲学问题、正在竞赛的供选方案。如今的逻辑像天书，骨子里照样活，从内行的笔底下出现是不见得要板出一副僵尸面孔的。

芭尔坎·马库斯女士的哲学综述几乎面面俱到，正好作了整部集子的总序。这个巧合使我有幸免去老生常谈，立刻钻进一个新鲜引子话题：可证性的模态分析。本集子的读者也许希望在观念方面和技术方面得到帮助，不知道我讲的案例有没有举一反三的效用。

1. 哥德尔和勒布告诉我们什么?

哈姆莱特："霍拉旭，天地之间有许多事情，是你们的哲学里所没有梦想到的呢。"

——莎士比亚

1.1. 数学发现了它自己的不可完全性 60年前的10月23日，维也纳科学院收到哥德尔一篇近著的摘要，大意是说，对每个又丰富又健全的数学形式系统T，

第一，在T中存在既不可证又不可驳的句子；

第二，在T中不可证T自身的一致性。

当时只有几个人懂得他怎么能下这样骇人听闻的结论。翌年春，《论〈数学原理〉及有关系统中的形式不可判定命题(I)》发表，人们见到了第一定理的证明和第二定理的证明梗概。原来，当T包括不太多的算术的时候，靠着这一点儿算术，T便获得某种自我反映能力，可以表达它自身的元数学了。这件事的奇异后果之一是在T中能实现自指。哥德尔在T中找到的不可判定句是自指句

(1) 我在T中不可证。

1931年文章详细论证了有正确自我反映能力的T一定不会有足够的自我反映能力，以致T证不了真句子(1)，也证不了(1)的否定(诚然，证不了假句子是可取的)。凭他的算术直觉，哥德尔又看出，他的自指句(1)等值于表达T的一致性的非自指句，例如

(2) $0\neq 0$ 在T中不可证。

这说明T证不了自身的一致性(和不一致性，又可取)。

一个古老的梦宣告结束。1900年的国际数学会上，希尔伯特曾再度呼吁实行这个梦，语气决绝："在致力研究一门科学的基础时，我们必须建立一个公理系统，对该科学基本概念之间的关系作出精确而完全的描述。……在该科学的领域内，要是不能靠有穷个合逻辑的步骤把一个陈述从那些公理推出来，就不能认为它是对的。"[康按：重点是我加的。]公理系统既要精确又

要完全，听起来不过分，只是精确性尺度不明。在希尔伯特心目中，为了精确，公理集必须可判定，证明必须有穷长而且每一步都合逻辑。难以控制的抽象数学概念却经常损害这些要求。也巧，在同一次会议上，皮阿诺学派的帕朵阿提出了绕过这道难关的形式化方案。若干年后，希尔伯特无条件皈依新路线，深信精确的公理系统就是形式系统，在其中抽象的公理和推理方法不见了，代之以只按符号串外形机械应用的初始公式和变形规则。谁也琢磨不透证明本质上是不是形式操作，可是没有别的合格候选者出场，这个革新被普遍认可了。

20年代是为翻新了的古梦搜集证据的时期。贫乏的形式系统，如像命题逻辑、一阶逻辑、只有加法或只有乘法的一阶算术，陆续被证明是完全的。对集合论 ZF、大逻辑 PM 这类丰富系统，虽有司寇伦这样慧眼过人的逻辑学家表示异议，在希尔伯特学派内外主宰的情绪也是乐观主义的。按照 1930 年 2 月的那个塔斯基——不是读过了哥德尔文章之后的那个！——的估计，一切已知丰富系统即便都不完全，大概也都会是可完全的。

哥德尔定理使数学家猛然省悟，丰富而健全的形式系统 T 不可完全。把 T 比作捕捉真理的鱼网，现在织网的数学家未动手就得料到 T 准是破的，鱼儿(1)和(2)一定漏掉。于心不甘，可以织比 T 大的网 T'，它(或许)扩充了 T 的语言，增添了更强的公理或推论规则，能制止(1)和(2)溜走了。然而，要是 T' 不丧失正确的自我反映能力，T' 仍是破网一张，势必漏掉鱼儿

