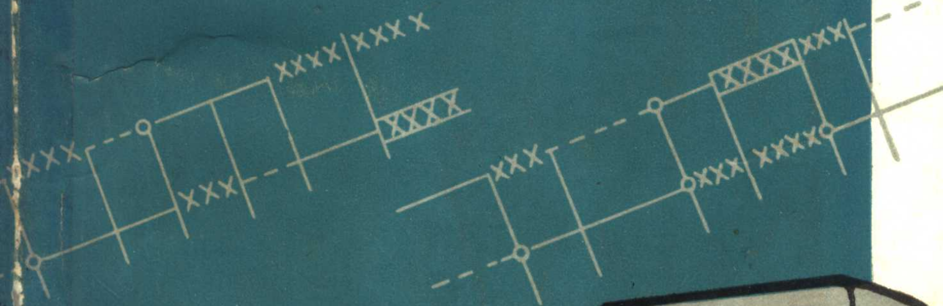
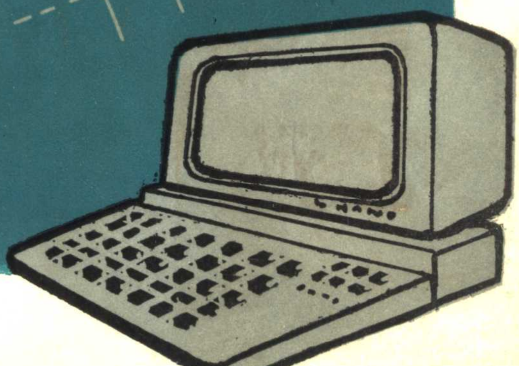
工程可靠性数学基础





李学伟 车成文 凌文兴 编

陕西科学技术出版社

工程可靠性数学基础

工程可靠性数学基础

李学伟　车成文　凌文兴　编

蒋传章　审

陕西科学技术出版社

工程可靠性数学基础

李学伟　车成文　凌文兴　编

蒋传章　审

责任编辑　赵生久

陕西科学技术出版社出版发行

（西安北大街131号）

新华书店经销　　西安电子科技大学印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32开本　6印张　119千字

1989年7月第1版　　1989年7月第1次印刷

印数：1—4,000

ISBN　7-5369-0599-8/O·18

定价：2.50元

前　言

工程可靠性数学是研究复杂工程系统的可靠性(信赖性、可靠度)——以产品的寿命特征为主要对象,运用概率论与数理统计的方法定量分析的一门应用数学学科。本书内容包括:常见的寿命分布;寿命的数据分析;不可修系统的可靠性;可修系统的可靠性分析;维修的最优策略。本书文字通俗、实例较多、便于自学,可供工科院校硕士研究生及高年级学生选修课的试用教材,也可以作为具有工科院校高等数学及初等概率知识的工程技术人员学习可靠性理论的一本入门读物。

本书由大连理工大学李学伟、陕西机械学院车成文、江苏工学院凌文兴编。西北建筑工程学院蒋传章审。

希望读者通过本书的学习,在各自的工作岗位上能运用可靠性数学的理论知识,结合生产实践,观察和解决一些工程问题。限于作者水平,本书中难免有不妥或错误之处,恳请读者予以指正。

编　者

1989 年 3 月

引 言

有人讲可靠性理论起源于本世纪的三十年代，实际上可靠性问题真正受到重视，还是在第二次世界大战期间。当时，盟国军队运往远东的设备、装置在运输和保管过程中，有相当数量因不能使用而报废。这一重大损失的出现推动了对可靠性的理论研究和实践的应用。纳粹德国也曾在VI型火箭的研制中开始考虑可靠性问题，后因战败而中止。美国从1943年开始由军队、学术界和生产厂家联合组成小组进行了各种研究活动，直到1957年，当美国国防部电子元器件可靠性咨询小组AGRFF (Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment) 提出报告以后，可靠性理论的研究方向才大体上被确定下来。

