

高压静电场

• 增订版

解广润编著 上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书介绍静电场的各种解析计算方法(直接积分法、镜象法、拉麦法、复变函数法、反转法、分离变量法、格林法和格林倍格法等),电子计算机上适用的数值计算方法(有限元法、有限差分法、模拟电荷法和边界元法等),以及近似解析计算和图解法。还介绍了各种实验方法和调整方法,且具体处理了一些工程上常遇到的电场问题,并得出相应的技术结论。

静电场理论不仅是高电压技术专业的基础,而且是应用计算机数值方法处理其他工程问题的极好模型。近年来静电应用已深入各个技术领域,本书可供各专业技术人员参考,尤其适合作高电压技术和设备专业教学参考书。

高 压 静 电 场

(增 订 版)

解 广 润 编 著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 扬中县印刷厂印刷

开本850×1156 1/32 印张18.5 字数471,000

1962年11月第1版

1987年5月第2版 1987年5月第3次印刷

印数3,501→5,000

统一书号, 13119·481 定价: 4.05元



序

高压静电场是高压工程专业的一个重要问题。大家知道，在高电压下绝缘会发生损坏，高压工作者的一个主要任务就是同这种现象作斗争。但是严格说来，并不是高电压的本身，而是作用在绝缘体中的强电场使绝缘损坏的。所以，详细研究在各种电极情况下电场的分布规律，就成为高压工作者的重要课题了。

本书的一部分内容是根据编者在哈尔滨工业大学讲授“静电场”一课所用讲稿编写而成的。书中比较全面地介绍了静电场的理论知识 and 实验方法，用它们研究了一系列的工程实际问题，并导出技术结论。本书的具体内容如下：

第一章介绍静电场的基本关系式；最后讨论了介质的临界电场强度、电场的均匀系数和绝缘物的利用系数。

第二章讨论在高压工程中常常遇到的一些简单几何形状电极的电场：同心球极的电场、同轴圆柱间的电场、平行圆柱间的电场、不同心的两球间的电场；并且讨论了电场最大值的和电容值的近似计算问题。本章中对于分裂相线的电场和高压球隙放电器的电场曾作详细的计算。

第三章讨论用拉麦方法计算椭球、椭圆盘、棒形电极、针-板电极、针-针电极、单极旋转双曲线面电极以及垂链线旋转面电极的电场。在本章中对于高压工程中的一个重要问题——接地问题——进行了计算，例如对于半球形接地器、圆盘接地器和管形接地器等接地电阻进行了计算，并对管形接地器的“接触电压”和“跨步电压”以及危险区范围进行了分析。在本章中用数学方法论证了针-板电场是最不均匀的电场，因之在高压工程中研究不均匀电场的問題时，可以用针-板电场作为典型。这一章也论及了高压分压器屏蔽圆盘电场的计算方法。在本章的后面对于高压导线穿

牆洞的結構問題進行了深入的研究,所得結論可用于實際設計。

第四章介紹用保角變換法計算電場的問題,其中除了對某些典型電極形狀的電場作了計算之外,還對以下的工程實際問題進行了研究:例如帶式接地器的接地電阻、局部放電電壓和絕緣厚度的關係、計及邊緣效應時平板電容器的電容、標準平板電容器保護環的寬度、高壓空氣電容器的羅高夫斯基電極、電容器型絕緣結構中的邊緣效應以及樹林對架空輸電綫路的屏蔽作用等等。在本章的最後對於有圓弧角的多角形電極的電場的計算作了介紹。

第五章討論了計算電場的反轉法。用這種方法去計算各種相交電極的電場是很方便的。本章並證明了將電極形狀稍加改變並不影響其電容值。

第六章是用分離變數法解拉普拉斯方程式,引出了在笛卡爾直角坐標中、在圓柱坐標中和在圓球坐標中拉普拉斯方程式的全面解答;並且引出了在旋轉拋物綫面坐標中、在旋轉扁橢圓坐標中和在旋轉長橢圓坐標中拉普拉斯方程式在某些特殊情況下的解答。在本章中探討的實際問題有:高壓靜電電壓表電場的補償問題、扇形心綫三心電纜的電容、在均勻電場中導電圓柱體(例如雷雲電場中的輸電綫)使電場變形的情况、不完全同心的球形電容器的電容、針式支持絕緣子的電場、簡單套管的電場以及有兩種土壤層時的管形接地器的接地電阻等等。

