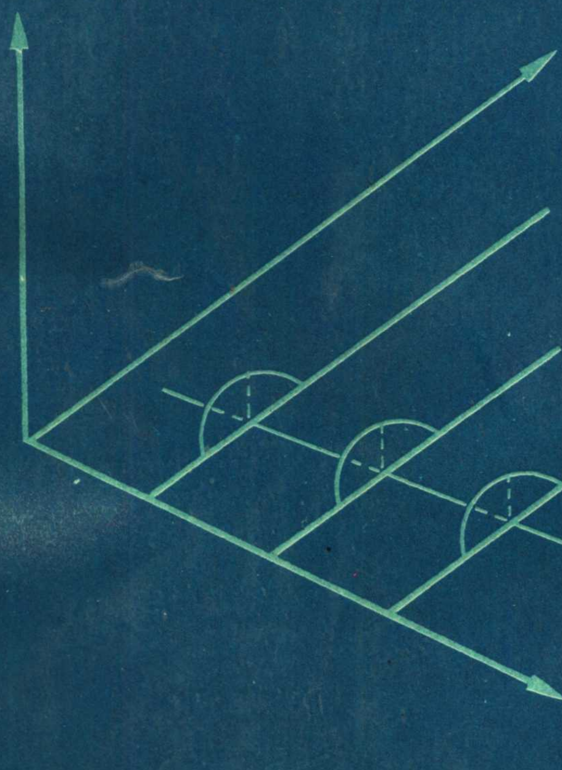
多变量经济数据统计分析

王国梁　何晓群　编著



陕西科学技术出版社

多变量经济数据统计分析

王国梁　　何晓群　编著

陕西科学技术出版社

(陕)新登字第 002 号

多变量经济数据统计分析
王国梁　　何晓群　编著
陕西科学技术出版社出版发行
(西安北大街 131 号)
西安公路学院印刷厂印刷
850×1168 毫米　32 开本　17 印张　45 万字
1993 年 11 月第 1 版　　1993 年 11 月第 1 次印刷
印数:　　1—3,000
ISBN 7—5369—1927—1／F・96

定　价: 12.00 元

土国梁，男，1952年生于陕西省清涧县。1977年毕业于成都理工学院物探系。现任西安统计学院副院长、副教授。参加国际学术会议三次，国内外发表学术论文14篇，一项科研成果获部级二等奖，六项获省、市奖。

何晓群，男，1954年6月出生于西安市长安县。理学硕士。现为陕西财经学院统计系副教授，硕士研究生导师。近年来多次参加国内外统计学术会议，发表论文四十余篇。

序　　言

多变量的统计分析是分析资料的一个重要手段，随着科学技术的发展，随着改革开放的需要，随着对经济、社会、教育、心理等各项研究的不断深入，这一统计方法日益受到重视．不仅如此，就是在高科技的领域内，无论是图象处理、自动控制、以及人工智能等方面，多变量统计分析也是一项不可缺少的技术．面对这一种情况，各行各业的学生、教师、研究工作者都希望有一本能结合本专业需要，数学推导不是很多、有丰富实例的入门书，以便自己能较快地掌握这一工具，将它用于实际．这本书就是想给经济方面的读者提供一本合用的入门书．

结合专业的多变量分析的书，早在 70 年代末期、80 年代初期就已有了，如气象、地质等部门已出版了不少这一类的书籍．到了 80 年代的中期一些结合经济、社会、教育、医学……等方面的专业多变量统计的书已陆续出现，到了 80 年代末期，已有相当数量的各种著作．然而对经济工作者来说，这些书并不合于他们的情况，通常有两种困难难以克服：1、专业统计的书所举的例子专业性太强，不同领域的人很难从这一类书中得到启发，因而对学习这些方法就失去了兴趣，如《地质因子分析》一书大量地引用了地质方面的例子，用的效果很好，然而不懂地质的人不易看懂；2、一般的教科书偏重于介绍方法、程序、推理，又太数学化，学了不知道怎么用，而且在推理上较多地使用了数学，较少有统计的分析．学起来枯燥，不好理解．

本书的两位作者近几年来做了不少结合我国实际的经济资料统计分析的工作，并且在经济统计的专业开设这门课程已有多年的教学经验，因此可以期望这本书能够克服上面我提到的

两个困难。尤其是在对统计分析的结果给以经济解释，在统计分析的概念、结论的经济意义方面，会有独到的见解是不奇怪的；在写作上也会照顾到经济方面的特点，选材、推导以及数学上的准备知识，计算机程序上的重点……等等都会难易适度，切合实际。

目前各级领导都很强调对经济问题应有定量的分析，编写出版这样一本书无疑对推动经济的定量分析会有好的作用，希望这本书的出版能受到经济、社会科学界各种层次的学生、教师、研究人员的欢迎。

