

试验振动分析

汪凤泉 郑万泔

江苏科学技术出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍试验振动分析的基本内容及其在故障诊断、振动控制、模态分析和系统辨识中的应用。内容包括：振动和冲击的测试分析理论基础，振动传感器及其校准方法，测量测动仪器和测量技术，振动试验和激振技术，振动与冲击的频率分析，振动试验模态分析与系统参数识别，振动监测与故障诊断，声发射诊断，振动与冲击控制等。

本书可供有关的科研工作者、工程技术人员和大专院校师生使用。

试 验 振 动 分 析
汪凤泉 郑万泔 等编著

出版：江苏科学技术出版社
发行：江苏省新华书店
印刷：南工印刷厂

开本787×1092毫米1/16 印张25.75 插页2 字数625,600
1988年1月第1版 1988年1月 第1次印刷
印数 1—4,850册

ISBN 7—5345—0250—0

TH·13 定价：5.90元

责任编辑 高志一

前 言

试验振动分析是在振动理论的基础上,结合近代的电子学、计算技术、测量分析技术和系统论、信息论、控制论等学科综合发展起来的。大量工程振动问题的不断涌现,使它成为绝大部分理工学科和工程技术部门共同关注的学科。机械、船舶、航空、航天、土建、水利、化工、电力、地质、勘探、核工程、海洋工程、生物工程等科学的发展都与这一学科密切相关。

振动理论是试验振动分析的必要基础,因此,本书第一章、第二章分别介绍了“振动与冲击信号特征”和“机械系统对振动与冲击的响应”等振动基础内容。

目前,在试验振动分析所涉及的各个领域里,工程规模越来越大,运行速度越来越快,环境条件越来越复杂,精度要求越来越高。这一切都要求振动测试技术和仪器进一步发展,而控制论、电子学和计算技术的进步为之提供了有利的条件。本书第三章至第六章反映了这些发展的主要方面,它们是“振动与冲击传感器”、“振动测试技术和测试仪器”、“振动、冲击激励控制”、“振动与冲击校准”。

近代工程的飞跃发展,特别是航空、航天、海洋工程等技术的发展,要求采集、处理振动信号和载荷数据,以便对结构系统进行动力分析,并对可能产生的过大振动加以控制。于是振动信号处理、系统辨识,振动控制等新的分支得到了迅速的发展。本书第七、八、九、十章和第十三章分别介绍了有关的试验振动分析内容,它们是“振动与冲击的频率分析”、“复模态理论”、“振动实验模态分析”、“系统参数识别”和“冲击与振动的控制”等。

对于运行中的重要设备和某些耗资巨大的工程设施,不仅要在设计、施工期间预测振动、控制振动,而且要在使用期间随时进行状态监测和故障诊断,以防患于未然。本书第十一章和第十二章介绍了这些崭新的技术,它们是“振动监测与故障诊断”、“声发射诊断”。另外,第七章到第十章的全部内容都是振动监测与故障诊断技术的重要组成部分。

本书自成稿以来,曾在全国有关讨论会、学习班上进行过介绍,并给有关专业学生和研究生进行了试用。在此期间,一些单位和读者给予了不少帮助,我们深表谢意。

该书由汪凤泉主持编著,并编写第一、二、四、五、六、十一、十二、十三章;郑万潜编写第七、八、九、十章;吴慧新编写第十二章第五节并负责全书图表绘制;许秀芝编写第三章及第七章三、四节;徐步政负责公式校对及部分资料工作;朱正华参加部分资料搜集工作。

本书的出版力求对有关的研究单位、工程部门和高等院校在研究和应用这些内容的过程中提供帮助,但由于水平所限,错误和不妥之处仍难避免,祈求读者给予批评指正。

编 者

1987年10月

目 录

第一章 振动信号的基本特征

§ 1.1 周期振动和准周期振动	1
§ 1.2 平稳随机振动	4
1.2.1 随机振动信号的基本统计量——均值、方差、标准差	5
1.2.2 概率密度与概率分布	5
1.2.3 相关函数	7
1.2.4 功率谱密度	11
§ 1.3 非平稳随机振动	14
§ 1.4 瞬态振动和机械冲击	17

第二章 机械系统对振动和冲击的响应

§ 2.1 特征方程·复频率	20
§ 2.2 系统对初始条件的响应·时间历程	22
§ 2.3 系统对谐波激励的响应·频率响应函数	24
2.3.1 幅频特性	25
2.3.2 相频特性	26
2.3.3 实频特性和虚频特性	27
§ 2.4 系统对脉冲激励的响应·脉冲响应函数	30
§ 2.5 结构阻尼系统的频率响应	32
§ 2.6 机械系统对稳态随机振动的响应	33
§ 2.7 系统对机械冲击的响应·冲击谱	35

第三章 振动与冲击传感器

§ 3.1 压电式加速度传感器	38
3.1.1 压电式加速度计的原理与特性	38
3.1.2 前置电压放大器与电荷放大器	46
3.1.3 压电式加速度计的安装	48
§ 3.2 压电式力传感器和阻抗头	52
3.2.1 压电式力传感器	52
3.2.2 压电式机械阻抗传感器	55
§ 3.3 电动式速度传感器	55
3.3.1 电动式速度传感器的原理	55
3.3.2 积分和微分电路	57
§ 3.4 涡流式位移传感器	60

