丛书主编：师　达

XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI

新概念 学科竞赛完全设计

奥赛急先锋

初二数学

新概念学科竞赛完全设计

XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI

奥赛急先锋

初二数学

学科主编：刘汉文

本册主编：江思容　秦松林

本册副主编：刘汉刚　陈国庆

编　　者：王桂平　王　辉　马玉华
张明德　徐校军　陈国庆
刘汉刚　江思容　秦松林
刘汉文　郭一鸣　武文格
李金志　江建国　邵明武
康　健　常青树　武龙人

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

新概念学科竞赛完全设计手册．初二数学 / 师达主编．
—2 版．—北京：中国少年儿童出版社，2002.6
ISBN 7—5007—5096—X

Ⅰ．新… Ⅱ．师… Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 032139 号

奥 赛 急 先 锋

初二数学

出版发行：中国少年儿童出版社
出 版 人：

主　　编：	师　达	**装帧设计：**	钱　明
责任编辑：	惠　玮	**封面设计：**	徐　枝
责任校对：	刘　新	**责任印务：**	栾永生
社　址：	北京东四十二条二十一号	**邮政编码：**	100708
电　话：	010—64032266	**咨询电话：**	65956688 转 31
印　刷：	南京通达彩印有限公司	**经　销：**	全国新华书店
开　本：	850×1168　1/32	**印　张：**	12.625 印张
	2002 年 6 月北京第 1 次修订		2002 年 7 月南京第 1 次印刷
字　数：	275 千字	**印　数：**	1—10000 册

ISBN 7—5007—5096—X/G·3888
定　价： 14.80 元

前言

国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad 简称IMO），是一种国际性的以中学数学为内容、以中学生为参赛对象的竞赛活动。第一届国际数学奥林匹克于1959年夏天在罗马尼亚举行，当时只有保加利亚、捷克、匈牙利、波兰、罗马尼亚和前苏联派代表队参赛，竞赛活动每一年举办一次，1980年因故停办一次。以后每年的国际数学奥林匹克参赛国都在不断地增加，参赛规模都在不断地扩大，如同国际体育奥林匹克竞赛一样，国际数学奥林匹克也已深深地扎根于广大中小学师生的心田中。

在我国奥林匹克竞赛活动始于1956年，当时在著名数学大师华罗庚教授的亲自参与并指导下，在北京举办了首次数学奥林匹克竞赛。“文革”后全国性及地区性的各级各类数学竞赛活动如雨后春笋，深受师生的厚爱。1986年我国首次正式派代表队参加国际奥林匹克数学竞赛，并取得骄人的成绩。更为可喜的是，中学生的数学学

科竞赛活动影响并带动了物理学、化学、生物学、计算机学、俄语、英语等学科的竞赛活动，在相应的国际各学科竞赛活动中，我国都取得了令世人瞩目的优异成绩，充分显示了中华民族的勤劳、智慧、也证明了改革开放后的我国基础教育在国际上是处于领先地位的。各学科竞赛活动的深入发展，也强有力地推动了课堂的学科教学，培养了大批有个性有天赋的中华学子。奥林匹克竞赛活动在40多年的历史中，形成了自己特有的人才培养模式；形成了自己特有的教材、辅导书系列；形成了一套完整的竞赛考试、评估机制。这对改变我国目前基础教育教材版本单一，人才培养模式单调，千军万马挤“普高”独木桥的状况，应该说具有很大积极意义。

奥林匹克教材及辅导图书相对于现行中学教材而言，最大的优势就在于它承认并适应学生的个体差异，在培养个人特长，开发个人潜能，造就拔尖人才方面具有独特的功能。

本书在内容编写上的主要特点有：

1、本书对近年奥林匹克竞赛活动具有集成性。这里所说的集成性含义有二：一是指书中收集到的例题、习题是近几年国内外竞赛和中高考优秀试题；二是指书中对的年奥赛解题思路、方法进行了总结归纳，具有全新的解题方略。

2、恰当处理奥赛和课内学习的关系。本书章节结构的设置既遵循奥赛的规则，同时又参照了中小学教学大纲和现行教材。从内容上讲既能保证学生在各级奥赛中取得好名次；同时又能对应课堂教学，从知识和能力的层面