张尧庭

1993年7月

编者的话

我国自70年代以来，多指标的统计分析在国民经济和科学研究的许多部门都得到了广泛的应用，同时也出版了一些结合专业的多指标统计分析的书．但适合于财经类院校一般大学生和研究生的教科书却还少见．随着当前教学改革的不断深化，以及经济活动中多指标经济数据量化统计分析的需要，国内财经类院校相继给研究生和本科生也开设了该课程．但如何适当选取讲授内容是一个很值得探讨的课题．

自1987年来，我们分别在西安统计学院、陕西财经学院的助教进修班和研究生班讲授该门课程，同时在经济学专业的四届本科生中试讲该课程，收到了良好的教学效果．总结我们的教学实践，在本书编写时采用如下的选材原则：(1)、阐明多指标统计分析方法的统计背景和统计思想；(2)、不追求严密的理论推证，重点是通过应用实例，尽量解释清楚计算结果的经济含义；(3)、书中涉及的各种多指标统计分析方法的理论推证，均列出了参考书籍，便于学生课后查阅．上述选材原则是否合适，恳请广大读者提出宝贵意见．

虽然本书的出发点是为财经类院校编写教材，但同时作者也希望能对应用数理统计工作者、政府统计部门从事统计分析的工作者及理、工、农、医和管理专业的学生，在加深统计思想、拓广统计背景方面也有所裨益．

作者近年来在教学、科研中的一些进步，与张尧庭、方开泰两位先生的谆谆教诲是密切相关的．特别是张尧庭先生，在百忙中亲自审阅了部分章节的书稿，为本书编写的体裁指出了导向性的意见．对两位先生付出的心血，编者谨致以衷心的感谢．

由于多指标统计分析方法的计算一般离不开电子计算机，

为便于教学和部分读者开展科学研究工作，本书所列的各种统计分析方法，西安统计学院计算中心的高强同志，用 Truc Basic 语言编制了一套统计分析软件包。为压缩篇幅，书中未列出计算程序，有兴趣的读者可与编者联系。对于使用本教材的有关院校及开展科研的读者，我们将以极优惠的价格提供统计分析软件包。

为了使本书的教学效果更佳，使数值例子更具有典型性，书中还有个别材料取自有关的参考书籍，在此向有关的作者表示歉意和感谢。本书在编写过程中，得到了西安统计学院教材编委会的大力支持，作者表示衷心的感谢。由于水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请广大读者不吝赐教。

西安统计学院　王国梁
陕西财经学院　何晓群
1993 年 7 月于西安

目　录

第一章 矩阵代数

矩阵代数是多变量统计分析的有力工具，几乎本书的每一章节都运用矩阵代数的知识。尽管读者大都已有矩阵代数的基础，但是多元统计分析中所用的许多矩阵知识，在财经类院校的线性代数教科书中涉及很少，故这一章把本书所需的矩阵代数的一些结果简要介绍给读者。本章结论的大多数证明可参见文献[1]。

§ 1.1 定义及基本运算

一、矩阵与向量的定义

由 $n \times p$ 个实数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,p)$ 排成的一个矩形数表，称为一个 n 行 p 列矩阵，并用 A 表示

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

有时也简记作 $A=(a_{ij})_{n\times p}$，a_{ij} 称为矩阵 A 的元素。当 $n=p$ 时，称 A 为 n 阶方阵。若 $p=1$ 时，矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{n1} \end{bmatrix}.$$

我们称它为 n 维列向量。当 $n=1$ 时，矩阵的形式为 $(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1p})$，我们称它为 p 维行向量。若 A 的元素全为零，A 称为零矩阵，记作 $A=0$。若 A 为方阵，方阵中下标重复的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为主对角元素，其余元素称为非对角元素。若方阵只有对角元素不为零，非对角元素全为零，则称 A 为对角阵，记作

$$A=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

若对角矩阵其对角线上的元素全为 1，称 A 为 n 阶单位矩阵，记作 $A=I$

如果将矩阵 $A_{n\times p}$ 的行与列彼此交换，得到的新矩阵是一 p 行 n 列矩阵，记作

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

称它为 A 矩阵的转置矩阵。

若 A 为方阵，且 $A'=A$，则称 A 为对称阵；若 $A'=-A$，则称 A 为斜对称阵。根据定义，斜对称阵的对角元素必为零。

若方阵 A 中，当 $i>j$ 时所有元素均为零，则称 A 为上三角阵；当 $i<j$ 时所有元素均为零，则称 A 为下三角阵。

二、矩阵的基本运算

1、两个 $n\times p$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 的和，定义为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