§ 3.5	振动与冲击传感器的选择	62
第四章	振动与冲击测量	69
§ 4.1	测量系统的构成	69
§ 4.2	振动与冲击测量仪器	71
4.2.1	通用振动计	71
4.2.2	测量放大器	72
4.2.3	相位计	73
4.2.4	电平记录仪	74
4.2.5	磁带记录仪	76
§ 4.3	振动与冲击参数的测量	87
4.3.1	周期振动参数的测量	87
4.3.2	随机振动参数的测量	91
4.3.3	冲击与瞬变参数的测量	99
§ 4.4	振动与冲击测量的总体考虑	103
第五章	激振设备与激振技术	104
§ 5.1	激振设备	104
5.1.1	电动力式振动台	104
5.1.2	电动力式激振器	112
5.1.3	机械式振动台	113
5.1.4	非接触式激振器	115
5.1.5	压电式激振器	117
§ 5.2	激振控制	118
5.2.1	正弦激振控制	119
5.2.2	随机激振控制	123
5.2.3	振动波形的再现	127
§ 5.3	力试验和阻抗测试	128
§ 5.4	冲击试验	130
5.4.1	实验室冲击实验	130
5.4.2	现场冲击试验	133
第六章	振动与冲击传感器的校准	135
§ 6.1	传感器校准的内容与要求	135
6.1.1	振动、冲击传感器的校准内容	135
6.1.2	振动、冲击传感器校准的技术要求	136
§ 6.2	参考灵敏度的校准	136
6.2.1	测幅绝对校准	137

6.2.2	比较法校准	139
6.2.3	互易法校准	141
§ 6.3	传感器的频率响应与谐振频率的校准	144
6.3.1	逐点比较法校准	144
6.3.2	连续扫频法校准	144
6.3.3	谐振频率的校准	145
§ 6.4	横向灵敏度的校准	146
§ 6.5	传感器的冲击与线性校准	147
6.5.1	传感器的冲击校准	147
6.5.2	传感器的线性校准	150
§ 6.6	系统校准	152
6.6.1	系统校准原理	152
6.6.2	重力法通道校准	153
§ 6.7	力传感器与阻抗头的校准	161
6.7.1	力传感器动态幅值灵敏度的校准	161
6.7.2	力传感器频率响应的校准	165
6.7.3	阻抗头的校准	167
第七章	频率分析	169
§ 7.1	傅里叶分析基础	169
7.1.1	傅里叶级数与离散频谱	169
7.1.2	傅里叶变换与连续频谱	173
§ 7.2	卷积和滤波	179
7.2.1	滤波器的频率响应与脉冲响应	179
7.2.2	带通滤波器	180
§ 7.3	模拟式频率分析仪	183
7.3.1	档级滤波器式频率分析仪	183
7.3.2	扫描式频率分析仪	183
7.3.3	外差式恒带宽频率分析仪	185
7.3.4	跟踪滤波器	187
7.3.5	模拟式实时频率分析仪	188
§ 7.4	平稳信号的模拟式频率分析	189
7.4.1	带宽的选取	190
7.4.2	平均时间 T_A 的选取	191
7.4.3	停留时间及扫描速度的选取	192
§ 7.5	数字频率分析原理	194
7.5.1	采样与量化	194
7.5.2	有限离散傅里叶变换 (DFT)	197

7.5.3	快速傅里叶变换 (FFT)	201
7.5.4	细化 FFT	203
§ 7.6	常用频域数字分析方法	205
7.6.1	功率谱密度	205
7.6.2	相关函数	209
7.6.3	传递函数和相干函数	211
7.6.4	倒频谱分析	212
§ 7.7	数字频率分析仪	213
7.7.1	CF-500 超级分析仪	214
7.7.2	SD380 Z 型分析仪	216
7.7.3	HP-3562A 动态信号分析仪	217
第八章	模态分析的理论基础	219
§ 8.1	多自由度系统的振动分析——实模态理论	219
8.1.1	特征值和特征向量	219
8.1.2	特征向量的正交性和振型矩阵的归一化	222
8.1.3	主坐标·模态叠加	223
8.1.4	无阻尼系统强迫振动的模态叠加	224
8.1.5	比例阻尼系统的自由振动	224
8.1.6	比例阻尼系统的强迫振动·传递函数矩阵	226
8.1.7	结构阻尼系统的模态分析	228
§ 8.2	一般粘性阻尼系统的复模态理论	228
8.2.1	状态方程·复特征值问题	228
8.2.2	复特征向量的正交性	229
8.2.3	复模态参数	231
8.2.4	复模态叠加	232
8.2.5	粘性阻尼系统的传递函数	233
§ 8.3	非自伴随系统的复模态理论	234
8.3.1	非自伴随系统	234
8.3.2	伴随系统与非自伴随系统特征向量的双正交性	235
8.3.3	非自伴随系统的传递函数	236
§ 8.4	一般粘性阻尼系统的特征相位延迟	236
8.4.1	特征相位延迟模态	237
8.4.2	二自由度例子	238
8.4.3	特征相位延迟模态的性质	241
第九章	模态试验	243
§ 9.1	正弦慢扫描模态试验	244