可靠性问题受到重视的基本原因之一是军事技术装备越来越复杂。但是装备越复杂，往往就越容易发生故障。当复杂化的程度严重到影响设备可靠性时，设备的复杂化也就失去了意义。因此，复杂化和可靠性之间存在着尖锐的矛盾。可靠性问题受到重视的另一个基本原因是，新的军事技术装备及星际飞行器等的研制周期都很长，经不起研制过程的重大反复，这就需要有一整套科学的方法，将可靠性的考虑贯穿于设计、生产、使用、维修的全过程。总之，复杂设备的可靠性成了相当严重而又迫切需要解决的问题。

近四十年来，可靠性理论和技术有了很大的发展。美国阿波罗飞船登月成功，是可靠性技术获得成功的生动例证。现在，可靠性理论和技术不仅在军事上，而且在各种民用工

业甚至中小企业中也受到普遍的重视。观察家们预言，未来产品竞争的焦点是可靠性。例如，生产彩电和电冰箱的厂家要公布自己产品的可靠度，而不能停留在广告上的文字宣传，诸如汽车制造业，飞机制造业甚至照明用的灯泡……等等都需要提供产品的可靠度，以使在竞争中取得优势。

我国1975年在北京召开的第一届全国可靠性数学理论讨论会上，只有两位学者作了报告。可是 1987 年在上海召开的中日可靠性学术讨论会上，有近百位中国学者参加会议并提交了自己的论文。一位著名的日本专家在回答记者问题时认为，中国的可靠性数学研究已经进入了当今国际水平的行列。目前，不少工科院校的教学中增设了有关可靠性的课程。今后，可靠性理论不仅在理论研究中且在工程实践中会越来越受到人们的重视。

可靠性理论是以产品的寿命特征作为其主要研究对象的一门定量的科学。一般来说，产品的寿命是一个非负随机变量。因此，研究产品寿命特征的主要数学工具是概率论和数理统计。目前，可靠性数学已经发展成了应用概率和应用数理统计的一个重要分支。

实际上，在解决可靠性问题中所用到的数学模型大体上可分为两类：概率模型和统计模型。概率模型是指从系统的结构和部件的寿命分布，修理时间分布等有关信息出发，来推断出与系统寿命有关的可靠性数量指标，以及进一步讨论使用维修的策略等。统计模型是指从观察数据出发，对部件或系统的寿命等进行估计、检验等。本书的第一章是预备知识，第二章讨论的是统计模型，第三、四、五章基本上讨论概率模型。

目　　录

第一章　常见的寿命分布

§1　寿命分布与失效率函数

§1.1 寿命分布与可靠度

若产品丧失了其规定的功能，便称为失效或故障。通常对不可修产品称为失效，对可修产品称为故障，但往往并不严格加以区分，我们可以把“失效”和“故障”看成是同义词。

从产品开始使用到它失效的时间称为产品的寿命。当产品失效时，它的寿命也就终止了。产品的寿命是与多种因素有关的，例如产品所用的材料，设计和制造工艺，以及产品在贮存和使用时的环境条件等都影响该产品的寿命。

我们通常用一个非负随机变量X来描述产品的寿命。非负随机变量X的分布函数

$$F(t)=P\{X\leqslant t\},\quad t\geqslant 0. \tag{1}$$

描述了一个产品的寿命分布。有了寿命分布函数$F(t)$,进而我们就可以知道在时刻t以前都正常(不失效)的概率，即产品在时刻t的生存概率：

$$R(t)=P\{X>t\}=1-F(t)=\bar{F}(t). \tag{2}$$

其中$\bar{F}(t)=1-F(t)$是以下常用的记号。生存概率$R(t)$常称为产品的可靠度函数或可靠度。由上所述可知，可靠度也可定义为：产品在规定的条件下，在规定的时间内，完成规定功能的概率。这里，对于一个给定的产品，规定的条件和

规定的功能确定了产品寿命X这个随机变量，而规定的时间是$[0,t]$，因此$R(t)$是产品在时间$[0,t]$内不失效的概率.

已知产品的寿命分布$F(t)$或可靠度$R(t)$便可求得产品的平均寿命，且可表为

$$EX=\int_0^\infty t dF(t)=\int_0^\infty \bar{F}(t)dt=\int_0^\infty R(t)dt. \tag{3}$$

这是因为

$$\begin{aligned}EX&=\int_0^\infty t dF(t)=\int_0^\infty\int_0^t du dF(t)=\int_0^\infty\int_u^\infty dF(t)du\\&=\int_0^\infty[1-F(u)]du=\int_0^\infty \bar{F}(u)du=\int_0^\infty R(u)du.\end{aligned}$$

产品的平均寿命EX，通常对于不可修产品，是指故障以前的平均工作时间MTTF (mean time to failure)；对于可维修产品，是指两次故障之间的平均时间MTBF (mean time between failnre)，有时也称为平均无故障工作时间.

