丛书主编：师　达

新概念

XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI

学科竞赛完全设计

奥赛急先锋

初三数学

新概念 XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI 学科竞赛完全设计

奥赛急先锋

◆初一数学 ◆初二物理 ◆初一英语 ◆初中计算机信息工程 ◆初中语文基础

◆初二数学 ◆初三物理 ◆初二英语 ◆初中语文阅读

◆初三数学 ◆初三化学 ◆初三英语 ◆初中语文写作

责任编辑：惠 玮

装帧设计 一技徐徐

ISBN 7-5007-5102-8

9 787500 751021 >

ISBN7-5007-5102-8/G·3894

定价：14.80 元

新概念 XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI 学科竞赛完全设计

奥赛急先锋

初三数学

学科主编：刘汉文
本册主编：武文格
本册副主编：方贡南　于文普
编　　者：武文格　陈美焕　方贡南
于文普　朱尚安　刘汉刚
陈国庆　江思容　库保弟
严　谨　刘　辉　周良进
秦松林　武龙人　黄　刚

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

新概念学科竞赛完全设计手册．初三数学 / 师达主编．
—2版．—北京：中国少年儿童出版社，2002.6
ISBN 7—5007—5102—8

Ⅰ.新… Ⅱ.师… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 032140 号

奥 赛 急 先 锋

初三数学

出版发行：中国少年儿童出版社
出 版 人：

主　　编：师　达　　装帧设计：钱　明
责任编辑：惠　玮　　封面设计：徐　枝
责任校对：刘　新　　责任印务：栾永生

社 址：北京东四十二条二十一号　　邮政编码：100708
电 话：010—64032266　　咨询电话：65956688 转 31

印 刷：南京通达彩印有限公司　　经 销：全国新华书店

开 本：850×1168　1/32　　印 张：12.875 印张
2002 年 6 月北京第 1 次修订　　2002 年 7 月南京第 1 次印刷
字 数：280 千字　　印 数：1—10000 册

ISBN 7—5007—5102—8/G·3894
定 价：14.80 元

图书若有印装问题，请随时向本社出版科退换

前言

国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad简称IMO），是一种国际性的以中学数学为内容、以中学生为参赛对象的竞赛活动。第一届国际数学奥林匹克于1959年夏天在罗马尼亚举行，当时只有保加利亚、捷克、匈牙利、波兰、罗马尼亚和前苏联派代表队参赛，竞赛活动每一年举办一次，1980年因故停办一次。以后每年的国际数学奥林匹克参赛国都在不断地增加，参赛规模都在不断地扩大，如同国际体育奥林匹克竞赛一样，国际数学奥林匹克也已深深地扎根于广大中小学师生的心田中。

在我国奥林匹克竞赛活动始于1956年，当时在著名数学大师华罗庚教授的亲自参与并指导下，在北京举办了首次数学奥林匹克竞赛。“文革”后全国性及地区性的各级各类数学竞赛活动如雨后春笋，深受师生的厚爱。1986年我国首次正式派代表队参加国际奥林匹克数学竞赛，并取得骄人的成绩。更为可喜的是，中学生的数学学

科竞赛活动影响并带动了物理学、化学、生物学、计算机学、俄语、英语等学科的竞赛活动，在相应的国际各学科竞赛活动中，我国都取得了令世人瞩目的优异成绩，充分显示了中华民族的勤劳、智慧、也证明了改革开放后的我国基础教育在国际上是处于领先地位的。各学科竞赛活动的深入发展，也强有力地推动了课堂的学科教学，培养了大批有个性有天赋的中华学子。奥林匹克竞赛活动在40多年的历史中，形成了自己特有的人才培养模式；形成了自己特有的教材、辅导书系列；形成了一套完整的竞赛考试、评估机制。这对改变我国目前基础教育教材版本单一，人才培养模式单调，千军万马挤“普高”独木桥的状况，应该说具有很大积极意义。

奥林匹克教材及辅导图书相对于现行中学教材而言，最大的优势就在于它承认并适应学生的个体差异，在培养个人特长，开发个人潜能，造就拔尖人才方面具有独特的功能。

本书在内容编写上的主要特点有：

1、本书对近年奥林匹克竞赛活动具有集成性。这里所说的集成性含义有二：一是指书中收集到的例题、习题是近几年国内外竞赛和中高考优秀试题；二是指书中对的年奥赛解题思路、方法进行了总结归纳，具有全新的解题方略。