9.1.1	原 理	245
9.1.2	激振器的选择及安装	247
9.1.3	频率扫描速度	248
9.1.4	系统标定	249
§ 9.2	稳态随机激励模态试验	249
9.2.1	原 理	249
9.2.2	试验方法	251
§ 9.3	脉冲激励模态试验	255
9.3.1	脉冲激励的原理	256
9.3.2	力脉冲宽度的控制	259
9.3.3	采样时间间隔 Δt 的选取	260
9.3.4	窗函数在脉冲激励试验中的使用	260
9.3.5	脉冲试验还需注意的几个问题	261
§ 9.4	伪随机激励模态试验	262
9.4.1	伪随机序列的统计特性	262
9.4.2	产生伪随机二进制序列的方法	265
§ 9.5	多点正弦纯模态试验	265
9.5.1	多点激励系统	267
9.5.2	试验过程	269
9.5.3	自动力适调技术	270
第十章	模态参数识别	274
§ 10.1	分量分析法与矢量分析法	275
10.1.1	分量分析法	275
10.1.2	矢量分析法	277
10.1.3	矢量分析的计算机识别	280
§ 10.2	实模态优化识别法	282
10.2.1	松井秀儿法	282
10.2.2	Klosterman迭代法	285
10.2.3	非线性最小二乘法	287
§ 10.3	复模态参数识别	289
10.3.1	传递函数在复平面上的变换	290
10.3.2	Levy法	293
10.3.3	对实模态修正的复模态法	296
§ 10.4	参数识别的时域方法	299
10.4.1	Ibrahim法	299
10.4.2	随机减量技术	303
§ 10.5	振动模态的图示	306

第十一章 振动监测与故障诊断	307
§ 11.1 概 述.....	308
11.1.1 故障及其分类.....	308
11.1.2 监测方式.....	309
11.1.3 振动诊断方法.....	310
§ 11.2 振动监测参数与监测传感器.....	313
11.2.1 监测参数及其表示.....	313
11.2.2 监测传感器与监测位置.....	315
§ 11.3 振动监测仪器.....	317
11.3.1 用于定期监测和诊断的仪器.....	317
11.3.2 永久性监测仪器.....	318
§ 11.4 振动诊断方法.....	320
11.4.1 振平值诊断法.....	320
11.4.2 转速振平图诊断法.....	324
11.4.3 响应频谱诊断法.....	325
11.4.4 传递函数诊断法.....	328
11.4.5 倒频谱诊断法.....	330
11.4.6 转速谱图诊断法.....	332
11.4.7 相关分析诊断法.....	332
11.4.8 系统参数诊断法.....	333
§ 11.5 旋转机械的振动监测与诊断.....	334
11.5.1 转子振动与基频信号监测.....	334
11.5.2 轴系不平衡响应的监测.....	344
11.5.3 轴的振动监测.....	346
11.5.4 旋转机械故障的频谱特征.....	349
11.5.5 轴承振动监测.....	350
11.5.6 齿轮振动及其故障诊断.....	352
第十二章 声发射诊断	353
§ 12.1 声发射.....	353
12.1.1 声发射.....	353
12.1.2 声发射(AE)源.....	353
12.1.3 声发射波的传播.....	354
§ 12.2 声发射测量分析系统的构成.....	355
§ 12.3 声发射传感器及其校准.....	357
12.3.1 声发射传感器.....	357
12.3.2 声发射传感器的标定.....	359

§ 12.4	声发射检测仪器	362
12.4.1	信号的测量	362
12.4.2	特征参数的测量仪器	363
§ 12.5	声发射源的定位	366
12.5.1	直线定位法	366
12.5.2	归一化正方形定位法	366
12.5.3	平面正方形定位法	367
12.5.4	平面三角形定位法	368
12.5.5	球面三角形定位法	369
§ 12.6	声发射技术的应用	372
12.6.1	应用领域及其特点	372
12.6.2	黄铜试件的拉伸试验	374
12.6.3	碳纤维编织物的拉伸试验	375
12.6.4	压力容器的检验	376
12.6.5	压力容器上声发射源的定位	376
12.6.6	球形容器的承压试验	377
12.6.7	声发射源的双通道测量定位	378
第十三章	振动和冲击控制	380
§ 13.1	振动和冲击隔离	380
13.1.1	振动隔离	380
13.1.2	隔振技术	383
13.1.3	隔振测量	388
13.1.4	冲击隔离	390
§ 13.2	动力振动控制和阻尼减振	392
13.2.1	动力吸振器	392
13.2.2	动力振动控制的测量	394
13.2.3	阻尼减振	396
13.2.4	阻尼测量	397
§ 13.3	主动控制	400

第一章 振动信号的基本特征

试验振动分析的基本方法是对振动信号进行测量，根据信号的不同特征用不同的分析手段及方法进行分析，然后，将这些结果与振动系统的实际情况联系在一起，以找出解决振动问题的正确途径和利用振动的有效方法。