上强化课内学习，帮助考生在中高考中取得优异成绩。

3、正确处理知识积累与能力培养、打好基础与研究难题的关系。知识的占有是能力形成的基础，掌握知识的速度与质量依赖于能力的发展。只有打好坚实的基础，才会具有研究难题，探究未知的能力。书中设计了一些“难题”。“难题”不同于“怪题”、“偏题”，“怪题”、“偏题”不可取。对“难题”则应下功夫研究。所谓“难题”有两种：一种是综合性强的题，另一种是与实际联系比较密切的题。解析综合性强的题需要使用多个概念、规律，需要把学过的知识有机地联系在一起，有时还需要用到其他学科的知识进行整合。解析联系实际的题需要分析研究实际问题，从大量事实中找出事物所遵循的规律，光靠对知识的死记硬背是不行的。对于这两种“难题”，必须下功夫研究，这种不间断的研究、探究，并持之以恒，就一定会形成学科特长，就一定会在不远的将来成长为拔尖人才。

本丛书含数、理、化、语文、英语、生物学、信息学（计算机）七科，跨小学、初中、高中三个阶段，共40册。

本丛书由师达总体策划并担任丛书主编，由刘汉文、周向霖、金新担任学科主编，由北京、浙江、江苏、湖北重点中小学的特级、高级老师编写，尤其是湖北黄冈市教研室的著名老师们的加盟，更使本丛书增辉。《新概念学科竞赛与题解方略》将帮助每一位学生、家长、老师实现心目中的理想与渴望，我们衷心祝愿每一位朋友成功。

书中难免有一些缺憾，望广大师生及学生家长指正，以便再版时订正。

好学生终于有了训练本

·本·书·特·色·

着眼于课本　　落脚于奥赛

把握基础知识　　培养创新能力

解题层层递进　　另辟提高蹊径

好学生不能不读的训练本

目　录

第一讲　因式分解

多项式的因式分解是代数式恒等变形的最有力的杠杆之一，是解决许多数学问题的有力工具，因式分解方法灵活，技巧性强，它对于培养学生的解题技能、发展学生的思维能力，都有着十分独特的作用。本讲将对因式分解补充讲解换元法、拆项添项法、待定系数法等方法.

1.1　基本方法

因式分解的基本方法有提公因式法、运用公式法、分组分解法.

【典型范例】

●例 1　把 $(x-y)^{2n+1}-(x-z)(x-y)^{2n}+2(y-x)^{2n}(y-z)$ 分解因式，其中 n 是正整数.

解　原式 $=(x-y)^{2n}[(x-y)-(x-z)+2(y-z)]$

$=(x-y)^{2n}(y-z)$.

●例 2　分解因式：$(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$.

分析　这里先补充因式分解经常用到的两个公式：

立方和：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

立方差：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

观察这个多项式的特点，不妨用立方和或立方差公式试一试.

解　原式 $=[(ax-by)+(by-cz)][(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-cz)^2]-(ax-cz)^3$

$=(ax-cz)[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-cz)^2-(ax-cz)^2]$

$$=(ax-cz)[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)$$
$$+(by+ax-2cz)(by-ax)]$$
$$=(ax-cz)(ax-by)(3cz-3by)$$
$$=3(ax-cz)(ax-by)(cz-by).$$

说明 如果先由$(m+n)^3=m^3+n^3+3mn(m+n)$推得$m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)$，把$ax-by$视为m，$by-cz$视为n，则$m+n=ax-cz$，从而能较简捷地将原式分解因式．另外，由立方和公式可得$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$，变形得$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(a+c)$，由这个公式也可将此题分解因式．

●例 3 把$(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$分解因式．

分析 此题无公因式提取，也不能直接用公式法分解．从本题的特点可以看出，宜把$x+y$、xy各看成一个整体，去括号后再分组分解．

解 原式$=(x+y)^2-2xy(x+y)-2(x+y)+4xy+1$
$$-2xy+x^2y^2$$
$$=[(x+y)^2-2(x+y)+1]-2xy(x+y-1)$$
$$+x^2y^2$$
$$=(x+y-1)^2-2(x+y-1)xy+(xy)^2$$
$$=(x+y-1-xy)^2$$
$$=(x-1)^2(y-1)^2.$$

说明 将多项式分组的目的在于经过适当的分组后，原多项式能转化为可提公因式，或可运用公式，或可用十字相乘法等方法将其分解．

●例 4 把$x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+\cdots+x^2+x+1$分解因式．

分析 这个多项式有 16 项，从最高次项x^{15}开始，x的次数顺次递减至 0，由此想到应用公式a^n-b^n来分解．

解 因为$x^{16}-1=(x-1)(x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^2+x+1)$

所以　$x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^{2}+x+1$

$$=\frac{(x-1)(x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^{2}+x+1)}{(x-1)}$$

$$=\frac{x^{16}-1}{x-1}$$

$$=\frac{(x^{8}+1)(x^{8}-1)}{x-1}$$

$$=\frac{(x^{8}+1)(x^{4}+1)(x^{2}+1)(x^{2}-1)}{x-1}$$

$$=(x^{8}+1)(x^{4}+1)(x^{2}+1)(x-1)$$

说明　在本题的分解过程中,用到先乘以$(x-1)$,再除以$(x-1)$的技巧,这一技巧在等式变形中经常用到.