第七章首先介紹格林理論,然後用它論證互換原理和靜電場的單一性,並求出泊松方程式的特解。在本章中還對於幾種具體情況下格林函數的推求及其應用作了說明。

第八章是用網格法計算電場,並算出了電纜受到變形後的電場。

第九章討論電介質的極化。計算了變壓器油中的水滴、炭粒或氣泡使耐壓強度下降的問題,山嶺使雷雲電場變形的問題以及高壓空氣斷路器滅弧室中的電場;並比較了避雷針與避雷綫的電場。本章還介紹了格林倍格關於有各種不同介質時電場的計算方

法。对于介质在电场中受力的问题也给予充分的注意，并论证了纤维在变压器油中会自动在电极间搭成小桥的问题。

第十章说明电场的图解法和各种实验法，其中对于用电解槽进行模拟实验的问题以及用西林电桥测量电容的问题作了详尽的探讨。

第十一章介绍调整电场的各种方法，其中介绍了在以下各种电机和电器中调整电场的方法：保护间隙的奥斯金电极、绝缘子串的保护环、高压阀型避雷器的均压环、支持式绝缘子的内凸电极、瓷套管的法轮盘、高压导线穿墙洞的电极结构、管型避雷器的中间电极、电容器式套管的中間电极、静电电压表的补偿环、电缆的多层介质绝缘以及电机定子高压导线出槽处的半导体漆层等等。

在附录中列出了多种电极的电容公式，它是进行实际设计时得力的参考工具。

从上述本书的内容可以看出，在讨论中不可避免地要牵涉到一些复杂的数学问题。编者注意到读者可能遇到的数学困难，所以本书在叙述上力求深入浅出，讲清物理概念，而在必须用复杂的数学方法时，则力求从最基本的数学概念谈起，这样就能保证具备一般的高等数学知识的读者在学习本书时不会发生太多的困难。

本书的第十章和第十一章是陈慈萱同志协助写出的。教研室的同志们曾对本书提供不少宝贵意见，特志谢意。

如蒙读者赐教，非常欢迎。来信请由上海科学技术出版社转交。

解广润

于上海新园

增订版说明

拙著这次增订，主要增加了两章和一个附录，其余照原版重印。

在新增的第十二章中，我们介绍了四种计算静电场的数值方法：有限差分法；有限元法；模拟电荷法以及边界元法，各自列举了计算实例以及在计算机上通过的计算程序和计算结果，以便学习应用。

介质在静电场中的受力虽早已由热力学的观点推导出相应的公式，但是介质受力的机理却一直是一个难以理解的问题。例如，平行于介质交界面的电场强度 E_t ，为什么会使介质交界面受到垂直于交界面方向的力呢？为此，麦克斯韦不得不引用未加证明的猜想——电力线之间有斥力（麦克斯韦力）——来解释。在新增的第十三章中，我们证明：在任何情况下，介质受力的机理都可以用偶极子及空间电荷的受力来解释。这就使得静电学在介质受力问题上的缺口得到了自圆其说的解决。