2、恰当处理奥赛和课内学习的关系。本书章节结构的设置既遵循奥赛的规则，同时又参照了中小学教学大纲和现行教材。从内容上讲既能保证学生在各级奥赛中取得好名次；同时又能对应课堂教学，从知识和能力的层面

上强化课内学习，帮助考生在中高考中取得优异成绩。

3、正确处理知识积累与能力培养、打好基础与研究难题的关系。知识的占有是能力形成的基础，掌握知识的速度与质量依赖于能力的发展。只有打好坚实的基础，才会具有研究难题，探究未知的能力。书中设计了一些"难题"。"难题"不同于"怪题"、"偏题"，"怪题"、"偏题"不可取。对"难题"则应下功夫研究。所谓"难题"有两种：一种是综合性强的题，另一种是与实际联系比较密切的题。解析综合性强的题需要使用多个概念、规律，需要把学过的知识有机地联系在一起，有时还需要用到其他学科的知识进行整合。解析联系实际的题需要分析研究实际问题，从大量事实中找出事物所遵循的规律，光靠对知识的死记硬背是不行的。对于这两种"难题"，必须下功夫研究，这种不间断的研究、探究，并持之以恒，就一定会形成学科特长，就一定会在不远的将来成长为拔尖人才。

本丛书含数、理、化、语文、英语、生物学、信息学（计算机）七科，跨小学、初中、高中三个阶段，共40册。

本丛书由师达总体策划并担任丛书主编，由刘汉文、周向霖、金新担任学科主编，由北京、浙江、江苏、湖北重点中小学的特级、高级老师编写，尤其是湖北黄冈市教研室的著名老师们的加盟，更使本丛书增辉。《新概念学科竞赛与题解方略》将帮助每一位学生、家长、老师实现心目中的理想与渴望，我们衷心祝愿每一位朋友成功。

书中难免有一些缺憾，望广大师生及学生家长指正，以便再版时订正。

好学生终于有了训练本

·本·书·特·色·

着眼于课本　落脚于奥赛

把握基础知识　培养创新能力

解题层层递进　另辟提高蹊径

好学生不能不读的训练本

目　　录

第一讲　一元二次方程

一元二次方程是初中数学极为重要的内容,其问题所涉及的知识面广、难度大、变化多、技巧强,因而常成为初中数学竞赛中的“热门”试题.

1.1　一元二次方程根的判别式

一元二次方程根的判别式　$\Delta=b^2-4ac$,揭示了根的情况与方程系数间的密切关系,它在研究一元二次方程中有以下作用:

1. 判别一元二次方程有无实数根;
2. 求方程或方程组的实数解;
3. 求方程中参系数的值或取值范围;
4. 求有关代数式的值;
5. 证明有关的不等式.

【典型范例】

●**例 1**　设方程甲:$x^2-2x-m=0$ 无实根,判断方程乙:$x^2+2mx+1+2(m^2-1)(x^2+1)=0$ 根的情况.

分析　此题由甲方程无实根得 m 的取值范围,再根据 m 的取值范围判定方程乙的判别式的符号.

解法 1　$\because$　方程甲 $x^2-2x-m=0$ 无实根,

$\therefore$　$\Delta_{甲}=4+4m<0$,即 $m<-1$.

整理方程乙,得　$(2m^2-1)x^2+2mx+(2m^2-1)=0$.

$\Delta_{乙}=4m^2-4(2m^2-1)^2$

$= -4(2m-1)(m+1)(2m+1)(m-1)$

$\because \quad m<-1 \qquad \therefore \quad \Delta_{乙}<0.$

故方程乙 $x^2+2mx+1+2(m^2-1)(x^2+1)=0$ 无实根.

解法 2 $\because$ 方程甲 $x^2-2x-m=0$ 无实根,

$\therefore \quad \Delta_{甲}=4+4m<0$,即 $m<-1$.