(3) 我在 T' 中不可证。

(4) $0\neq0$ 在 T' 中不可证。

于心不甘，只管再织第三张破网 T''，第四张破网 T'''，……，边捉边漏吧。老实讲，除非你把织网过程持续到很可观的超穷序数(至少是 ω^{ω})，满足于一个不可公理化的真理集，你会连算术

鱼也抓不光。要知道，(1)，(2)，(3)，(4)，……尽管内容在变，始终是地地道道的算术命题。哪怕算术真理也不是任何健全的形式系统所能穷尽的，与塔斯基猜想正相反！

插议：哲学家的"反思"？ 哥德尔定理是数学理性空前深刻的一次自我批评，哲学理性似乎还不曾从中学到什么东西，除了无休止地嘲笑失败者希尔伯特。许多哲学家安于从随便怎样的科学结果中反复照见自己朦胧的影子，乐此不疲。难怪他们说哥德尔的伟大发现无非是又一次证明了他们熟悉的哲学命题，例如"无限性是矛盾"、"真理不可穷尽"、"人的认识受历史条件的限制"。使我惊讶的是，精通这一切的老黑格尔根本没感觉到数学公理系统的局限性，《小逻辑》里是有铁证的："几何学……可以毫无阻碍地用抽象理智在空间中建立某些简单的规定。因此有限认识的综合方法唯有在几何学里才达到它的完满性。"对数论，我们的辩证法大师也作如是观。"有限认识的综合方法"者，公理方法也。诸位瞧，他说它在数学领域是完满的！"简单"一词泄了天机。黑格尔不知道，以往的哲学家都不知道，从算术真理起简单性便不复存在，基于"有限认识"的可枚举定理集与数学真理集之间永远有一超穷距离，不用超穷手段非但填不满，也没有希望去逼近。只说这一点，哥德尔定理的哲学内容已经超越任何已知命题，即使那命题不是胡言乱语。 （插议毕）

1.2. 元数学是怎样算术化的？PA 的可证性谓词 "数学的灵魂是证明"（黑格尔），我应当给哥德尔证明勾一个轮廓。为确定计，只谈丰富而健全的形式系统的一例：皮阿诺算术 PA。PA 是一阶理论，是给有等号和摹状号的一阶逻辑补充下列算术公理而得到的：

继数公理　　$Sx \neq 0$，　　$Sx = Sy \rightarrow x = y$。

加法公理　$x+0=x$，　$x+Sy=S(x+y)$。

乘法公理　$x\cdot 0=0$，　$x\cdot Sy=(x\cdot y)+x$。

归纳公理模式　$\phi(0)\wedge\forall x(\phi(x)\rightarrow\phi(Sx))\rightarrow\forall x\phi(x)$。

PA 的语言、PA 底部的一阶逻辑，任你想象吧。在详细规定 PA 的时候，要在元数学(的初等语法部分)中依次定义 PA 的符号、项、公式、公理、推论规则、证明、可证公式或定理，然后才能精确了解元数学的可证性命题：

公式 ϕ 在 PA 中可证，或者按惯例写成 $PA\vdash\phi$。

PA 实现自我反映的方法叫元数学的算术化，它的中心任务无非是把元数学的可证性命题变换成形式算术 PA 的句子。为此，必须在 PA 中给任意公式 ϕ 指定一个名称$\ulcorner\phi\urcorner$，更重要的是在 PA 中造一个一元谓词 Pr，名为 PA 的可证性谓词，让它满足

恰当性准则　$PA\vdash\phi\Leftrightarrow PA\vdash Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$。

这准则说，元数学命题"ϕ 在 PA 中可证"是真的当且仅当形式算术句 $Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$在 PA 中是可证的。

哥德尔当年分两步得出恰当的 Pr。我不能大讲细节，更应当预先把要点突出。第一步显示可证性命题本质上是一个原始递归关系的存在量化，第二步证明了原始递归关系在 PA 中强可表示，恰当的 Pr 在 PA 中存在无非是这种强可表示性的后果而已。事情就这么简单吗？是的。