根据兰帕-汤普逊定理制成的欧姆绝对测量的计算电容基准器，结构简单，测试迅速，易于保存欧姆，已为世界各国普遍采用。我们在附录 A 中对此作了介绍。

由于照顾原版纸型的利用，所以新增的部分只好放在原版最后一章的后面。重印部分没有用简化偏旁简体字。这些请读者谅解。

本增订版新增的第十二章是陈慈萱同志在美国俄亥俄州立大学进修时编写的，

解广润
于武汉珞珈山

目 录

序

增订版说明

第一章 静电场的基本关系式	1
§ 1.1 库伦定律	1
§ 1.2 电感应强度和高斯定律	7
§ 1.3 电位及电压	12
§ 1.4 电容	18
§ 1.5 部分电容	23
§ 1.6 笛卡尔直角坐标中高斯定律的微分形式	32
§ 1.7 在其他各种坐标系统中的拉普拉斯方程式	34
§ 1.8 临界电场强度	41
习题	43
第二章 几种简单几何形状电极的电场	44
§ 2.1 同心球极间的电场	44
§ 2.2 同轴圆柱电极间的电场	47
§ 2.3 镜象法——等位面法	51
§ 2.4 两平行圆柱电极间的电场	58
§ 2.5 分裂相线的电场	64
§ 2.6 两不同心球之间的电场	83
§ 2.7 球隙放电器电场的近似计算	88
§ 2.8 电场最大值的近似计算	93
§ 2.9 电容的近似计算	95
习题	103
第三章 拉麦方法——等位面和特定曲面组相吻合的电场的 解法	104
§ 3.1 代表等位面的曲面组所需满足的条件	104
§ 3.2 曲面组 $\frac{x^2}{a^2+\theta} + \frac{y^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} = 1$ 所代表的等位面	105

§ 3.3	带电椭球导体的电场	108
§ 3.4	带电椭圆盘的电场	110
§ 3.5	带电的椭圆旋转体及棒形电极的电场	114
§ 3.6	双极旋转双曲面的电场	123
§ 3.7	单极旋转双曲面的电场	125
§ 3.8	垂链线旋转面	130
	习题	140
第四章 用保角变换法解静电场问题		141
§ 4.1	正则复变函数的性质	141
§ 4.2	用 $W = Z^2$ 的函数进行变换	146
§ 4.3	用 $W = Z^{\frac{1}{2}}$ 的函数进行变换	147
§ 4.4	用 $W = \ln Z$ 的函数进行变换	149
§ 4.5	椭圆柱体或双曲线柱体的电场	152
§ 4.6	线性变换	158
§ 4.7	利用线性变换求不同轴圆柱电极间的电场	161
§ 4.8	交角为 α 的两电极间的电场	163
§ 4.9	许瓦兹变换	168
§ 4.10	直角对平板的电场	169
§ 4.11	平板电容器的边缘电场	173
§ 4.12	电容器型绝缘结构中的边缘效应	182
§ 4.13	两个棱角之间的电场	185
§ 4.14	树林对架空输电线路的屏蔽作用	188
§ 4.15	有圆弧角的多角形电极的电场	194
	习题	200
第五章 用反转法解静电场问题		202
§ 5.1	反转法中的几何关系	203
§ 5.2	反转前后的电位值的关系	206
§ 5.3	两相切金属球和点电荷之间的吸力	208
§ 5.4	两正交导体球的电场	210
	习题	212
第六章 用分离变数法解拉普拉斯方程式		213
§ 6.1	直角坐标系(笛卡尔坐标系)中拉普拉斯方程式的解	213

§ 6.2	圆柱坐标系统中拉普拉斯方程式的解	222
§ 6.3	在均匀电场中导电圆柱体使电场变形的情况	231
§ 6.4	在金属圆桶中的电场分布	234
§ 6.5	高压静电电压表电场的补偿	237
§ 6.6	扇形心线电缆的电场	241
§ 6.7	圆球坐标系统中拉普拉斯方程式的解	249
§ 6.8	两球球心有一很小距离的球形电容器	258
§ 6.9	两个带电的半球壳的电场	261
§ 6.10	针式支持绝缘子的电场	264
§ 6.11	简单套管的电场	270
§ 6.12	有两种土壤层时的管形接地电极	275
	习题	280
第七章	格林理论及其应用	281
§ 7.1	格林公式	281
§ 7.2	互换原理	283
§ 7.3	拉普拉斯方程式的解式的唯一性	284
§ 7.4	泊松方程式的特解	287
§ 7.5	格林函数	290
§ 7.6	“上半空间”的电场问题	292
§ 7.7	球形边界的电场问题	295
§ 7.8	圆形边界的电场问题	297
§ 7.9	第二类边界条件时的格林函数	300
§ 7.10	区域中间部分电场的近似计算	302
	习题	306
第八章	用网格法计算电场	307
§ 8.1	网格法的原理	307
§ 8.2	填出网格各结点上电位的步骤	309
§ 8.3	极坐标时网格的画法	316
§ 8.4	变形电缆的电场	319
	习题	321
第九章	电介质的极化	322
§ 9.1	电介质的极化	322