§1.2 剩余寿命

假定产品工作到时刻t仍然正常，用$F_t(x)$表示产品的剩余寿命分布，则有

$$F_t(x)=P\{X-t\leqslant x|X>t\}=\frac{P\{t<X\leqslant t+x\}}{P\{X>t\}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{F(x+t)-F(t)}{1-F(t)}, & 当\ x\geqslant 0;\\ 0, & 当\ x<0.\end{cases} \tag{4}$$

或 $$\bar{F}_t(x)=1-F_t(x)=\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)},\quad 当\ x\geqslant 0. \tag{5}$$

容易验证，对于固定的 $t\geqslant 0$，$F_t(x)$是关于 x 的一个通常的分布函数。

我们可以进一步求得产品的平均剩余寿命为

$$m(t)=E\{X-t|X>t\}=\int_0^{\infty}xdF_t(x)=\int_0^{\infty}\overline{F}_t(x)dx$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)}dx\xlongequal{t+x=u}\int_t^{\infty}\frac{\overline{F}(u)}{\overline{F}(t)}du$$

$$=\frac{1}{\overline{F}(t)}\left\{\mu-\int_0^t\overline{F}(x)dx\right\}. \tag{6}$$

其中 $\mu=EX$ 为产品的平均寿命。

§1.3 失效率函数

为了讨论的方便，我们对连续型的和离散型的随机变量，分别来定义其失效率函数。

设产品的寿命为连续型非负随机变量 X，其分布函数为 $F(t)$，密度函数为 $f(t)$，则定义

$$r(t)=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}, \text{对 } t\in\{t: F(t)<1\} \tag{7}$$

为随机变量 X的失效率函数，简称失效率(或故障率)。

下面我们来解释 $r(t)$ 的概率意义。

若产品工作到时刻 t 仍然正常，则它在$(t,t+\Delta t)$ 中失效的概率为

$$P\{X\leqslant t+\Delta t|X>t\}=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}$$

$$\approx\frac{f(t)\Delta t}{\overline{F}(t)}=r(t)\Delta t \tag{8}$$

因此，当 Δt 很小时，$r(t)\Delta t$ 表示该产品在时刻 t 以前正常工作的条件下，即年龄为 t 的产品在时间区间$(t,t+\Delta t]$ 中

失效的概率，那么 $r(t)$就相当于单位时间内失效的概率了。所以，在工程应用中，将失效率定义为："产品工作到某一时刻后，在单位时间内发生失效的比例。"

例 1 设有三个灯泡，分别在 2、4、6 小时失效了. 试求从开始使用起，每隔 2 小时失效率的近似值。

解：设 N 为产品总数，N_t 为直到时刻 t 仍未失效的产品数，f_t 为在时刻 t 持续时间 Δt 内产品失效数，则由式(8)知

$$\frac{f_t/N}{N_t/N} \approx r(t)\Delta t.$$

即
$$r(t) \approx \frac{f_t}{N_t} \times \frac{1}{\Delta t}.$$

在 $t=2$ 时，三个灯泡中有一个失效了，故

$$r(2) \approx \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 17\%.$$

在 $t=4$ 时，在一个灯泡失效后又有一个灯泡失效了，故

$$r(4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25\%.$$

同理有 $$r(6) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = 50\%.$$

再从式(7)可得

$$r(t) = -\frac{d}{dt} \ln \bar{F}(t).$$

假定 $F(0)=0$，(即 $\bar{F}(0)=1$)，将上式积分得

$$\bar{F}(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(u)\,du\right\}. \tag{9}$$

因此，当 $F(0)=0$ 时，$r(t)$和 $F(t)$由式(7)和 (9) 互相唯一

确定。

若失效率函数 $r(t)$ 是非减的，则称寿命分布 $F(t)$ 属于递增失效率类，记作 $F\in\{IFR\}$. 若 $r(t)$ 是非增的，则称 $F(t)$ 属于递减失效率类，记作 $F\in\{DFR\}$。