在工程建设、科学技术及日常生活的各个领域中都到处存在各种振动现象。按不同的分类方法，振动现象可以分为很多种。

从研究的对象上分，有机械振动、土木结构振动、地震、汽车飞机航天器等运输机械的振动、武器及爆炸引起的冲击与振动等。

从学科上分，有力学的、声学的、电磁的、光学的及生物的（包括人体的）振动等。

从振动的性质分，有线性振动及非线性振动。我们主要研究线性振动。

从振动的频率范围分，有低频振动、高频振动或声频振动。通常机械振动的频率在10千赫以下，甚至在1千赫以下。这样的频率范围属于低频范围。

从振动信号的统计特征，又可将振动分为确定性振动与随机振动两大类。

确定性振动又分为周期性振动和非周期性振动。

周期性振动是指每经过相同的时间间隔其振动量重复出现的振动，它包括简谐振动和复杂周期振动。复杂周期振动是由一些不同频率的简谐分量合成的振动，诸分量的频率之比均为有理数。

非周期振动包括准周期振动和瞬态振动。准周期振动尽管也是由一些不同频率的简谐振动分量合成，但是，组成它的简谐分量中至少有一对分量的频率之比为无理数，因此准周期振动是没有周期性的。在工程实际中，最常见的非周期振动是冲击与瞬态振动。瞬态振动信号的时间函数为各种脉冲函数或者衰减函数。例如有阻尼自由振动就属于这类。

随机振动是一种非确定性的振动，当系统作随机振动时，事先不可能确定观测点在以后某时刻的位置以及振动的有关振幅、频率或相位等参数的瞬时值，即不能用确定函数来描述。系统受到随机激励能引起随机振动，系统本身参量的随机变化也能引起随机振动。随机振动虽然具有不确定性，但却有一定的统计规律性，研究随机振动需要研究在相同实验条件下所取得的多个记录样本的统计规律性。

按照统计特性，随机振动又可分为平稳随机振动和非平稳随机振动。假如随机振动过程的统计特性不随时间而变化，就称为平稳随机振动过程，否则为非平稳随机振动过程。

本章将简略地介绍以上各种振动信号的基本特征及描述这些特征参数。

§ 1.1 周期振动和准周期振动

最简单的周期振动是简谐振动。例如，质点沿直线 x 振动，它离开基准位置的瞬时位移信号可用下列方程描述：

$$x = X \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.1)$$

式中 $\omega = 2\pi f$ ——角频率；

f ——频率，单位为赫兹 (Hz) 或简称赫；

X ——振幅或峰值，离开基准位置的最大位移；

φ ——初相角；

t ——时间。

图 1.1 为此质点振动信号的波形。图中初相角等于零：

$$x = X \sin \omega t \quad (1.2)$$

图中 T 代表振动周期，即两个相邻的、完全相同的运动状态之间所经过的时间

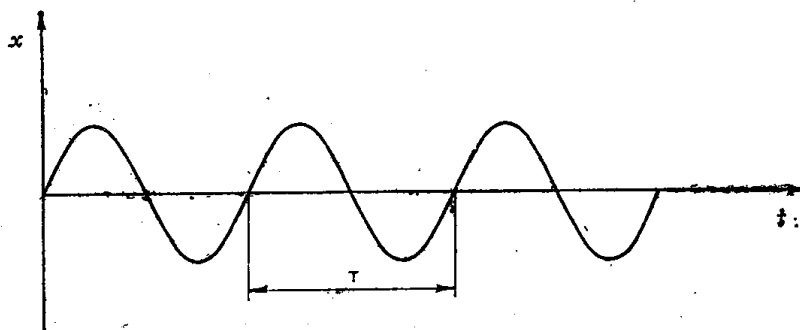


图 1.1 简谐振动信号

$$T = \frac{1}{f} \quad (1.3)$$

如果测量质点的速度信号则

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega X \sin(\omega t + \pi/2) \quad (1.4)$$

因此，速度信号在相位上比位移信号超前 90° 。

加速度信号为

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 X \sin(\omega t) = \omega^2 X \sin(\omega t + \pi) \quad (1.5)$$

即加速度信号比位移信号相位上超前 180° 。

总之，描述一个简谐振动信号需要三个参数：频率或周期，相角及振幅。

振幅除了用峰值表示外，还可用有效值表示。振动信号的有效值定义为

$$X_{\text{有效}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1.6)$$

从上式可见，有效值即均方根值或称 RMS 值。在振动测量中经常同时使用有效值和峰值两种方式。对于简谐信号，有效值等于 $1/\sqrt{2}$ 倍峰值。

图 1.2 是一个非简谐的周期振动信号。根据傅里叶级数（见第七章第一节），任何周期信号都可以分解为许多简谐信号之和：

$$f(t) = X_0 + X_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + X_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + X_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots + X_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (1.7)$$