§ 9.2	电介质存在时的电场计算	326
§ 9.3	介质中的电感应强度	329
§ 9.4	电力线在介质交界面上的折射	330
§ 9.5	有介质交界面时的镜象法	334
§ 9.6	均匀电场中的介质球使电场变化的情况	336
§ 9.7	均匀电场中的介质椭圆柱体使电场变化的情况	344
§ 9.8	高压空气断路器灭弧室中的电场	348
§ 9.9	在有各种不同的均匀介质时, 计算电场的方法(格林倍格法)	361
§ 9.10	在交界面为无穷大平面的两种介质中的电场分布	363
§ 9.11	均匀介质圆柱体(ϵ_2)放在无穷大的另一种介质(ϵ_1)中的电场分布	367
§ 9.12	在均匀介质中有一导体球时电场的分布	371
§ 9.13	在导体平板上有一介质半圆柱体时电场的分布	375
§ 9.14	介质在电场中所受的力	376
§ 9.15	在各向异性介质中电场的计算	384
	习题	389
第十章	电场的图解和实验法	391
§ 10.1	电场的图解法	391
§ 10.2	电场实验法概述	393
§ 10.3	用探针法测量电位	394
§ 10.4	测量绝缘子(或套管)表面上电位分布的方法	396
§ 10.5	测量电力线的方法	398
§ 10.6	电场的模拟实验法	401
§ 10.7	电容的测量	410
	习题	416
第十一章	电场的调整	417
§ 11.1	改变电极形状来调整电场	417
§ 11.2	利用中间电极调整电场	423
§ 11.3	利用外界电场的影响调整原有电场	433
§ 11.4	适当配用不同介电系数的介质来调整电场	433
§ 11.5	利用电阻的电位降影响来调整电场	435
	习题	438

附录 各种电极的电容公式	439
第十二章 静电场的数值计算法	458
§ 12.1 有限差分法	458
§ 12.2 有限元法	472
§ 12.3 模拟电荷法	497
§ 12.4 边界元法	515
习题	530
第十三章 介质在静电场中受力的机理	531
§ 13.1 介质在静电场中受力的普遍公式	531
§ 13.2 介电系数 ϵ 和密度 τ 的关系	536
§ 13.3 从偶极子受力的观点来解释线性介质在静电场中的受力	541
§ 13.4 从偶极子受力的观点来解释非线性介质在静电场中的受 力	548
§ 13.5 从偶极子受力推导介质受力的普遍公式	558
习题	562
附录 A 兰帕-汤普逊定理——欧姆绝对测量的计算电容法 原理	564
参考文献	570
人名中外文对照表	573
索引	574

第一章 靜電場的基本關係式

§ 1.1 庫倫定律

庫倫用實驗的方法證明，在無窮大的均勻電介質（絕緣體）中，兩個靜止的集中電荷（點電荷）之間互相的作用力 F 的大小與兩電荷間距離 r 的平方成反比，而與各自的電荷量 Q 和 q 都成正比； F 的方向為沿兩電荷間聯綫的方向，當兩電荷極性相同時為排斥力，當兩電荷極性相反時為吸引力。將 F 的值寫成數學式子，即成

$$F = \frac{Qq}{kr^2}; \quad (1-1)$$

式中， k 為比例常數，它的值與介質的種類以及 Q 、 q 、 r 和 F 所用的單位有關。在真空中，當 Q 和 q 所用的單位為庫倫， r 的單位為米， F 的單位為牛頓*時，實驗證明