第一步：语法编码，简称编码　这一步在普通算术的一小片中进行，目的是先把可证性命题变换成普通算术命题。编码始于给 PA 中的语法对象各配一哥德尔数，旨在以数代物。配数法总有点任意，但必须一对一。怎么配都是要产生天文数的，不如只设想按某种固定办法给每个符号配好数了。对 $i=0,1,\cdots,n$，如果符号 s_i 的数是 k_i，则符号序列 $s_0s_1\cdots s_n$ 的数通常定

为

$$p_0^{k_0}\cdot p_1^{k_1}\cdot\cdots\cdot p_n^{k_n},$$

这里 p_i 是按大小排列的第 i 个素数。相仿，如果符号序列 e_i 的数是 l_i，则符号序列的序列 $e_0e_1\cdots e_n$ 的数也可定为 $p_0^{l_0}\cdot p_1^{l_1}\cdot\cdots\cdot p_n^{l_n}$。这样，每个语法对象，特别是项、公式和证明，就都对应于唯一的数了。

以数代物不稀奇，莱布尼茨已经想到了。哥德尔的目标要求他更进一层，在语法领域内用数的运算和关系彻底代替物的运算和关系(我经常不提性质，把它看成一元关系)。“毕达哥拉斯主义”在这里为什么可行，对可证性概念作个粗分析也就昭然若揭了。

在 PA 中 ϕ 可证是指存在一个序列 $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n$ 是 ϕ 的证明，也就是说，该序列的末项 ϕ_n 是 ϕ，同时，对每个小于序列长度 $n+1$ 的数 i，第 i 项 ϕ_i 或者是公理或者是居前的项 ϕ_j 和 ϕ_k 的直接后承(从 ϕ_j 和 ϕ_k 按某条推论规则得出的，不禁止 $j=k$)。如果你问怎样的 ϕ_i 才是公理、怎样的 ϕ_i 才是 ϕ_j 和 ϕ_k 的直接后承，就要转向线性离散图像的辨认，总不外乎看 ϕ_i 是否符合某种拼接模式。在语法对象的识别、形成、变换过程中，除去代入，用处最大的运算是拼接、求序列长度、求序列的第 i 项。以数代物之后，这三种运算都可以换成数的运算。例如，令符号序列 $s_0s_1\cdots s_n$ 和 $t_0t_1\cdots t_m$ 的哥德尔数分别是 x 和 y，求 $s_0s_1\cdots s_n$ 的第 i 项 s_i 的语法运算可以换成算术运算

$(x)_i=$ 满足 p_i^y 可整除 x 但 p_i^{y+1} 不可整除 x 的最小数 $y\leqslant x$。

求 $s_0s_1\cdots s_n$ 的长度 $n+1$ 的语法运算也能换成算术运算

$$lh(x)=\text{满足 }(x)_y=0\text{ 的最小数 }y\leqslant x。$$

而两给定序列的拼接 $s_0s_1\cdots s_nt_0t_1\cdots t_m$ 的数则由下列运算给出：

$$x*y = x\cdot\prod_{i<lh(y)} p_{lh(x)+i}^{(y)_i}$$

继续追问这些有语法意义的算术运算用什么样的函数和关系能够定义，哥德尔找出一个前所未知的简单答案：原始递归的！只需要原始递归函数，极不足道，都是从零、继数、投影函数用复合或递归模式生成的。只需要原始递归关系，它们的特征函数是原始递归函数。

把我的分析过程倒过来，按部就班编一份很长的算术函数和关系清单。最前面列举纯算术的东西，从 $(x)_i$，$lh(x)$，$x*y$ 开始转向语法概念的算术模拟，偏后的几款中间有我们特别关注的算术关系

ax(x)：x 是一个公理的数。

ic(x；y,z)：x 是其数为 y，z 的公式的一个直接后承的数。

和

prov(y, x)：其数为 y 的序列是其数为 x 的公式的一个证明，就是说，$(y)_{lh(y)\dot{-}1}=x$，同时，对所有数 $i<lh(y)$，或者 $ax((y)_i)$，或者存在两数 $j,k<i$，$ic((y)_i;(y)_j,(y)_k)$。