方程乙可变形为 $(x+m)^2+(m^2-1)(2x^2+1)=0.$

当 $m<-1$ 时,$(x+m)^2\geqslant 0,(2x^2+1)>0,m^2-1>0$,

$\therefore \quad (x+m)^2+(m^2-1)(2x^2+1)>0.$

故方程 $x^2+2mx+1+2(m^2-1)(x^2+1)=0$ 无实数根.

说明 解法 1 是直接利用判别式解决问题;解法 2 讨论方程乙左边的符号得出结论.

●**例 2** 若 p_1,p_2,q_1,q_2 是实数,且 $p_1p_2=2(q_1q_2)$.

求证:方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 和 $x^2+p_2x+q_2=0$ 至少有一个方程有实根.

分析 要证结论成立,只须证方程的判别式 $\Delta_1+\Delta_2\geqslant 0$ 即可.

证明 方程 $x_2+p_1x+q_1=0$ 的判别式为 $\Delta_1={p_1}^2-4q_1$,

方程 $x_2+p_2x+q_2=0$ 的判别式为 $\Delta_2={p_2}^2-4q_2$,

$\therefore \quad \Delta_1+\Delta_2={p_1}^2+{p_2}^2-2[2(q_1+q_2)]=(p_1-p_2)^2\geqslant 0.$

$\therefore \quad \Delta_1$ 和 Δ_2 至少有一个大于或等于 0.

原命题得证.

说明 此题运用了有理数加法运算中的一个重要结论:"几个数的和大于(或小于)零,则其中至少有一个数大于(或小于)零."

●**例 3** 求方程 $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$ 的实数解.

分析 直接求解较困难,可将方程化为以 x 为主元的一元二次方程,利用判别式先求得 y 的值.

解 将原方程整理成关于 x 的方程,得

$5x^2+(8y-2)x+(5y^2+2y+2)=0.$

∵　x 是实数.

∴　$\Delta=(8y-2)^2-4\times5(5y^2+2y+2)=-36(y+1)^2\geqslant0$.

∴　$(y+1)^2\leqslant0$. 而 $(y+1)^2\geqslant0$,

∴ $y+1=0$.　即 $y=-1$

将 $y=-1$ 代入原方程解得　$x=1$.

∴　原方程的实数解为 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}$

●例 4　解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-xy-3x+3=0, & (1)\\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-2xz+3=0. & (2)\end{cases}$$

解　将(1)变形为关于 x 的方程得

$$x^2-(y+3)x+(y^2+3)=0. \quad (3)$$

∵　x、y 为实数,

∴　$\Delta_x=[-(y+3)]^2-4(y^2+3)\geqslant0$, 即 $-3(y-1)^2\geqslant0$.

∴　$(y-1)^2\leqslant0$. 而 $(y-1)^2\geqslant0$,　∴　$y=1$.

将 $y=1$ 代入(3),得　　$x=2$.

将 $x=2$, $y=1$ 代入(2),得

$z^2-52+6=0$. 解得　$z_1=2$, $z_2=3$.

∴　原方程组的实数解为 $\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=1,\\ z_1=2;\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=1,\\ z_2=3.\end{cases}$

说明　以上两例均是根据判别式得到不等式后,借助"若 $A^2\geqslant0$ 且 $A^2\leqslant0$, 则 $A=0$"的结论先确定其中一个未知数的值,再求其它未知数的值.

●例 5　若方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实根,求 a, b 的值.

解　因为原方程有实根,则它的判别式

$\Delta=4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\geqslant0$.

即 $(a-1)^2+(a+2b)^2\leqslant 0.$ (1)

$\because$ $(a-1)^2\geqslant 0,(a+2b)^2\geqslant 0,$

$\therefore$ $(a-1)^2+(a+2b)^2\geqslant 0.$ (2)

要使(1)和(2)同时成立,只有$(a-1)^2+(a+2b)^2=0.$

$\begin{cases}a-1=0,\\a+2b=0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\b=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

●**例6** 实数 x、y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$,设 $S=x^2+y^2$,则$\dfrac{1}{S_{最小}}+\dfrac{1}{S_{最大}}=$____.

分析 已知条件是含 x、y 的二次轮换对称等式,若设 $y=mx$ 代入已知等式,则 x、y 都可用 m 的代数式表示出来;又因为 S 的表达式也是关于 x、y 的二次轮换对称式,消去 x、y 可用 m 的代数式表示S,由于 m 的最高次数是2,可联想一元二次方程的判别式求 S 的最值.