$$k = \frac{1}{9 \times 10^9}.$$

為了應用的便利，通常將(1-1)式中的 k 寫成

$$k = 4\pi\epsilon = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r;$$

式中， $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ 表示介質的電的性質，叫做電介質的介電係數； 4π 稱為合理因子，它的引進可使一系列常用的公式得到較為簡化的樣子。 ϵ_0 叫真空的介電係數， ϵ_r 叫介質的相對介電係數。令真空的 $\epsilon_r = 1$ ，於是可見

$$\epsilon_0 = \frac{k}{4\pi} = 8.86 \times 10^{-12}.$$

在其他介質中， ϵ_r 不再為 1，而為其他數值。各種常用介質的 ϵ_r 值見 § 1-8 中的表 1-1。

* 牛頓即千克·米/秒²，1 牛頓等於 10⁵ 達因。

如果將 F 的數值和方向都由數學式加以表達，那末就成為

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3} \mathbf{r}; \quad (1-2)$$

式中， \mathbf{F} 表示作用力的數值和方向； \mathbf{r} 在數值上等於 r ，但它還表示出方向是沿 Q_1 和 Q_2 的聯綫上（沿 r 增大的方向）。上式就叫做庫倫定律。

研究的結果表明，兩個電荷之間的互相作用力並不是一個電荷對另一個電荷超越空間而作用的結果（所謂超距作用），而是一個電荷周圍的電場對另一個電荷作用的結果。拿上述的兩個靜止點電荷 Q 和 q 作為例子： q 所受的力量是電荷 Q 的電場對 q 作用的結果；而 Q 所受的力量則是電荷 q 的電場對 Q 作用的結果。在電荷周圍的介質中是必然要有電場存在的。會使放入其中的試探電荷受到力的作用是電場的一個特性*。如果相對於介質和我們觀察者來說電荷是不動的，同時它的數值也是不變化的，那末其相應的電場將不隨時間而變化。這種電場叫做靜電場。

為了研究點電荷 Q 的電場，我們可以把點電荷 q 作為試探用的電荷。在試探用的點電荷 q 的引入不致使原來的電荷分布情況發生改變的條件下， q 所受的力 \mathbf{F} 對 q 值的比數就叫做 q 所在點的電場強度 \mathbf{E} ，即

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (1-3)$$

電場強度 \mathbf{E} 是一個向量，單位則顯然是牛頓/庫倫，它的方向和 \mathbf{F} 的方向相同。

在相對於介質和我們觀察者是不動的和不變的點電荷 Q 的情況下，在 Q 周圍的介質中任一點的電場強度 \mathbf{E} 不難由 (1-2) 式求出為

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3} \mathbf{r}. \quad (1-4)$$

* 關於電場的其他特性和電場的物質性將在 § 1.4 中討論。

如果点电荷不止一个，而是有很多个(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)，实验证明，这时在某点的总电场强度将等于各个点电荷在该点的电场强度的向量和，也就是说，可以用迭加原理来计算电场强度。用数学式表示，即成

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i; \quad (1-5)$$

式中， r_i 为由所研究的点子到电荷 Q_i 之间的距离。电场的这种性质是和 \mathbf{E} 对 Q 的线性关系（即 \mathbf{E} 和 Q 的一次方成正比）分不开的。如果 \mathbf{E} 是和 Q 的其他次方成正比，就显然不可能用迭加原理来计算电场强度了，因为此时将 Q 分成几个较小的部分分别计算再迭加求出的 \mathbf{E} ，和将 Q 一次计算所得的 \mathbf{E} 是不相同的。

对于分布电荷来说，上式可改为积分的形式，即

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \int \frac{dQ}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1-6)$$

