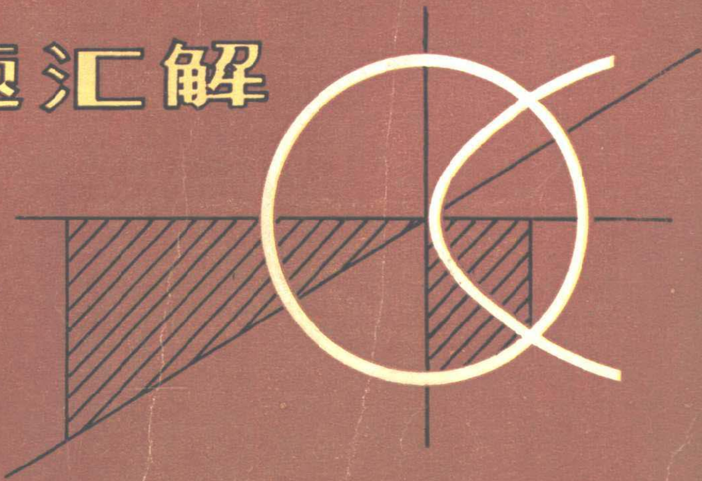
研究生入学数学试题汇解

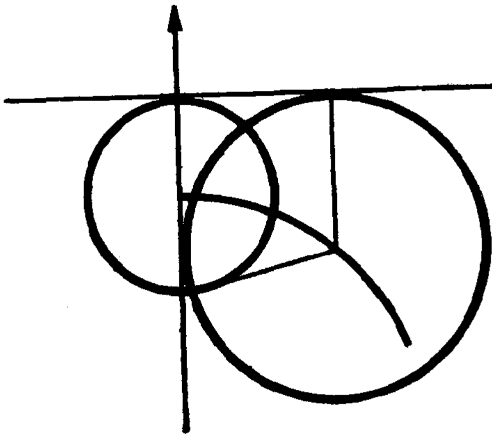


YANJIUSHENG RUXUESHUXUE SHITIHUIJIE

吴[illegible]喜　李玉明　编
梁[illegible]　许义生　主审

安徽人民出版社

研究生入学数学试题汇解



吴继轰 李玉明 编
梁昆淼 许义生 主审

安徽人民出版社

封面設計： 肖 英

研究生入学数学試題汇解

吳繼轟 李玉明 編
梁昆淼 許义生 主审

*

安徽人民出版社出版
（合肥市跃进路1号）

安徽省新华书店发行
安徽新华印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张 19 字数418,000
1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷
印数 1—29,000
统一书号：13102·66 定价：1.95元

前　　言

本書选编了近年来全国高等院校、科研单位招收研究生的数学入学試題。为了顧及理工科各专业讀者的需要，汇集的試題类型力求广泛多样。

全書所选試題注重于考查基本概念和基本理論的掌握，涉及的内容包括数学分析、复变函数、解析几何、高等代数、数理方程等。本書可供綜合复习大学数学課程和报考研究生复习参考之用。

收入本書的試題，逐題作了解答，以利于訓練讀者严密的邏輯論証能力和提高綜合解題技巧。但限于編者水平，时間仓促，解答难免有誤，仅供参考。

由于条件限制，有些院校的試題未能收集到。所选試題还有部分属于抄件，其中如有錯漏之处，敬請批評指正。

本書承蒙南京大学梁昆淼教授、安徽大学数学系主任許义生教授审訂。林声仓、徐昶、焦长春、肖少杰同志参加校核。竇本良同志繪制了全部插图。編选过程中还得到南京大学数学系有关同志的热情支持，并承中国科学技术大学排版，在此一并致謝。

編　者

1980年10月于合肥

目　　录

一、中国科学技术大学

§1. 物　理　型

（一）計算下列积分：

1. 求 $I=\int_0^1 xf(x)dx$，其中 $f(x)=\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt$.

解 $I=\int_0^1 x[\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt]dx$，交换二重积分的次序得：

$$I=-\int_0^1 e^{-t^2}dt\int_0^{\sqrt{t}} xdx.$$

$$=-\int_0^1 \frac{1}{2}te^{-t^2}dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e}-1\right)$$

2. 求 $I=\iint\limits_S y^2xdydz+z^2ydzdx+x^2zdxdy$，$S$ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=2az$（$a>0$）的外侧。

解 应用高斯定理，得：

$$I=\iiint(x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

令 $\qquad z=w+a \qquad dz=dw$

所以 $I=\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(r^2+2ar\cos\varphi+a^2)r^2\sin\varphi dr$

$$=2\pi\int_0^\pi\left(\frac{8a^5}{15}\sin\varphi+\frac{a^5}{2}\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{32\pi a^5}{15}$$

