《数理天地》丛书 ■ 主编 周国镇

希望数学

本册主编 熊 斌

高一

气象出版社

《数理天地》丛书　主编　周国镇

希望数学

高一

本册主编　熊　斌

编　　委　李国威　叶声扬　许　敏

冯志刚　舒国樑　曹建华

气象出版社

内容简介

本书是“《数理天地》丛书”系列中《希望数学》的高一分册。包含了高中一年级数学中最主要的知识、思想和方法。本书由著名数学教师、数学教研员和大学数学教师合作编写，简明、易懂。适用于要提高数学水平或参加数学竞赛的高中一年级同学，也可作为数学教师开展数学课外活动的教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

希望数学:高一/周国镇主编. —北京:气象出版社,2002.3

(数理丛书)

ISBN 7-5029-3296-8

Ⅰ.希… Ⅱ.周… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 093605 号

责任编辑:王小甫　终审:刘树泽

封面设计:梁培林　责任技编:刘祥玉　责任校对:石晓兰

气象出版社出版

(北京市海淀区中关村南大街 46 号　邮编:100081)

新华书店总店北京发行所发行　全国各地新华书店经销

*　　*　　*

北京市白河印刷厂印刷

开本:787×1092　1/32　印张:10.625　字数:239 千字

2002 年 3 月第一版　2002 年 3 月第一次印刷

印数:1～5000

ISBN 7-5029-3296-8/G・0955

定价:12.00 元

序　言

《希望数学》是《数理天地》杂志主编的“《数理天地》丛书”系列的一个部分，之所以在数学之前加希望二字，是因为这是能给希望学好数学的同学们带来希望的数学书。

这是一套系统地、精练地讲解初、高中数学主要内容的简明教程。从初一到高三，共六个分册。其中，初、高中一、二年级四个分册中的每个分册都分为基础内容和选学内容两部分。

基础内容：不超出现行的数学教学大纲，保证使同学们用尽量少的时间，比较轻松地在比课本高的水平上掌握本年级数学最主要的内容。

选学内容：供学有余力，爱好数学或准备参加“希望杯”数学邀请赛以及其他数学竞赛的学生使用。

初、高中三年级这两个分册专为初、高三同学升学备考之用。

每个分册都由若干个专题组成，每个专题独立成篇，便于同学和老师根据需要选用，不必考虑先后次序。

每个专题包括：基本知识、例题、练习三个部分。

基本知识：以极简练、明白的文字介绍本专题的知识、方法。帮助同学们理清脉络，掌握重点。

例题：少而精，有代表性，有新意。例题的讲解渗透了基本

的数学思想,讲思路,讲方法,表达规范、简练。特别有助于提高同学们的分析能力。

练习:编入了有训练价值的典型题目,不求多、不求全,只求少而精。对不太难的题目给出了最后结果,使读者有一个思维空间;对较难的题目,给出了关键性的提示。

本书由《数理天地》杂志邀请北京、上海、江苏、浙江、湖北、湖南、广东、四川、山西、福建、吉林、云南、宁夏等地著名的数学教研员,优秀的数学教师以及部分大学数学教师合作编写,经《数理天地》杂志专家审定。

当今,中学数学参考书花样繁多,说有数百种也不为过,常令学子们眼花缭乱,无从选择。本书则力求使读者读了就能懂,懂了就能用,以实在和简明易懂的讲述见长。相信读者使用之后自有体会。

周国镇

《数理天地》杂志主编

2002 年 1 月 18 日

目　　录

第一部分　基础内容

第二部分　选学内容

第一部分　基础内容

单元 1　集合

一、基本知识

1. 集合概念

集合是一个原始概念，它的含义是全体. 某一对象的全体，就说是某一对象的集合，其中每个对象称为该集合的元素. 元素与集合的关系是"属于"或"不属于"，用记号"$\in$"或"$\notin$"表示.

为了表述方便，引入"空集"概念，"空集"是不含任何元素的集合，记为"$\varnothing$".

集合中的元素是确定的和互异的，即是明确且可以区分的，空集"$\varnothing$"与单元素集合$\{\varnothing\}$不相同，要注意.

表示集合常用列举法和描述法. 当元素易枚举时常用列举法；当元素具有某种公共属性时则用描述法. 数集可以用区间表示. 文氏图可用来表示集合及其关系.

2. 集合的关系和运算

集合 A 是集合 B 的子集(记为：$A \subseteq B$)的含义是：A 的元素都属于 B(即：凡 $x \in A$，则 $x \in B$)，因此空集是任何集合的子集.