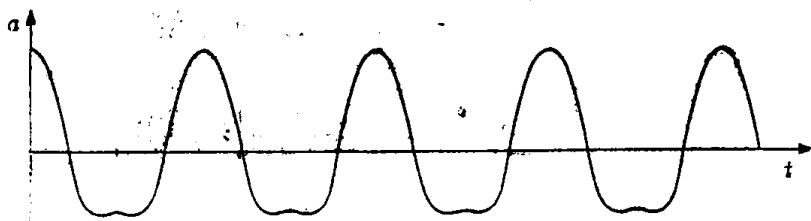


图 1.2 非简谐周期振动信号

图 1.2 所示振动信号可分解为两个简谐振动信号之和。图 1.3(a) 在时间域上表示这种分解。其中周期为 T_1 的谐波称为基波；周期 $T_2 = T_1/2$ ，称为 2 次谐波。这个信号中只包含这两种频率成分。复杂的周期信号包含很多谐波成分。频谱图上可以表示出信号中各个谐波成分的大小，因此是在信号分析中最常用的方法。图 1.3(b) 为该信号的频谱。图 1.4 为三种周期信号及其频谱。

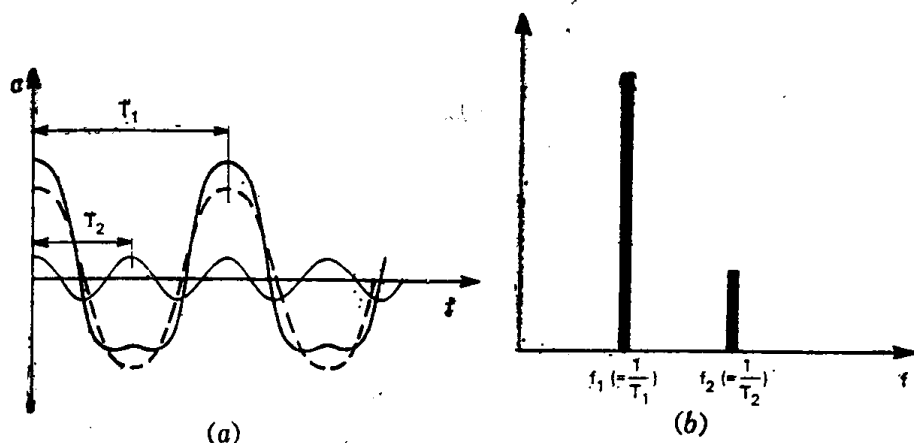


图 1.3 周期信号在时域及频域的分解

图 1.4 为三种周期信号及其频谱。

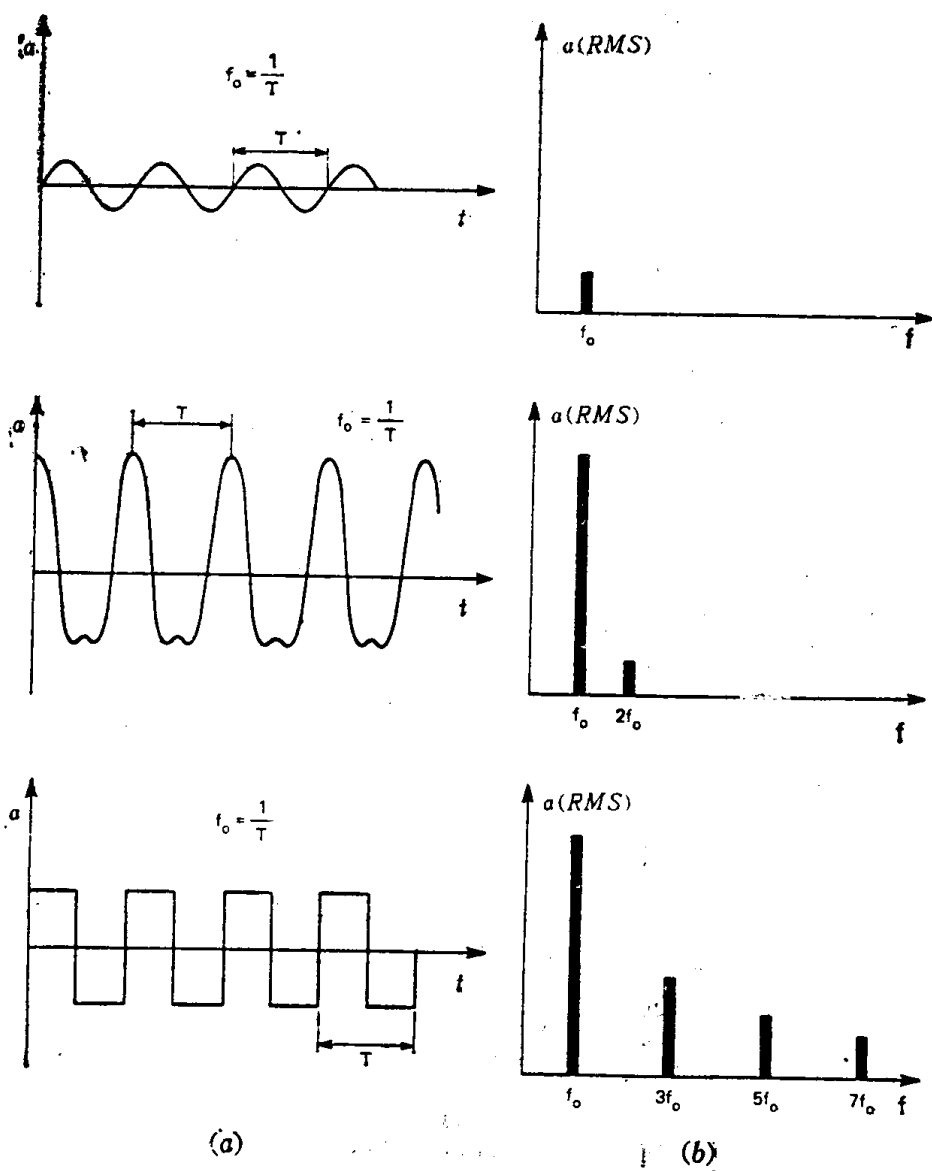


图 1.4 三种周期信号及其频谱

周期信号的特点是它的频谱是由一些离散的谱线组成，这些谱线对应的频率都是基波频率的整数倍。

如果一个信号中包含两个频率成分，它们之比不是有理数时，就不存在这两个频率的最大公因数，即这两个频率成分不存在公共周期。这样的确定性信号称为准周期信号或拟周期信号。研究非周期信号的频谱特征要用到傅里叶积分变换，有关这方面的内容请见本书第七章 §7.1 节。

例如信号