（二）求微分方程：$y''+4y=x\sin 2x$ 的通解。

解 其特征方程：$r^2+4=0$ 得：$r=\pm 2i$

所以 $$y^*=x[(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x]$$

代入原方程，得：

$$\begin{aligned}&(2c-8ax-4b)\sin 2x+(2a+8cx+4d)\cos 2x-\\&-4(ax^2+bx)\cos 2x-4(cx^2+dx)\sin 2x+\\&+4(cx^2+dx)\sin 2x+4(ax^2+bx)\cos 2x=x\sin 2x\end{aligned}$$

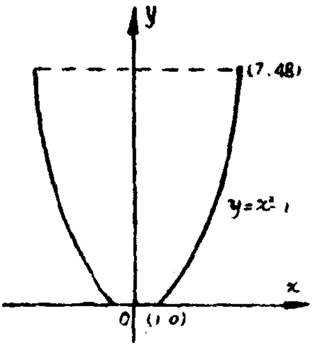
比較其系数得：

得：$\begin{cases}-8a=1\\ 2c-4b=0\\ 8c=0\\ 2a+4d=0\end{cases}$ 解得：$\begin{aligned}&a=-\frac{1}{8}\\&b=0\\&c=0\\&d=\frac{1}{10}\end{aligned}$

所以 $$y^*=\frac{x}{16}\sin 2x-\frac{1}{8}x^2\cos 2x$$

故通解为：$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{x}{16}\sin 2x-\frac{x^2}{8}\cos 2x.$

（三）一容器由曲綫 $y=x^2-1$（$1\leqslant x\leqslant 7$）单位 cm）繞 y 軸旋轉所围成，其内盛滿一种液体，会从底部小孔流出，流出的速率为 $a\sqrt{3y}$ cm^3/秒，这里 y 是液面距离小孔的高度，a 是正常数。求液体全部流完所需的时間 T.



（第三题）

解 根据题意得：

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-a\sqrt{3y}}{\pi x^2}=\frac{-a\sqrt{3y}}{\pi(y+1)}$$

由此得 $$\int_0^T dt=-\frac{\pi}{a\sqrt{3}}\int_{48}^{0}\left(\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)dy$$

$$T=\frac{136\pi}{a}\ (秒)$$

（四）求边界值問題

$$\begin{cases}\triangle u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-r^2\sin 2\varphi\\ u\Big|_{r=1}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2}=0.\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 1<r<2.\end{cases}$$

的解 $u(r,\varphi)$

解 先找一个特解 v，为此，将方程改用直角坐标表出，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-r^2\sin 2\varphi=-2r^2\sin\varphi\cos\varphi=-2xy$$

$v_1=-\frac{1}{3}x^3y$ 显然是一个特解，$v_2=-\frac{1}{3}xy^3$ 显然是一个特解。

为对称起見，取 $v=\frac{1}{2}(v_1+v_2)=-\frac{1}{6}x^3y-\frac{1}{3}xy^3$

$$=-\frac{1}{6}(x^2+y^2)xy=-\frac{1}{6}r^2r\cos\varphi r\sin\varphi$$

$$=\frac{-r^4}{12}\sin 2\varphi.$$

特解 v 既已找到，可令：$u=v+w$

则有：$$\begin{cases}\triangle W=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial W}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}=0\\ W|_{r=1}=u|_{r=1}-V|_{r=1}=\dfrac{1}{12}\sin 2\varphi\\ W'|_{r=2}=u'_r|_{r=2}-V'_r|_{r=2}=\dfrac{32}{12}\sin 2\varphi\end{cases}$$

W問題的分离变量解为：$W=R(r)\cdot\Phi(\varphi)$.

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

$$R(r)=Cr^{m}+Dr^{-m}$$

由定解条件知。$A=0$，$m=2$

$$\therefore\quad W(r,\varphi)=(C'r^2+D'r^{-2})\sin 2\varphi$$

$$(C'=BC,\quad D'=BD)$$

代入边界条件得：

$$\begin{cases} W|_{r=1}=(C'+D')\sin 2\varphi=\dfrac{1}{12}\sin 2\varphi \\ W'_r|_{r=2}=\left(4C'-\dfrac{1}{4}D'\right)\sin 2\varphi=\dfrac{32}{12}\sin 2\varphi. \end{cases}$$

即：$\begin{cases} C'+D'=\dfrac{1}{12} \\ 4C'-\dfrac{1}{4}D'=\dfrac{32}{12}=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'+D'=\dfrac{1}{12} \\ 16C'-D'=\dfrac{128}{12}=\dfrac{32}{3}. \end{cases}$

解得$\begin{cases} C'=\dfrac{1}{17}\cdot\dfrac{128}{12} \\ D'=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{17}\cdot\dfrac{128}{12}=\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{117}{17}-\dfrac{128}{12}\cdot\dfrac{1}{17}=\dfrac{1}{17}\cdot\dfrac{111}{12} \end{cases}$

$$\therefore\quad u=-\frac{r^4}{12}\sin 2\varphi+(C'r^2+D'r^2)\sin 2\varphi$$

其中 C',D' 为上式值。

（五）設 a,b,c 是三維綫性空間的一組基。A 是这个空間的綫性变換。它使 $Aa=3a-2b+3c$

$$Ab=2a-2b+6c$$

$$Ac=-a+2b-c$$

√（1）写出 A 在基 a,b,c 下的矩陣 A.