集合 A 与集合 B 相等(记为：$A = B$)的含义是：集合 A、B 互为对方的子集(即：$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$).

集合 A 是集合 B 的真子集(记为：$A \subset B$)的含义是：集合

A 是集合 B 的子集且 B 中至少有一个元素不属于 A(记为:$A \subseteq B$ 且有 $y_0 \in B$ 但 $y_0 \notin A$).由此可知,空集是任何非空集合的真子集.记号"$\subset$"及"$\subseteq$"只用于集合与集合间的关系.

集合 A 与集合 B 的交集($A \cap B$)的含义是:既属于 A 又属于B 的元素组成的集合(记为:$\{x | x \in A$ 且 $x \in B\}$).

集合 A 与集合 B的并集(记为:$A \cup B$)的含义是:属于 A 或 B 的所有元素组成的集合(记为:$\{x | x \in A$ 或 $x \in B\}$).

用$n(P)$表示集合 P 的元素的个数,则$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

当 $A \subseteq I$ 时,I 叫做 A 的全集.由 I 中不属于集合 A 的元素组成的集合(记为:$\{x | x \in I$ 且 $x \notin A\}$),称为 A 在 I 中的补集,记为:$\overline{A}$.不难证明$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

二、例　题

例 1　下列命题是否正确

(1) $\varnothing \in \{0,1,2\}$;　(2) $\varnothing \in \varnothing$;　(3) $\varnothing \subseteq \{0\}$;

(4) $\varnothing \subseteq \varnothing$.

解:(3)、(4) 是正确的,而(1)、(2) 是错误的.

空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集."$\in$"表示元素在集合内,"$\subseteq$"表示子集关系.因为$\{0,1,2\}$与 $\varnothing$ 内皆无空集 $\varnothing$ 作元素,所以 $\varnothing \in \{0,1,2\}$ 与 $\varnothing \in \varnothing$ 是错误的,但 $\varnothing \subseteq \{0\}$ 与 $\varnothing \subseteq \varnothing$ 依规定都是对的.

说明:初学"$\in$"与"$\subseteq$","$\varnothing$"与"$\{\varnothing\}$"这些符号时,易混淆,$\varnothing \in \{\varnothing\}$,$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ 都是正确的.

例 2　用列举法表示集合 A,B,C.

(1) $A=\left\{x\left|\dfrac{x^2-x}{x}=1\right.\right\}$；

(2) $B=\{y\,|\,y=x^2-2x, x\in\{-2,-1,0,1,2\}\}$

(3) $C=\left\{(x,y,z)\left|\begin{cases}x+y=3\\y+z=4\\z+x=5\end{cases}\right.\right\}$

解：(1) 由$\dfrac{x^2-x}{x}=1$得$x^2-2x=0$，解得

$x=0$(舍) 或 $x=2$

所以　$A=\{2\}$

(2) 当 $x=-2,-1,0,1,2$ 时，$y=8,3,0,-1,0.$

所以　$B=\{-1,0,3,8\}$

(3) 由$\begin{cases}x+y=3\\y+z= ;\\z+x=5\end{cases}$得$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=3\end{cases}$所以$C=\{(2,1,3)\}$

说明：集合 A 是方程$\dfrac{x^2-x}{x}=1$在实数范围内的解集，集合 B 不要写成$\{-1,0,3,8,0\}$，集合 C 的元素是有序实数组，不可写成$\{2,1,3\}$，也不可写成$\{x=2,y=1,z=3\}$.

例 3　用描述法表示下列集合.

(1) 有理数集合；

(2) 直角坐标系内在第二、四象限的点的坐标组成的集合；

(3) 被 3 除余 1，被 5 除余 2 的正整数集合.

解：(1) $\mathbf{Q}$，也可以为{有理数}或写成

$$\left\{x\,|\,x=\frac{p}{q},p、q\in\mathbf{Z}\text{ 且 }q\neq 0\right\}$$

(2) 在第二、四象限的点(x,y)都满足$xy<0, x,y\in\mathbf{R}$；

满足 $xy < 0, x, y \in \mathbf{R}$ 的点 (x, y) 都在第二、四象限，所以第二、四象限的点的坐标组成的集合为

$$\{(x, y) \mid xy < 0, x, y \in \mathbf{R}\}$$

(3) 被 3 除余 1 的正整数可表示为 $x = 3k + 1, k \geqslant 0$ 且 $k \in \mathbf{Z}$，对这里的 k 按除以 5 的余数分类，$k = 5m, 5m + 1, 5m + 2, 5m + 3, 5m + 4, m \geqslant 0$ 且 $m \in \mathbf{Z}$. 代入，得：只有 $k = 5m + 2$ 时，$x = 15m + 7$ 被 5 除余 2. 所以被 3 除余 1，被 5 除余 2 的正整数集合为 $\{x \mid x = 15m + 7, m \geqslant 0$ 且 $m \in \mathbf{Z}\}$.