到此为止，清单中每一款都是原始递归的。现在添上最后一款

pr(x)：x 是一可证公式的数，即，存在一数 y，prov(y,x)。

定义里出现刺目的无界量词“存在一数 y”，而且无界性不能消除。这使得 PA 的可证公式数集不是原始递归的，乃至不是递归的或可判定的，只是递归可枚举的。算术性质 pr 正好对应于 PA 中的可证性。设公式 ϕ 的哥德尔数是 k，一定有

$$PA\vdash\phi\Leftrightarrow pr(k)\text{成立。}$$

第二步：数字表示，简称表示 这一步折回形式算术 PA，在其中寻找有了语法意义的那些普通算术命题的形式替身。PA

的语言和演绎装置是受到严格限制的，一般不求形式替身肖假原命题。不说别的，原命题谈到一个数 n 的时候 n 随便怎么写，用十进制、二进制或其他记法都可以，而在它的形式替身里 n 必须写成数字 $\underbrace{SS\cdots S}_{n\text{个}}0$——为方便计缩写成 $\bar{n}$（连 0 也可以"缩写"为 $\bar{0}$！）。即使让了这一步，也别指望 PA 的表达力和演绎力好到这样的地步：凡真的普通算术命题在其中都有形式替身是可证的，凡假的都有替身是可驳的。不过，哥德尔发现对一类命题可以指望 PA 如此的好，那就是谈论个别数的原始递归命题。

引理 每个原始递归函数和关系在 PA 中强可表示。

略去既繁又难的证明，只说说可表示性概念。

n 元关系 r 在 PA 中强可表示，如果 PA 有公式 $R(x_1,\cdots,x_n)$，对任何数 $k_1,\cdots,k_n$，

(1) $r(k_1,\cdots,k_n)$ 成立 $\Rightarrow PA\vdash R(\bar{k}_1,\cdots,\bar{k}_n)$，

(2) $r(k_1,\cdots,k_n)$ 不成立 $\Rightarrow PA\vdash\neg R(\bar{k}_1,\cdots,\bar{k}_n)$。

n 元函数 f 在 PA 中强可表示，如果 PA 有公式 $R(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})$，它满足存在性和唯一性条件

(3) $PA\vdash\exists!yR(x_1,\cdots,x_n,y)$；

同时，对任何数 $k_1,\cdots,k_n,k_{n+1}$，

(4) $f(k_1,\cdots,k_n)=k_{n+1}$ 成立 $\Rightarrow PA\vdash R(\bar{k}_1,\cdots,\bar{k}_n,\bar{k}_{n+1})$，

(5) $f(k_1,\cdots,k_n)=k_{n+1}$ 不成立 $\Rightarrow PA\vdash\neg R(\bar{k}_1,\cdots,\bar{k}_n,\bar{k}_{n+1})$。

从这两个定义里删去条件(2)和(5)，得到 n 元关系和函数在 PA 中弱可表示性的定义。强的和弱的可表示性是有根本区别的，从某个角度看，PA 的不完全性就埋在这种区别里。

哥德尔的引理淋漓尽致地显示了 PA 的丰富性，远远超出元数学算术化的实际需要：找出编码阶段所得清单中那几十个原始递归函数和关系在 PA 中的表示公式。现在一举拿到了这

些表示公式，这就够了，但是从便于行文着想，最好参照原清单编一份同样长的函数符号与谓词清单。我必须交代，函数符号大抵都是冒牌的，然而无害。我们的皮阿诺算术 PA 有摹状号 ι。从 n 元函数 f 的任何表示公式 $R(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})$，无论按哪一种摹状号处理法，总能形成一个项 $\iota yR(x_1,\cdots,x_n,y)$。这个项分明能充当函数 f 的形式替身。为了醒目，就索性把这个项缩写成 $F(x_1,\cdots,x_n)$，仿佛 F 原是 PA 的函数符号似的，实际上当然不是：PA 只有 S，+，· 这三个函数符号。