$$x(t) = X_1 \sin \omega t + X_2 \sin \sqrt{2} \omega t \quad (1.8)$$

就是准周期振动。图 1.5 为它的频谱。准周期振动的频谱仍然是由离散谱线组成。在实际信号处理中，周期信号与准周期信号是难以区别的，不管用模拟式还是数字式分析仪进行分析，所用的方法也是一样的。我们感兴趣的主要是信号中包含多少周期成分而不是它们之比是否是无理数，况且凡测量出的频率都有一定程度的误差，无法判断它是否是无理数。

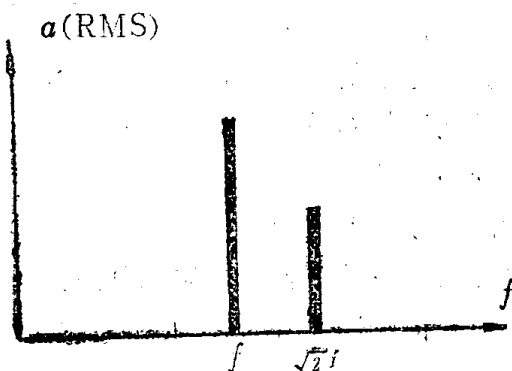
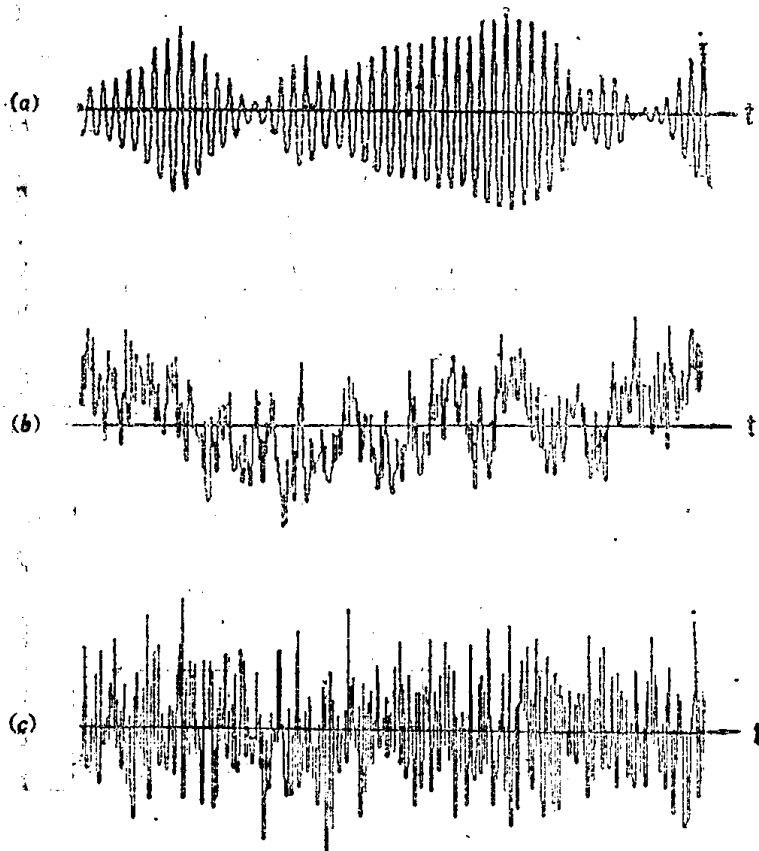


图 1.5 准周期振动信号的频谱

§ 1.2 平稳随机振动

随机振动是最常见的一种振动形式，在这种振动过程中，振动周期没有规则，并且永不重复。因此，随机振动是一种非确定性的振动。物体作随机振动时，事先不能确定它在未来某时刻的位置以及振动参数的瞬时值，它们不能用确定的函数来描述。为了研究随机振动，需要研究相同实验条件下多个振动记录的统计特性。假如随机过程的统计特性不随时间变化，就叫做平稳随机过程。当整个平稳随机过程的统计特性与每个样本的统计特性相同时，称这种平稳随机过程为各态历过程，“各态历经”意味着“时间平均”等于“集总平均”。它是最重要的一类随机过程。对于各态历经的平稳随机过程，只要一个样本函数就能反映整个随机过程的特性。