说明：描述法表示集合时，大括号内可以是文字描述，也可以是数学式子描述. 若用文字描述，要避免语法及概念上的错误. 如：大括号的符号已包含“所有”的意思，防止(1)写成{全体有理数}、{有理数集}或$\{\mathbf{Q}\}$. 在用数学式子描述时，要分清层次，注意集合的固有模式和常用关联词.

例 4 若集合 $A = \{x \mid x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$，$B = \{y \mid y = 3l + 1, l \in \mathbf{Z}\}$，$C = \{z \mid z = 6m + 1, m \in \mathbf{Z}\}$. 问 A, B, C 这三个集合之间的关系是什么？并证明.

解：在 A 中任取一元素 x，$x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}$.
则 $x = 3(k - 1) + 1$，由 $k - 1 \in \mathbf{Z}$ 知 $x \in B$. 所以 $A \subseteq B$.

在 B 中任取一元素 y，$y = 3l + 1, l \in \mathbf{Z}$.
则 $y = 3(l + 1) - 2$，由 $l + 1 \in \mathbf{Z}$ 知 $y \in A$. 所以 $B \subseteq A$

所以 $A = B$

在 C 中任取一元素 z，$z = 6m + 1, m \in \mathbf{Z}$.
则 $z = 3 \cdot (2m) + 1$，由 $2m \in \mathbf{Z}$ 知 $z \in B$. 所以 $C \subseteq B$

因为 $4 \in B$，但 $4 \notin C$（否则 $4 = 6m + 1, m = \dfrac{1}{2}$，不可

能)

所以 $C \subset B$.

综上所述,知 $C \subset B = A$.

说明:集合的证明题,一般应该用定义进行证明. 如:证明 $A = B$,只要根据定义,证明 $A \subseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 即可. 证明 $A \subseteq B$,只要证明 A 中的元素都属于 B 即可.

例 5 (1) 若集合 $A = \{(x,y) \mid y = x^2 - 4x + 5, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x,y) \mid y = x^2 + 2x - 1, x \in \mathbf{R}\}$,求 $A \cap B$;

(2) 若集合 $C = \{y \mid y = x^2 - 4x + 5, x \in \mathbf{R}\}$, $D = \{y \mid y = x^2 + 2x - 1, x \in \mathbf{R}\}$,求 $C \cap D$;

(3) 若集合 $E = \{y \mid y = x^2 - 4x + 5, x \in \mathbf{Z}\}$, $F = \{y \mid y = x^2 + 2x - 1, x \in \mathbf{Z}\}$,求 $E \cap F$.

解:(1) $A \cap B = \left\{(x,y) \middle| \begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = x^2 + 2x - 1 \end{cases}\right\}$,

解方程组 $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = x^2 + 2x - 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

所以 $A \cap B = \{(1,2)\}$.

(2) $C = \{y \mid y = (x-2)^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$

$= \{y \mid y \geqslant 1\} = [1, +\infty)$

$D = \{y \mid y = (x+1)^2 - 2, x \in \mathbf{R}\} = \{y \mid y \geqslant -2\}$

$= [-2, +\infty)$

所以 $C \cap D = [1, +\infty)$.

(3) $E \cap F = \{y \mid y = x_1^2 - 4x_1 + 5$ 且 $y = x_2^2 + 2x_2 - 1, x_1, x_2 \in \mathbf{Z}\}$.

所以 $x_1^2 - 4x_1 + 5 = x_2^2 + 2x_2 - 1$

即 $(x_2 + 1)^2 - (x_1 - 2)^2 = 3$

所以 $(x_2 - x_1 + 3)(x_2 + x_1 - 1) = 3$，其中 $x_2 - x_1 + 3$，$x_2 + x_1 - 1 \in \mathbf{Z}$

所以 $\begin{cases} x_2 - x_1 + 3 = 1, 3, -1, -3. \\ x_2 + x_1 - 1 = 3, 1, -3, -1. \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x_1 = 3, 1, 1, 3 \\ x_2 = 1, 1, -3, -3. \end{cases}$

所以 $y = x_2^2 + 2x_2 - 1 = 2$ 得 $E \cap F = \{2\}$.