【练习 1.1】

1.分解因式:

(1)$-\frac{1}{3}x^{2n+2}+\frac{1}{27}x^{2n}-\frac{2}{9}x^{2n+1}$;

(2)$x(a-b)^{2n}+y(b-a)^{2n+1}$;

(3)$(ax+by)^{2}+(ay-bx)^{2}+c^{2}y^{2}+cx^{2}$.

2.分解因式:

(1)$(c^{2}-b^{2}+d^{2}-a^{2})^{2}-4(ab-cd)^{2}$;

(2)$a^{4}+a^{3}+\frac{9}{4}a^{2}+a+1-b^{2}$;

(3)$x^{2n}+x^{n}-\frac{1}{9}y^{2}+\frac{1}{4}$;

(4)$6x-6y-9x^{2}+18xy-9y^{2}-1$;

(5)$5a^{2n+11}x^{4m+b}-20a^{n+8}x^{2m+4}y+20a^{5}x^{2}y^{2}$;

(6)$(x^{2}+y^{2})^{3}+(z^{2}-x^{2})^{3}-(y^{2}+z^{2})^{3}$.

3.分解因式:

(1)$a^{3}+a^{2}+a+b^{3}-b^{2}+b$;

(2)$ax^{2}-a^{2}x+bx^{2}-2abx+a^{2}b-b^{2}x+ab^{2}$;

(3)$1+a+b+c+ab+bc+ac+abc$;

(4)$x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$;

(5)$xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$;

(6)$(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$.

1.2 换 元 法

对于某些复杂的多项式,如果把其中某些部分看作一个整体,用一个新的字母代替,不仅可使原式得到简化,而且能使式子的特点更加明显,这种方法就是因式分解中的换元法.

【典型范例】

●**例 1** 分解因式:

(1)$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$;

(2)$(x+1)^4+(x+3)^4-272$.

分析 (1)中两个括号内的二次项和一次项完全相同,如果用 $y=x^2+x+1$ 换元,可使原式简明而易于分解.(2)中为了展开括号之后可以消项,且注意到 $x+1$ 与 $x+3$ 的平均数为 $x+2$,故采用平均代换,令 $x+2=y$.

解 (1)令 $y=x^2+x+1$,则

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=y(y+1)-12=y^2+y-12\\
&=(y-3)(y+4)=(x^2+x-2)(x^2+x+5)\\
&=(x-1)(x+2)(x^2+x+5)
\end{aligned}
$$

(2)令 $y=\dfrac{(x+1)+(x+3)}{2}=x+2$,则

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(y-1)^4+(y+1)^4-272\\
&=2(y^4+6y^2+1)-272\\
&=2(y^2-9)(y^2+15)\\
&=2(y+3)(y-3)(y^2+15)\\
&=2(x+5)(x-1)(x^2+4x+19)
\end{aligned}
$$

说明 由此可见,换元法是为解题搭桥梁,"过河"之后,便可"拆桥".

●**例 2** 分解因式:$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$.

分析 从式子特征看,把 $a+b$ 与 ab 各看成一个整体,可使问题简化.

解 设 $a+b=m, ab=n$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(m-2n)(m-2)+(1-n)^2\\&=m^2-2m-2mn+4n+1-2n+n^2\\&=m^2-2m(n+1)+(n+1)^2\\&=(m-n-1)^2\\&=(a+b-ab-1)^2.\end{aligned}$$

●**例 3** 分解因式:$(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)$.

分析 本题含有两个字母,当互换这两个字母的位置时,多项式保持不变,这样的多项式叫做二元对称式,对于这样的对称式常常用换元法,即令 $a=x+y, b=xy$ 来分解因式.

解 令 $a=x+y, b=xy$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=[(x+y)^2-xy]^2-4xy[(x+y)^2-2xy]\\&=(a^2-b)^2-4b(a^2-2b)=a^4-6a^2b+9b^2\\&=(a^2-3b)^2=(x^2+2xy+y^2-3xy)^2\\&=(x^2-xy+y^2)^2.\end{aligned}$$

【练习 1.2】

1. 分解因式$(x^2+10x+4)(x^2+10x-2)-55$.
2. 分解因式$(2a^2+2a+1)b+a(a+1)(b^2+1)$.
3. 解因式$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+a(a-b+c)(a+b-c)+b(a+b-c)(-a+b+c)+c(-a+b+c)(a-b+c)$.
4. 分解因式$(x+3)(x^2-1)(x+5)-20$.
5. 分解因式 $x^4+2x^3+x^2+1+2(x+x^2)$.