解 设 $y=mx$,代入已知等式 $4x^2-5xy+4y^2=5$,得

$x^2=\dfrac{5}{4-5m+4m^2}$,

$\therefore$ $S=a^2+(mx)^2=x^2(1+m^2)=\dfrac{5(1+m^2)}{4-5m+4m^2}.$

整理得到关于 m 的一元二次方程$(4S-5)m^2-5Sm+(4S-5)=0.$

$\because$ m 为实数,

$\therefore$ $\Delta_m=(-5S)^2-4(4S-5)^2\geqslant 0.$

即$(3S-10)(13S-10)\leqslant 0$.由此得

$\begin{cases}3S-10\geqslant 0,\\13S-10\leqslant 0.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3S-10\leqslant 0,\\3S-10\geqslant 0.\end{cases}$

解得$\dfrac{10}{13}\leqslant S\leqslant\dfrac{10}{3}.$

$\therefore \quad \dfrac{1}{S_{最小}}+\dfrac{1}{S_{最大}}=\dfrac{13}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{8}{5}.$

说明　根据方程的特点，引进参数，反客为主构造一个一元二次方程，利用判别式求最值，本题的解法值得体会.

●**例 7**　已知 x,y,z 为实数，且有 $x+y+z=5,x^2+y^2+z^2=9$，求证：x,y,z 都不小于 1 且不大于 $\dfrac{7}{3}$.

分析　三个未知数满足两个对称方程，可以消去一个未知数，得到一个含参数的一元二次方程，再利用根的判别式完成证明.

证明　由 $x+y+z=5$，得　$x=5-y-z$.

把 $x=5-y-z$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$，得

$(5-y-z)^2+y^2+z^2=9.$

整理得　$2y^2-(10-2z)y+(z^2-10z+16)=0.$

$\because \quad y$ 为实数，

$$\therefore \quad \Delta_y=[-(10-2z)]^2-4\times2\times(z^2-10z+16)$$
$$=-4(3z-7)(z-1)\geqslant0.$$

$$\therefore \quad \begin{cases}3z-7\geqslant0,\\ z-1\leqslant0;\end{cases} \text{或} \begin{cases}3z-7\leqslant0,\\ z-1\geqslant0.\end{cases}$$

解得　$1\leqslant z\leqslant\dfrac{7}{3}.$

同理可证　$1\leqslant x\leqslant\dfrac{7}{3},1\leqslant y\leqslant\dfrac{7}{3}.$

故结论成立.

说明　因为 x,y,z 在题设中具有对称性，所以只需证出其中任意一个符合结论，其余两个同理可证.

●**例 8**　当 m 为何值时，$6x^2-xy-2y^2+my-6$ 能分解成两个一次因式的积，并分解之.

解　将原式整理为关于 x 的二次三项式，得

$6x^2-yx-(2y^2-my+6).$

考虑 x 的二次方程 $6x^2-yx-(2y^2-my+6)=0$ 的判别式

$\Delta_x=(-y)^2-4\times6[-(2y^2-my+6)]=49y^2-24my+144$，要使原式能分解为两个一次因式之积，$\Delta_x$ 必为完全平方式，即关于 y 的方程 $49y^2-24my+144=0$ 有相等的实数根，因此其判别式 $\Delta_y=0$，即 $(-24m)^2-4\times49\times144=0$. $\therefore$ $m=\pm7$.

当 $m=7$ 时，

$6x^2-xy-2y^2+7y-6=(3x-2y+3)(2x+y-2)$；

当 $m=-7$ 时，

$6x^2-xy-2y^2-7y-6=(3x-2y-3)(2x+y+2)$.

说明 当 $a>0$ 且 $\Delta=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两相等实根.关于 x 的二次三项式 ax^2+bx+c 为完全平方式.