新清单尽可亦步亦趋地模仿原清单；作为防止混淆的临时措施，尽可能把各款的起始字母改成大写。在偏后的几款中会有谓词 Ax，IC，Prov，我要说它们强表示着关系 ax，ic 和 prov。最后一款是我们期待的可证性谓词 Pr，按照定义，Pr(x) 就是 $\exists y$ Prov(y，x)。

让我们看谓词 Pr 与性质 pr 之间的关系。很清楚，Pr 弱表示 pr。因为，对任何数 n，如果 pr(n) 成立，就存在一数 m，prov(m，n) 成立。关系 prov 被谓词 Prov 强表示，所以，PA$\vdash$Prov($\bar{m}$，$\bar{n}$)，从而 PA$\vdash\exists y$Prov(y，$\bar{n}$)，这正是 PA$\vdash$Pr($\bar{n}$)。这表明

$$\mathrm{pr}(n)\text{成立}\Rightarrow \mathrm{PA}\vdash \mathrm{Pr}(\bar{n})$$

逆蕴涵式也是成立的，但需要某种元数学假定。这是哥德尔定理的要点之一，值得讨论几句。倘若 Pr 强表示 pr，假定 PA 的一致性就够了。哥德尔定理恰好显示 pr 在 PA 中根本不是强可表示的，我们就不得不求助于比一致性强的假定。按递减的强度排，这些假定是：健全性、ω-一致性和 1-一致性。

PA 有预定解释，是在自然数集 ω 与运算 +，· 构成的结构——通称 PA 的或算术的标准模型——⟨ω，+，·⟩上按常规给出的：数字 $\bar{n}$ 指数 n，+ 与 · 指 ω 上的加与乘，S_x 指 x+1。用

模型论手段能够证明 PA 是健全的，就是说，PA 的可证公式按预定解释都是真的。按预定解释，列入新清单的函数符号和谓词都有普通算术里的那种涵义，可证性谓词 Pr 正好表达性质 pr。我们所要的逆蕴涵式也就不足道地从 PA 的健全性得出。

哥德尔毫不怀疑 PA 是健全的，但他宁可用一个布劳威学派和希尔伯特学派也愿意接受的纯形式的弱假定：PA 的 ω-一致性。系统 T 是 ω-一致的，当且仅当，如果 $T\vdash\phi(\bar{0}), \phi(\bar{1}), \phi(\bar{2}), \cdots$ 则 $T\nvdash\exists x\neg\phi(x)$。现在设 PA 是 ω-一致的，又设 pr(n) 不成立。后者意味着 prov(m, n) 对每个数 m 都不成立。既然 prcv 被 Prov 强表示，那末，对每个数 m，$PA\vdash\neg Prov(\bar{m}, \bar{n})$。ω-一致性要求 $PA\nvdash\exists y Prov(y, \bar{n})$，正是所求的 $PA\nvdash Pr(\bar{n})$。

在 ω-一致性的定义中把一般公式 $\phi(x)$ 限制到原始递归公式，得到 1-一致性。方才的证法说明哥德尔原假定过强，改用 1-一致性假定已经足以得到

$$PA\vdash Pr(\bar{n})\Rightarrow pr(n)\text{成立。}$$

我们如愿以偿了。任意公式 ϕ 的哥德尔数 k 的数字 $\bar{k}$ 可看作 ϕ 在 PA 中的名称，记为 $\ulcorner\phi\urcorner$。一方面，$PA\vdash\phi\Leftrightarrow pr(k)$ 成立；另一方面，$pr(k)$ 成立 $\Leftrightarrow PA\vdash Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$，只要 PA 是 1-一致的。在 1-一致性假定下，PA 的可证性谓词 Pr 的确是恰当的：$PA\vdash\phi\Leftrightarrow PA\vdash Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$。

1.3. 自指句。第一定理："我不可证"不可判定 靠着某种临时编码，也仗着它固有的表示力，PA 开始纯形式地反映自我了。哥德尔那个令人神魂颠倒的自指句"我(在 PA 中)不可证"是 PA 这种反映能力的结晶，又是 PA 无能的第一个征兆。

插议：哥德尔句中文版；"怪圈"在哪里？ "我不可证"或"本句子不可证"不是最好的类比，有触目的循环，而且太直截了当