2、实数 α 和 $n\times p$ 矩阵 A 的积记作 αA，仍是 $n\times p$ 矩阵，

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

3. $r \times p$ 矩阵 $A =(a_{ij})$ 和 $p \times r$ 矩阵 $B=(b_{jk})$ 的积记作 AB，是 $n \times r$ 矩阵，它的第（i，k）元为 $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}$，即

$$AB = (\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk})$$

对于矩阵的加，数乘与乘的运算，容易验证：

对加法满足结合律和交换律

$(A+B)+C=A+(B+C)$，$A+B=B+A$。

对乘法满足结合律

$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$，$(\alpha A)B=\alpha(AB)$，

$(AB)C=A(BC)$。

对乘法和加法满足分配律

$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$，$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$，

$A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$。

此外，矩阵的转置运算还有如下关系式

$(A+B)'=A'+B'$，$(\alpha A)'=\alpha A'$，

$(AB)'=B'A'$。

三、矩阵分块

在矩阵运算中，往往先将矩阵“分块”再进行运算，这样做特别是对高阶矩阵会起到简化运算的作用。例如，将两个 $n \times p$ 矩阵 A、B 分别分为四块：

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

其中 A_{ij},B_{ij} 为 $n_i \times p_j$ 子矩阵，$i=1$，2；$j=1$，2；$n_1+n_2=n$;$p_1+p_2=p$，则有

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{bmatrix}$$

又如，将 $n \times p$ 矩阵 A 分成如上四块，而将 $p \times r$ 矩阵 B 分成如下四块

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

其中 B_{ij} 为 $p_i \times r_j$，$i=1$，2；$j=1$，2；$r_1 + r_2 = r$，则容易验证有下列分块乘法规律

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

当然，还可以按以上原则将矩阵分成更多的块进行运算，行块和列块的数目也不必相同.

§1.2 行列式、矩阵的逆和秩

一、方阵的行列式

由 n 阶方阵 A 中的元素组成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记为 $|A|$ 或 $detA$。它有下面一些熟知的性质:

1、若 A 的某行（或列）元素全为零，则 $|A|=0$。

2、$|A'|=|A|$

3、$|\alpha A| = \alpha^n |A|$

4、若 A 的两行（或列）成比例，则 $|A|=0$。

5、若 A 的两行（或列）互换，所得矩阵之行列式 $= -|A|$.

6、若将 A 的某一行（或列）乘以一个常数加到另一行（或列）上，所得矩阵的行列式等于 $|A|$。

本书中还经常用到下列一些性质：

1、若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 n 阶方阵，则

$$|A_1 A_2 \cdots A_k| = |A_1||A_2|\cdots|A_k|$$

2、若分块矩阵 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 中，$A_{12}=0$ 或 $A_{21}=0$，则

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|$$

3、若 A 和 B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 阵，

则

$|I_m + AB| = |I_n + BA|$。证明见[2]

4、若 A 为正交阵，则 $|A| = \pm 1$。

5、若 A 为三角阵，则 $|A| = \prod_i a_{ii}$

二、逆矩阵

设 A 为 n 阶方阵，如果有 n 阶方阵 B，使得

$AB = BA = I$

则称 B 是 A 的逆矩阵，记作 A^{-1}。逆矩阵有以下基本性质：

1、$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

2、$(A')^{-1} = (A^{-1})'$

3、若方阵 A 和 B 均有逆存在，则

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

4、设 A 为 n 阶可逆阵，b 和 a 为 n 维向量，则方程

$$Ab = a$$

的解为

$$b = A^{-1}a$$

5、$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

6、若 A 是正交矩阵，则 $A^{-1} = A'$

7、若 A 是对角阵，$A = diag\ (a_{11},\cdots,a_{nn})$，且 $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots n$，则 $A^{-1} = diag(a_{11}^{-1},\cdots,a_{nn}^{-1})$ 。

8、设将可逆矩阵 A 分块为

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，其中$A_{11}$和$A_{22}$为方阵，若$|A_{11}| \neq 0$，

则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}A_{12} \\ -I \end{bmatrix} B^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}, -I)$$

其中 $B = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$；

若 $|A_{22}| \neq 0$，则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ A_{22}^{-1}A_{21} \end{bmatrix} D^{-1}(-I, A_{12}A_{22}^{-1})$$

其中 $D = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$。

9、若 $|A| \neq 0$，$|B| \neq 0$，则

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}DB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

10、设方阵 A 的行列式 $|A|$ 分块为

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

当 $|A_{11}| \neq 0$ 时，则有 $|A| = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$；

当 $|A_{22}| \neq 0$ 时，则有 $|A| = |A_{22}| \cdot |A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$。