图 1.6 为三种各态历经平稳随机信号的一个样本记录。其中(a)



(a) 窄带随机 (b) 粉红色噪声 (c) 白噪声

图 1.6 随机信号的样本

为中心频率等于 200Hz，带宽等于 31.6Hz 的窄带信号；(b) 为粉红色噪声；(c) 为白噪声。

由于随机振动信号的不确定性及其复杂性，必须从各种不同的角度来研究它的统计特征。以下分别介绍描述平稳随机振动的各种方法。

1.2.1 随机振动信号的基本统计量——均值、方差、标准差

一、均值

各态历经随机过程的均值 (μ_x) 等于样本函数的时间平均值：

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.9)$$

T 为样本长度或采样长度，单位秒。

二、均方值、均方根值

均方值定义为

$$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.10)$$

均方根值 ψ_x 是均方值的正平方根。显然，由 (1.6) 均方根值就是有效值。

三、方差、标准差

方差定义为

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (1.11)$$

标准差 σ_x 是方差的正平方根。

均值表征了随机信号的直流分量。方差与标准差表征了随机信号的动态分量或交流分量。

将式 (1.11) 展开

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^2(t) - 2x(t)\mu_x + \mu_x^2] dt = \psi_x^2 - \mu_x^2 \quad (1.12)$$

或

$$\psi_x^2 = \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

因此均方值既包含了信号的直流分量又包含交流分量。当均值等于零时，方差等于均方值，标准差等于有效值。

1.2.2 概率密度与概率分布

随机变量的取值事先是不可预知的，但是对于各态历经的平稳随机信号取值小于某值或落在某一范围内的概率是确定的，并且是可以计算出来的。

如图 1.7 所示，各态历经过程的样本函数 $x(t)$ 的值落在 x 和 $(x + \Delta x)$ 范围内的概率近似等于 $\frac{\Delta t}{T}$ ，这里 Δt 是在观察时间 T 内 $x(t)$ 落在 $[x, x + \Delta x]$ 范围内的总时间

$$\Delta t = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$$

当 T 趋于无穷时；

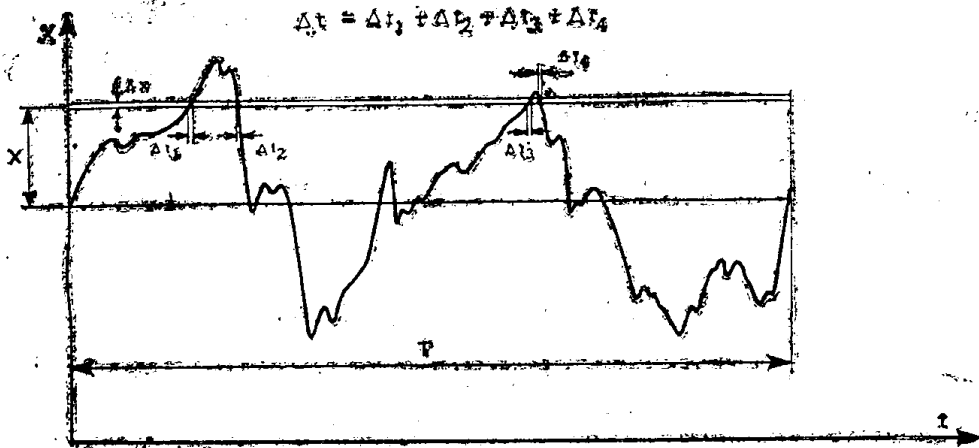


图 1.7 概率密度计算示意

$$\text{prob}[x \leq x(t) < x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta t}{T} \quad (1.13)$$

当 Δx 趋于零时, 概率密度函数定义为

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{prob}[x \leq x(t) < x + \Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta t}{T} \right] \quad (1.14)$$

概率分布函数定义为 $x(t)$ 取值小于某一实数 x 的概率:

$$P(x) = \text{prob}[x(t) < x] \quad (1.15)$$

由式(1.14)与(1.13)可知, 概率分布函数与概率密度函数的关系是:

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (1.16)$$

由(1.15)式, $P(\infty) = 1$ 。因此概率密度函数与 x 轴包围的面积等于 1。

对于确定性信号, 概率密度与分布函数可以从信号的函数表达式直接计算出来。例如正弦简谐信号

$$x = A \sin \omega t$$

为了计算它的概率密度,

$$t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{x}{A}$$

$$dt = \frac{dx}{A\omega \sqrt{1 - x^2/A^2}}$$

因此简谐振动信号的概率密度函数为

$$p(x) = \frac{2dt}{T} = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}} \quad (1.17)$$