例 2 设某种产品的失效率可表为 $r(t)=at$，其中 $a>0$，问其寿命分布属于哪种失效率类，并求出其分布函数 $F(t)$。

解： 显然寿命分布属于递增失效率类，即 $F\in\{IFR\}$。由式(9)知

$$\bar{F}(t)=\exp\left\{-\int_0^t au\,du\right\}=e^{-\frac{at^2}{2}}=e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2/a}}\right)^2}.$$

故 $$F(t)=1-e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2/a}}\right)^2}.$$

典型的失效率曲线如图 1.1 所示。一般早期(初期)的失效率 $r(t)$ 呈下降的趋势，中期(有效期)的失效率 $r(t)$ 基本上保持常数，后期(老化期)的失效率 $r(t)$ 又呈上升的趋势. 如图 1.1 所示的曲线称为"浴盆曲线"，因其形状十分类似于一个浴盆。

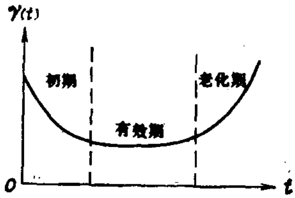


图 1.1 典型的失效率曲线

设产品的寿命为离散型非负随机变量 X，其概率函数为

$$p_k=P\{X=k\},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \tag{10}$$

此时失效率函数定义为

$$r(k)=P\{X=k|X\geqslant k\}=\frac{p_k}{q_k},\quad k=0,1,2,\cdots. \tag{11}$$

其中

$$q_k=\sum_{i=k}^{\infty}p_i,$$

由定义，显然 $r(k)\leqslant 1$。

§2 连续型寿命分布

本节介绍可靠性理论中常见的连续型寿命分布。它们有：指数分布、伽马分布、威布尔分布、截尾正态分布、对数正态分布和极值分布。

§2.1 指数分布

若非负随机变量 X 有密度函数

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t},\quad \lambda>0,\quad t\geqslant 0. \tag{1}$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，简记为 $X\sim E(\lambda;\ t)$，显然 X 的分布函数是

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0. \tag{2}$$

均值和方差分别为

$$EX=\frac{1}{\lambda},\quad V_{ar}X=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{3}$$

例 1 设某种产品的寿命服从指数分布，其平均寿命为 500 小时，问该产品在 20 小时内失效的概率和 1000 小时内不失效的概率各为多少？

解 指数分布的失效率为

$$\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}=\frac{-e^{-\lambda t}\cdot(-\lambda)}{1-(1-e^{-\lambda t})}=\lambda.$$

由式(3)知

$$\lambda = \frac{1}{EX} = \frac{1}{500} = 0.002.$$

故 $t = 20$ 时，

$$F(20) = 1 - e^{-0.002 \times 20} = 1 - e^{-0.04} = 0.0392.$$

即 20 小时内失效的概率约为 4%。又 $t = 1000$ 时，

$$R(1000) = 1 - F(1000) = e^{-0.002 \times 1000} = e^{-2} = 0.1353.$$

即 1000 小时内不失效的概率约为 13.5%。

例 2 若寿命服从指数分布，问平均寿命为多大时才能保证 40 小时内不发生故障的概率为 0.95?

解：由式(2)知

$$\frac{1}{\lambda} = t \Big/ \ln \frac{1}{\bar{F}(t)} = t \Big/ \ln \frac{1}{R(t)}.$$

以 $t = 40$，$R(t) = 0.95$ 代入得

$$\frac{1}{\lambda} = 40/\ln \frac{1}{0.95} = 779.83.$$

即平均寿命应为 779.83 小时。

指数分布可以用来描述某些电子元器件的寿命，也可作为一般产品在有效期的寿命分布来使用，它的一个最重要的性质是具有所谓“无记忆性”。即若一个产品的寿命服从指数分布，当它使用了时间 t 以后如果仍然正常，则它在 t 以后的剩余寿命与新的寿命一样服从原来的指数分布。用严格的数学形式表示即为

定理 2.1 若 $F(t)$ 是非负非退化的随机变量 X 的分布函数，则

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad t \geqslant 0.$$