6.分解因式$(x^2+y^2-2x+1)^2-(4y-4xy)(x^2-y^2-2x+1)$.

7.分解因式$(x^2+19x)^2-408(x^2+19x)-124848$.

8.分解因式 $a^{12}+a^9+a^6+a^3+1$.

9.证明:对于任意非零自然数 n,都存在一个自然数 m,使得 $mn+1$ 是一个合数.

10.将 $5^{1995}-1$ 分解为三个整数之积,且每一个因数都大于 5^{100}.

1.3 十字相乘法

我们知道,$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$

$$=a_1a_2x^2+a_1c_2x+a_2c_1x+c_1c_2$$

$$=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2,$$

反过来,就得到

$$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2a_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2).$$

我们发现,二次项的系数 a 分解成 a_1a_2,常数项 c 分解成 c_1c_2,并且把 a_1,a_2,c_1,c_2 排列如下:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{array}$$

这里按斜线交叉相乘,再相加,就得到 $a_1c_2+a_2c_1$,如果它证明等于 ax^2+bx+c 的一次项系数 b,那么 ax^2+bx+c 就可以分解成$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$,其中 a_1,c_1 位于上图的上一行,a_2,c_2 位于下一行.

像这种借助画十字交叉线来分解二次三项式的方法,通常叫做十字相乘法.它的一般形式是:

$$acx^2+(ab+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d).$$

【典型范例】

●例 1 把下列各式分解因式:

(1)$2x^2-7x+3$;

(2)$5x^2+6xy-8y^2$;

(3)$3a^2b^2-17abxy+10x^2y^2$.

解　(1)∵

$$\begin{array}{cc} x & -3 \\ 2x & -1 \end{array}$$

$-x+(-3)\cdot 2x=-7x$

∴　$2x^2-7x+3=(x-3)(2x-1)$.

(2)∵

$$\begin{array}{cc} x & 2y \\ 5x & -4y \end{array}$$

$-4yx+2y\cdot 5x=6x$

∴　$5x^2+6xy-8y^2=(x+2y)(5x-4y)$.

(3)∵

$$\begin{array}{cc} ab & -5xy \\ 3ab & -2xy \end{array}$$

$3ab\cdot(-5xy)+ab\cdot(-2xy)=-17abxy$

∴　$3a^2b^2-17abxy+10x^2y^2=(ab-5xy)(3ab-2xy)$.

●**例 2**　分解因式：$x^4-2x^2+x+a^2-a$.

分析　把原式按字母 a 整理，变为关于 a 的二次三项式，然后用“十字相乘法”.

$$\begin{array}{cc} a & -(x^2+x) \\ a & -(x^2-x+1) \end{array}$$

解　原式 $=a^2-(2x^2+1)a+(x^4+x)$

$=a^2-(2x^2+1)a+x(x+1)(x^2-x+1)$

$=a^2-(2x^2+1)a+(x^2+x)(x^2-x+1)$

$=(a-x^2-x)(a-x^2+x-1)$

$=(x^2+x-a)(x^2-x-a+1)$.

【练习 1.3】

1.把下列各式分解因式：

(1)$2(a-b)^2+(a-b)-6$

(2)$6x^2-11xy+3y^2$;

(3)$(a^2-b^2)x^2-4abx-a^2+b^2$;

(4)$x^2-(p^2+q^2)x+pq(p+q)(p-q)$;

(5)$x^4+x^3+6x^2+5x+5$.

2.分解因式:$x^2-408x-124848$.

1.4 添项、拆项法

因式分解是多项式乘法的逆运算,在对某些多项式分解因式时,需要对多项式进行适当的变形,使其能分组分解.添项和拆项是两种重要的变形技巧,把多项式中的某一项拆成两项或多项,或者在多项式中添上两个符号相反的项,前者称为拆项,后者称为添项.其目的都是使多项式能用分组分解法进行分解.

【典型范例】

●**例1** 分解因式:x^3-9x+8.

分析 本题解法很多,这里只介绍如何运用拆项与添项法来分解此多项式.需要注意拆项与添项的目的与技巧.

解法1 将常数项8拆成$-1+9$,

原式$=x^3-9x-1+9$

$=x^3-1-9(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x-8)$.

解法2 将一次项$-9x$拆成$-x-8x$,

原式$=x^3-x-8x+8$

$=(x^3-x)+(-8x+8)$

$=x(x+1)(x-1)-8(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x-8)$.

解法3 将三次项x^3拆成$9x^3-8x^3$,

原式$=9x^3-8x^3-9x+8$

$=(9x^3-9x)+(-8x^3+8)$