【练习 1.1】

1. 任意实系数二次方程 $2kx^2+(8k+1)x+8k=0$ 有两个不等实根的 k 的取值范围是 ( )

A. $k<-\frac{1}{16}$ B. $k>-\frac{1}{16}$ C. $k\geqslant-\frac{1}{16}$ D. 以上都不对

2. 若一元二次方程 $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 有实数根，则 k 的最大整数值为 ( )

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

3. 如果关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 没有实数根，那么关于 x 的方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 的实根个数为 ( )

A. 2 B. 1 C. 0 D. 不确定

4. 若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2ax_0+b)^2$ 的关系是 ( )

A. $\Delta>M$ B. $\Delta=M$ C. $\Delta<M$ D. 不确定

5. 当 m ______时，方程 $(m-1)x^2+2mx+m-3=0$ 有两实根.

6. 如果方程 $x^4+6x^3+9x^2-3px^2-9px+2p^2=0$ 有且仅有一个实数满足,则 p 的值为______.

7. 设 $y=\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}$,则 y 的取值范围为______.

8. 当 a 在什么范围内取值时,方程 $|x^2-5x|=a$ 有且只有相异二实数根.

9. 若 p、q 为实数,且满足 $p^2+q^2-p^2q^2=1$,求证:方程 $x^2+px+\dfrac{1}{4}=0$ 和方程 $x^2+9x+\dfrac{1}{4}=0$ 中至少有一个方程有两个相等的实数根.

10. 已知 $x+y+z=6$,$x^2+y^2+z^2=18$. x、y、z 为实数,求证 $0\leqslant x\leqslant 4$. $0\leqslant y\leqslant 4$. $0\leqslant z\leqslant 4$.

11. 设实数 a、b、c 满足 $a=b+c+1$,证明方程 $x^2+x+b=0$ 和 $x^2+ax+c=0$ 中至少有一个方程有两个不相等的实数根.

12. 如果 $2x^2+xy-y^2+my-2$ 能分解成两个一次因式之积,m 等于多少? 并把它分解.

1.2 一元二次方程根与系数的关系

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的系数 a、b、c 与方程根 x^1,x^2 间存在着密切的关系:$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$,$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$;反之,若 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$,$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}(a\neq 0)$,则以 x_1,x_2 为根的一元二次方程可表示为 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$,即 $ax^2+bx+c=0$. 利用根与系数的这种特殊关系可解决以下几种类型的问题.

1. 求方程中字母系数的值或取值范围

【典型范例】

●**例 1** 已知方程 $2x^2+kx-2k+1=0$ 的两根的平方和为

$\frac{29}{4}$,则 k 的值为 ( )

A. 3　　B. -11　　C. 3 或 -11　　D. 11

分析 由已知条件和根与系数的关系可得到 k 的方程,然后求解.注意一定要检验所求的值是否保证原方程有解.

解 设原方程的两个实根为 x_1、x_2,则

$x_1+x_2=-\frac{k}{2}$,$x_1\cdot x_2=-k+\frac{1}{2}$.

$\because$ $x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{1}{4}k^2+2k-1$,

$\therefore$ $\frac{1}{4}k^2+2k-1=29$,解得 $k=3$ 或 -11.

经检验,当 $k=-11$ 时,$\Delta<0$,方程无实根,舍去.故选 A.

说明 利用根与系数的关系求字母的值时,切不能忽略方程有实根的条件,即判别式 $\Delta\geqslant 0$.

●**例 2** 已知方程 $x^2+(a-b)x+a=0$ 的两根都是整数,求 a 的值.

解 设方程的两根为 α,β,则 $\alpha+\beta=6-a$,$\alpha\cdot\beta=a$.

两式相加,得 $\alpha+\beta+\alpha\beta=6$.

$\therefore$ $\alpha+\beta+\alpha\beta+1=7$,即$(\alpha+1)(\beta+1)=7$.

$\because$ α,β 均为整数且 7 为质数,

$\therefore$ $\begin{cases}\alpha+1=1,\\ \beta+1=7;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha+1=7,\\ \beta+1=1;\end{cases}$

或 $\begin{cases}\alpha+1=-1,\\ \beta+1=-7;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha+1=-7,\\ \beta+1=-1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\alpha_1=0,\\ \beta_1=6;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha_2=6,\\ \beta_2=0;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha_3=-2,\\ \beta_3=-8;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha_4=-8,\\ \beta_4=-2.\end{cases}$

分别代入 $\alpha\cdot\beta=a$,得

$$a=0 \text{ 或 } a=16.$$

检验 $a=0$ 或 16 都能保证原方程有实根.