（2）求出 A 的本征值和綫性无关的本征向量。

（3）給出可逆矩陣T和对角矩陣D，使得 $T^{-1}AT=D$。

解　（1）由

$$A\left\{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right\}$$

得：

$$A=\left[\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

（2）令

$$\left|\begin{array}{ccc} 3-\lambda & -2 & 3 \\ 2 & -2-\lambda & 6 \\ -1 & 2 & -1-\lambda \end{array}\right|=0$$

得：

$$(\lambda+4)(\lambda-2)^2=0$$

解得：

$$\lambda_1=-4,\ \lambda_2=\lambda_3=2$$

将 $\lambda=-4$ **代入方程**

$$\left\{\begin{array}{l} (3-\lambda)x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-(2+\lambda)x_2+6x_3=0 \\ -x_1+2x_2-(1+\lambda)x_3=0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

得：

$$\left\{\begin{array}{l} 7x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+6x_3=0 \\ -x_1+2x_2+3x_3=0 \end{array}\right.$$

該方程組的秩为 2，故其基础解系只有一个向量可取为：

$$\left\{\begin{array}{c} \left|\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{array}\right| \\ \left|\begin{array}{cc} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{array}\right| \\ \left|\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{array}\right| \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} -6 \\ -12 \\ 6 \end{array}\right\}=-6\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right\}.$$

于是对应于 $\lambda=-4$ 的本征向量为：$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$

又将 $\lambda=2$ 代入方程（1）得 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+6x_3=0 \\ -x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$

該方程的秩为1，故其基础解系有两个向量，并可取为

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{Bmatrix} \text{与} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$$

于是对应于本征値 $\lambda=2$ 的綫性无关的本征向量为

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{与} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

（3）$\because$ 由三个特征向量組成的矩陣

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{滿足 } T^{-1}AT=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{与 } T^{-1}\neq 0$$

$$\therefore \quad T \text{及} D=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{合于所求}$$

§2. 化　学　型

（一）求与曲綫 $4x^2+9y^2-8x+18y=59$ 相切且与直綫 $3x-2y=6$ 垂直的直綫方程。

解 $\because \quad 4x^2+9y^2-8x+18y=59 \qquad (1)$

故 $8x+18yy'-8+18y'=0$，即 $y'=\dfrac{8-8x}{18+18y}$

又$\because$ $3x-2y=6$ 的斜率为$\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ 所求直綫斜率为 $y'=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore$ $-\dfrac{2}{3}=\dfrac{8-8x}{18+18y}$ 整理得：$y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$. 代入(1)

得切点的坐标为：$\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-3 \end{cases}$

設所求直綫为 $y=-\dfrac{2}{3}x+b.$

当經过(4,1)点时，$b=\dfrac{11}{3}$. 所求方程为 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{3}$；

当經过(-2,-3)点时，$b=-\dfrac{13}{3}$ 所求方程为 $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{13}{3}$

（二）計算：

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{1-e^x}$

解 令 $e^x=u$. 則：$dx=\dfrac{1}{u}du$

$$原式=\int\frac{1}{u(1-u)}du$$

$$=\ln\left|\frac{u}{1-u}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{e^x}{1-e^x}\right|+C$$

2. 曲綫 $y=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}$ 与 $x=0$，$x=4$，$y=0$ 围成的曲边梯形繞 x 軸旋轉所成旋轉体体积。

解 $V=\int_0^4 \pi(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}dx$ 設 $\sqrt{1+\sqrt{x}}=u$，則：

$$dx=4u(u^2-1)du$$

$$V=\int_0^{\sqrt{3}}\pi 4u^2(u^2-1)du=4\pi\left[\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3\right]^{\sqrt{3}},$$

$$=4\pi\left(\frac{4}{5}\sqrt{3}+\frac{2}{15}\right)$$

（三）1. 已知：$x=-0.01$，$y=0.02$ 用全微分計算

$$\ln\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\sin y}$$

的近似值。

解 設 $f(x,y)=\ln\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\sin y}$　　$f(0,0)=0$

$$df(x,y)=\frac{\sec^2 x dx}{1+\operatorname{tg}x}+\frac{\cos y dy}{1-\sin y}$$

由 $f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)$ 当 $x_0=0$，$y_0=0$，$dx=-0.01$，$dy=0.02$ 时

$$f(x,y)=\ln\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\sin y}=f(0,0)+\frac{\sec^2 0\times(-0.01)}{1+\operatorname{tg}0}$$

$$+\frac{\cos 0\times(0.02)}{1-\sin 0}=0-0.01+0.02=0.01.$$

2. 求 $y=\int_0^x(1+t)\operatorname{arc\,tg}t\,dt$ 的极小值

解 $y'=(1+x)\operatorname{arc\,tg}x$

令 $(1+x)\operatorname{arc\,tg}x=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=0$