说明：求两集合的交集时，首先要认识交集元素的特征，如：(1) 中元素为数对 (x, y)，(2) 中元素是实数，(3) 中元素是整数，然后运用基本概念求公共元素.

例 6 设全集 $I = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

已知 $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,2,4,5,6,8,9\}$，$\overline{A} \cap B = \{5,8\}$，$\overline{B} \cap A = \{2,9\}$，求 A，B.

解：$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \{1,2,4,5,6,8,9\}$，根据补集定义知 $A \cap B = \{3,7\}$. 所以 $3,7 \in A$ 且 $3,7 \in B$.

又 $5,8 \in \overline{A}$，所以 $5,8 \notin A$，同时 $5,8 \in B$.

$2,9 \in A$ 同时 $2,9 \notin B$.

还余三个元素 1,4,6 需要检验.

$1,4,6 \notin A \cap B$.

若 $1 \in A$，则必有 $1 \notin B$，那么 $1 \in \overline{B}$，这样 $1 \in \overline{B} \cap A$，矛盾. 所以 $1 \notin A$，同理 $4,6 \notin A$.

同理，$1,4,6 \notin B$.

所以 $A = \{2,3,7,9\}$，$B = \{3,5,7,8\}$

说明：给出集合 A，B 的交、并、补等集合，求集合 A、B 的一般思路是把集合 A、B 的元素利用交、并、补等集合的概念和性质加以检验证明.

例 7 若非空集合 $A=\{x\mid 2a-1\leqslant x\leqslant 3a-6\}$，$B=\{x\mid a+2\leqslant x\leqslant 3b\}$，求能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合.

解：由题意得：$A\subseteq B$（否则 A 中有一个 $a\notin B$，则 $a\notin A\cap B$ 于是 $A\nsubseteq A\cap B$，矛盾）.

所以 $\begin{cases}2a-1\geqslant a+2\\3a-6\leqslant 3b\\3a-6\geqslant 2a-1\\3b\geqslant a+2\end{cases}$ 解得：$5\leqslant a\leqslant 14$

所以 能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合是

$\{a\mid 5\leqslant a\leqslant 14\}$.

说明：$3a-b\geqslant 2a-1$ 与 $36\geqslant a+2$ 这两个隐含条件不能省.

例 8 设集合 $P=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{2x-1}=a+1\right\}$，$Q=\{(x,y)\mid y=ax^2\}$. 若 $P\cap Q$ 是单元素集合，求实数 a 的值.

解：联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{y-3}{2x-1}=a+1\\y=ax^2\end{cases}$ 变形，得

$\begin{cases}y-3=(a+1)(2x-1)\quad\left(x\neq\dfrac{1}{2}\right)\\y=ax^2\end{cases}$

消去 y，化简得：$ax^2-2(a+1)x+a-2=0$

当 $a=0$ 时，$x=-1$，此时 $y=0$，$P\cap Q=\{(-1,0)\}$

当 $a\neq 0$ 时，$\Delta=0$ 或 $\begin{cases}\Delta>0\\x_1=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

由 $\Delta = 0$ 得$a = -\dfrac{1}{4}, x = -3, y = -\dfrac{9}{4}$,

$$P \cap Q = \left\{\left(-3, -\frac{9}{4}\right)\right\}$$

由 $x_1 = \dfrac{1}{2}$ 得$a = 12$, $x_2 = \dfrac{5}{3}$, $y = \dfrac{100}{3}$,

$$P \cap Q = \left\{\left(\frac{5}{3}, \frac{100}{3}\right)\right\}.$$

综上,当且仅当 $a = 0, -\dfrac{1}{4}$ 或12时,$P \cap Q$是单元素集合.

说明:本题是用集合的形式表达方程组的解的问题.

三、习　题

1. 用列举法表示下列集合:

(1) 小于 15 的质数集合;

(2) 不大于 4 的非负偶数集合;

(3) 36 与 48 的正公约数集合;

(4) 方程 $4x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 = 0$ 的解集.

2. 用描述法把下列集合写成$\{x \mid p(x)\}$ 的形式:

(1) $\{1,8,27,64,125\}$;

(2) $\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$;

(3) 被 2 除余 1,被 3 除余 2 的整数集合;

(4) 直角坐标系中不在第三象限的点的坐标组成的集合.