在一般情况下，为了保证试探用的点电荷 q 的引入不会引起原来电荷分布情况的改变，必须令 q 的电荷量极为微小而趋近于零值。因之电场强度的定义也可以叙述为：当试探用的点电荷 q 的电量趋近于零时，它在电场中所受的力 \mathbf{F} 与 q 的比值叫做 q 所在点的电场强度 \mathbf{E} ，即

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (1-7)$$

应当指出，即使 $q \rightarrow 0$ ，它引入后也不可避免地会引起原有电场的某些改变，特别在 q 所在点的直接附近更是如此。由于点电荷 q 的半径为零，所以即使电荷量 $q \rightarrow 0$ ，在 q 引入后在 q 点直接附近的总电场强度就将由原来的某值一变而为无穷大。 $q \rightarrow 0$ 只是保证了原来电荷的分布情况不会因 q 的引入而发生变化，也就是在原来电荷的直接附近的电场强度不致发生变化而已。某些书上所说的“微小的试验电荷的携入可不致使原有电场发生改变”是不正确的。

试探电荷 q 在电场中受的力可由(1-3)式求出为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (1-8)$$

在应用上式时要注意两点：(1) 上式只是在 q 的引入不会使原来的电荷分布情况发生改变的条件下才是正确的；(2) 上式中的 \mathbf{E} 是在 q 沒有引入以前在該点的電場强度，而不是 q 引入后在該点出現的总的電場强度。

電場的特征可以用电力綫的分布情况来表示。所謂电力綫就是在綫上每一点的切綫方向都与該点電場强度 \mathbf{E} 的方向相同的曲綫。由于在一个点子上的 \mathbf{E} 只有一个方向，所以电力綫是不会互相交叉的。在電場中的每个点子都通过相应的一根电力綫，而在整个電場中可以画出无穷多根电力綫来。例如，一个点电荷的電場的电力綫就是由点电荷向外輻射的无穷多根輻射綫。如果我們在垂直于电力綫的单位截面上只画出等于該截面中心的電場强度值数目的电力綫，那末根据电力綫的疏密，就可决定電場强度值的大小。