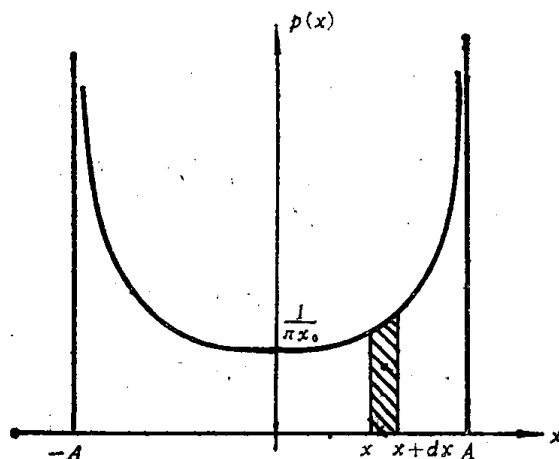


图 1.8 简谐振动信号的概率密度

图 1.8 即为此盆形曲线。

许多自然产生的随机振动, 都具有如图 1.9 所示“钟形”概率密度函数:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}\right) \quad (1.18)$$

这种曲线又称为高斯曲线或正态曲线。式中 σ 为标准差。

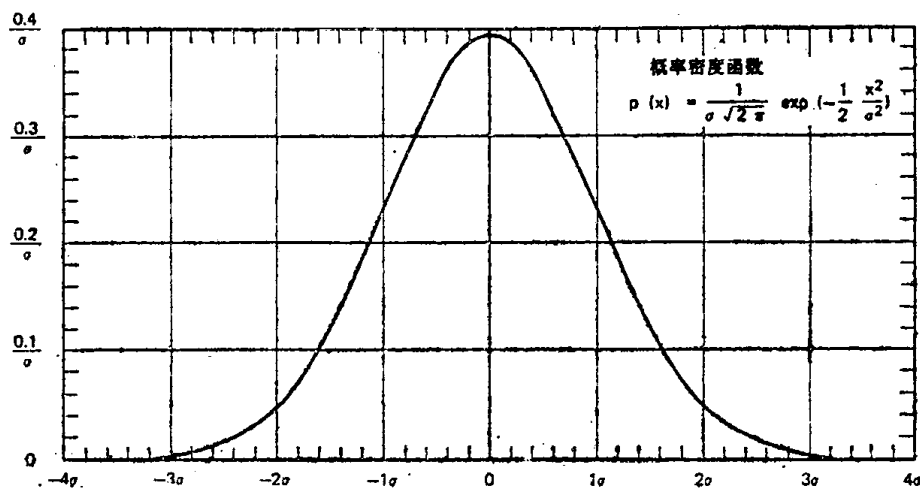


图 1.9 高斯概率密度曲线

根据概率密度曲线也可区分振动数据的一些特性。例如当随机信号中含有周期分量时，概率密度曲线如图1.10所示。

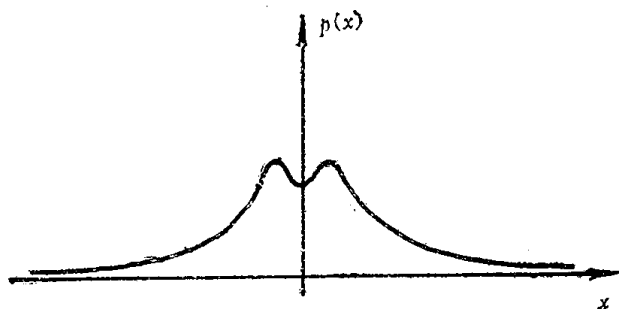
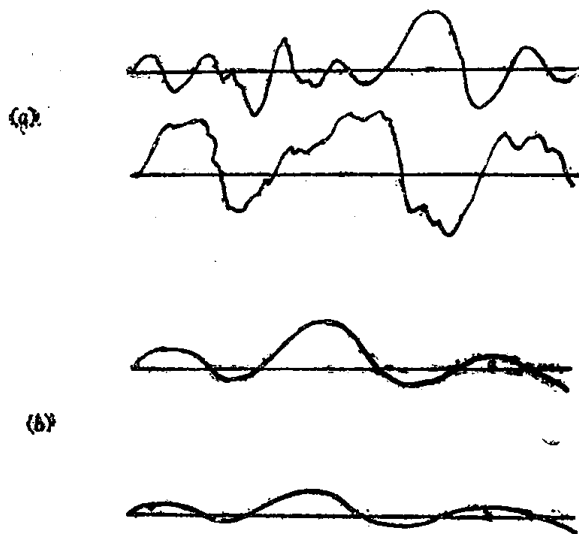


图 1.10 正弦信号加随机信号的概率密度

1.2.3 相关函数

概率密度与概率分布是一种很有效的随机信号特征的描述，它说明振动信号中的瞬时振幅分布的统计规律。随机信号对振动系统的作用除了幅值的影响外，它的频率成分是主要因素。概率特性没有给出信号的频率分布的信息，也没有给出信号变化的相关性特征。因此仅仅用概率数据描述随机振动信号的统计特性是不够的。下面首先介绍相关分析的基本概念。相关分析在试验振动分析中是一种重要的工具。

在振动试验中，我们常常从示波器上比较两个信号是否相似。如图 1.11(a) 中两个波形，直观上看就不相似，因为它们的形状太不一样了。再看 1.11(b) 中的两个波形就有一定相似性，因为从它们的起伏变化趋势看差不多，犹如初等几何中两个相似三角形一样，大小不同形状相似。



(a) 不相似 (b) 相似

图 1.11 信号的相似性