3. 用 $\subset, =, \supset, \not\subseteq$ 填空:

设全集 $I = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,集合 $A = \{0,2,4,6,8\}$,$B = \{2,4,8\}$,则$\{0\}$ ____ A,$\{\varnothing\}$ ____ B,$\overline{A}$ ____ $\overline{B}$,$A \cup \overline{B}$ ____ I.

4. **选择题**:

(1) 若方程 $f(x)=0$ 的解集是 F, 方程 $g(x)=0$ 的解集是 G, 方程 $h(x)=0$ 的解集是 H, 则方程组 $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\cdot h(x)=0 \end{cases}$ 的解集为 ( )

(A) $F\cap(G\cup H)$. (B) $F\cup(G\cap H)$.

(C) $F\cap(G\cap H)$. (D) $F\cup(G\cup H)$.

(2) 若不等式 $f(x)>0$ 的解集是 F, 不等式 $g(x)\leqslant 0$ 的解集是 G, 则不等式组 $\begin{cases} f(x)\leqslant 0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ 的解集是 ( )

(A) $F\cap G$. (B) $F\cup G$.

(C) $\overline{F\cap G}$. (D) $\overline{F\cup G}$.

(3) 设 I 是全集, 集合 A、B、C 分别用三个圆表示. (如图 1.1), 则阴影部分表示的集合是 ( )

(A) $(A\cup B)\cap C$.

(B) $(\overline{A}\cap B)\cap C$.

(C) $\overline{A}\cap(B\cup C)$.

(D) $\overline{A}\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$.

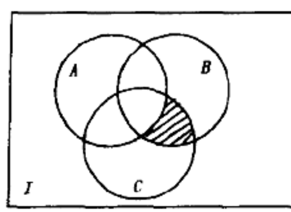

图 1.1

(4) 已知 I 是全集, 集合 S、T 是 I 的两个不同的非空子集, 设 $X=\overline{S}\cap\overline{T}$, 则 $S\cap\overline{X}$ 等于 ( )

(A) $\varnothing$. (B) $\overline{X}$. (C) S. (D) T.

(5) 已知 I 是全集, 集合 X、Y、Z 满足 $X\cap Y=X\cap Z$, 则有 ( )

(A) $Y=Z$. (B) $X\cup Y=X\cup Z$.

(C) $X \cup \overline{Y} = X \cup \overline{Z}$.　　(D) $\overline{X} \cup Y = \overline{X} \cup Z$.

5. 填空题：

(1) 满足$\{a_1, a_2\} \subseteq M \subset \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$的集合$M$有______个.

(2) 若集合$A = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}$，$B = \{x \mid x + 4b < 0\}$满足$A = A \cup B$，则实数$b$的取值范围是______.

(3) 若集合$A = \{x \mid x^2 + px + 3 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - px - q = 0\}$，满足$A \cap B = \{1\}$，则实数$q$的值是______.

(4) 若集合$A = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$，$B = \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{Z}\}$，$P = \{x \mid x \leqslant 100$ 且 $x \in \mathbf{N}\}$，则集合$A \cap (B \cap P)$中元素的个数是______.

(5) 若全集$I = \{1, 3, a^2 + 2a - 2\}$，$A = \{1, a + 1\}$，$\overline{A} = \{6\}$，则实数$a$的值是______.

6. 判断下列各组中三个集合的关系：

(1) $A = \left\{x \mid x = k - \frac{1}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$，$B = \left\{y \mid y = \frac{k}{2} + \frac{1}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}$，$C = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{k}{2} - \frac{1}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(2) $M = \{(x, y) \mid x > 0$ 且 $y < 0\}$，$N = \{(x, y) \mid x - y > 0$ 且 $xy < 0\}$，$P = \{(x, y) \mid x > 0$ 且 $x + y < 0\}$.

(3) $X = \{x \mid x = a^2 + 1, a \in \mathbf{N}\}$，$Y = \{y \mid y = b^2 - 4b + 5, b \in \mathbf{N}\}$，$Z = \{z \mid z = c^2 - 1, c \in \mathbf{N}\}$.

7. 学校图书馆有甲、乙两本书，经调查，某班一共40名学生中甲、乙两本书都借过、都未借过、借过甲书、借过乙书的学生人数之比为1：2：3：4，求：

(1) 甲、乙两本书都未借过的学生人数；

(2) 只借过甲书而未借过乙书的学生人数.