为了求出电力綫的方程式，可以从電場中任一点 P 的電場强度 \mathbf{E} 出发。已知

$$\mathbf{E} = i E_x + j E_y + k E_z;$$

式中， i, j, k 各为沿 x, y, z 軸方向的单位向量。假設电力綫在 P 点的一个元段

$$d\mathbf{l} = i dx + j dy + k dz,$$

那末为了使 \mathbf{E} 的方向与 $d\mathbf{l}$ 的方向相一致，显然必須滿足

$$\cos \alpha = \frac{E_x}{|\mathbf{E}|} = \frac{dx}{|d\mathbf{l}|};$$

式中， α 为 \mathbf{E} 与 x 軸的夹角。上式可改写为

$$\frac{E_x}{dx} = \frac{|\mathbf{E}|}{|d\mathbf{l}|}.$$

同理还必須滿足

$$\frac{E_y}{dy} = \frac{|\mathbf{E}|}{|d\mathbf{l}|},$$

$$\frac{E_z}{dz} = \left| \frac{E}{dl} \right|.$$

將上三式合併, 可得

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \quad (1-9)$$

即為電力綫的微分方程式, 經積分即可求出電力綫的方程式。

根據定義可知, 電力綫是從正電荷出發, 而終止到負電荷上的, 因此在靜電場中不可能出現封閉的電力綫。

[例 1-1] 在無窮大的平板上有電荷, 電荷密度為 σ 。求空間任一點的電場強度及電力綫的方程式。

解: 將無窮大的平板認為由半徑為 r 寬度為 dr 的很多圓環所組成, 並且將坐標的原點取在這些圓環的中心, 而令 P 點正好在 z 軸上(參看圖 1-1)。

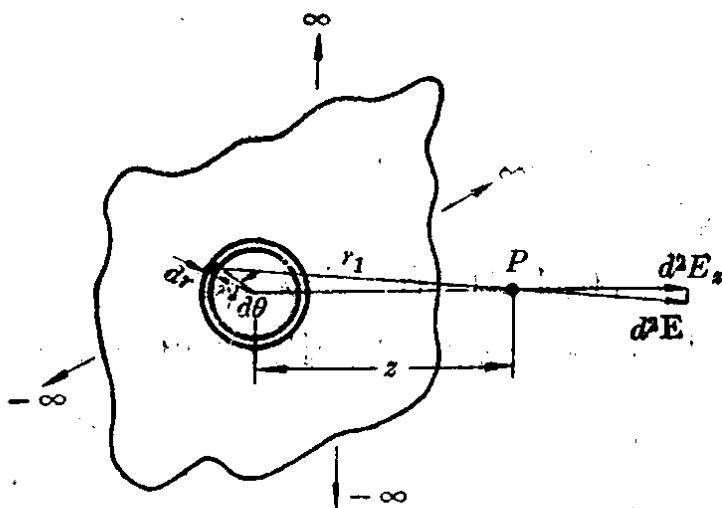


圖 1-1 帶電的無窮大平板外的電場計算用圖

在 $dr \cdot r d\theta$ 元面積上, 與元電荷 $dq = \sigma r d\theta dr$ 相應的在 P 點的電場強度為

$$d^2\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\sigma r dr d\theta}{r_1^3} \mathbf{r}_1.$$

由於對稱的關係, 同整個圓環中的電荷相應的在 P 點的電場強度顯然為 z 方向的, 所以為了求整個圓環上的電荷在 P 點的電場強度 dE_z , 可只將 $d^2\mathbf{E}$ 在 z 軸的分量

$$d^2E_z = |d^2\mathbf{E}| \frac{z}{r_1} = |d^2\mathbf{E}| \frac{z}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

對 θ 積分而得, 即

$$dE_z = \int d^2E_z = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma r dr}{2 \epsilon_0 \epsilon_r (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

求整个平板上的电荷在 P 点的电场强度 E_z 时, 可将上式对 r 积分, 即

$$E_z = \int dE_z = \int_0^{\infty} \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 \epsilon_r (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r}. \quad (1-10)$$

电力线的方程式, 可以从 (1-9) 式求得. 此时 $E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r}$, $E_x = E_y = 0$, 所以 (1-9) 式变成

$$dx = 0, \quad dy = 0;$$

经过积分即得电力线的方程式

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1, \\ y &= C_2; \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

式中, C_1 及 C_2 为任意常数. 此时电力线为平行于 z 轴的任意直线.

[例 1-2] 有一个无穷长的细直线, 每单位长度的电荷为 σ , 求空间任一点的电场强度和电力线的方程式.

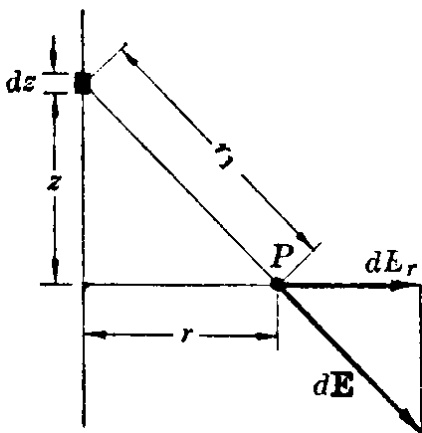


图 1-2 带电的无穷长细直线周围电场的计算用图

解: 参看图 1-2, 元电荷 σdz 在 P 点的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{\sigma dz \mathbf{r}_1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r_1^3}.$$

由于对称的关系, 整个线电荷在 P 点的电场强度 \mathbf{E} 将只在 r 方向, 于是只要将上式中的 $d\mathbf{E}$ 在 r 方向的分量 dE_r 对 z 积分即可求得 \mathbf{E} :

$$dE_r = |d\mathbf{E}| \frac{r}{r_1},$$

$$\begin{aligned} \therefore E_r &= \int dE_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma r dz}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r_1^3} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma r dz}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}. \end{aligned}$$

求电力线的方程式时, 可以将 (1-9) 式改为圆柱坐标的形式,

即