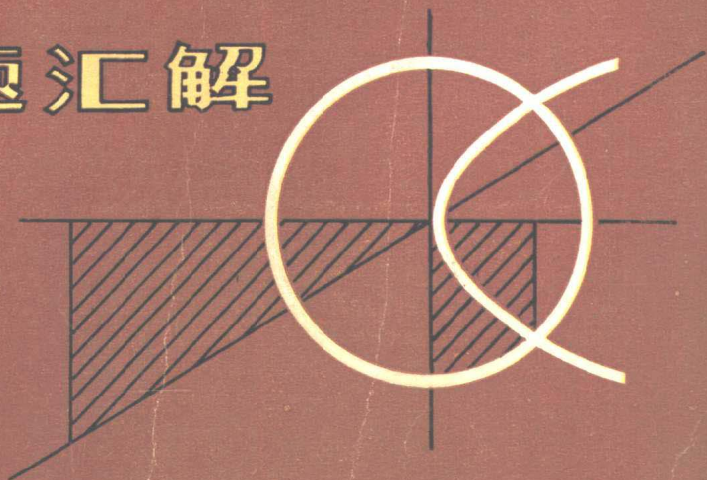


研究生入学数学 试题汇解



YANJIUSHENG

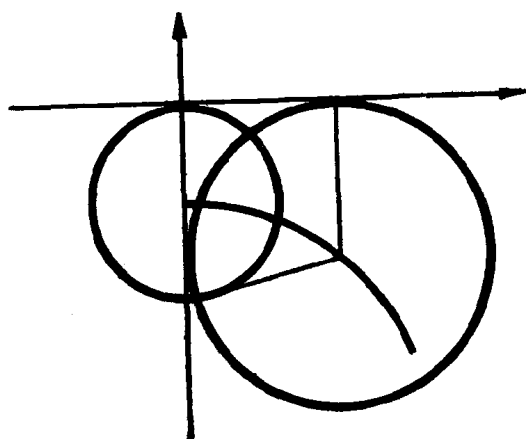
RUXUESHUXUE

SHITI HUIJIE



吴延奎 李玉明 编
梁绍森 许义生 主审
安徽人民出版社

研究生入学数学试题汇解



吴继轰 李玉明 编
梁昆森 许义生 主审

安徽人民出版社

封面設計： 肖 英

研 究 生 入 學 數 學 試 題 匯 解

吳繼轟 李玉明 編
梁昆森 許義生 主審

*

安 徽 人 民 大 學 社 出 版

(合肥市跃进路1号)

安 徽 省 兵 事 書 店 發 行

安 徽 新 華 印 刷 廠 印 刷

*

開本787×1092 1/32 印張 19 字數418,000

1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷

印數1—29,000

統一書號：13102·66 定價：1.95 元

前 言

本書选編了近年来全国高等院校、科研单位招收研究生的数学入学試題。为了顧及理工科各专业讀者的需要，汇集的試題类型力求广泛多样。

全書所选試題注重于考查基本概念和基本理論的掌握，涉及的内容包括数学分析、复变函数、解析几何、高等代数、数理方程等。本書可供綜合复习大学数学課程和报考研究生复习参考之用。

收入本書的試題，逐題作了解答，以利于訓練讀者严密的邏輯論証能力和提高綜合解題技巧。但限于編者水平，時間仓促，解答难免有誤，仅供参考。

由于条件限制，有些院校的試題未能收集到。所选試題还有部分属于抄件，其中如有錯漏之处，敬請批評指正。

本書承蒙南京大学梁昆森教授、安徽大学数学系主任許义生教授审訂。林声仓、徐昶、焦长春、肖少杰同志参加校核。寶本良同志繪制了全部插图。編选过程中还得到南京大学数学系有关同志的热情支持，并承中国科学技术大学排版，在此一并致謝。

編 者

1980年10月于合肥

目 录

一、中国科学技术大学	(1)
§ 1. 物理型	(1)
§ 2. 化学型	(6)
§ 3. 大地电磁测探	(12)
二、清华大学	(21)
三、合肥工业大学	(29)
四、浙江大学	(39)
五、同济大学	(50)
六、西安交通大学	(56)
七、西南交通大学	(63)
八、北方交通大学	(70)
九、天津大学	(78)
十、上海工业大学	(84)
十一、吉林工业大学	(93)
十二、西北工业大学	(98)
十三、上海科技大学	(104)
十四、北京工业学院	(110)
十五、南京工学院	(116)
十六、华南工学院	(123)
十七、大连工学院	(129)
十八、东北工学院	(138)
十九、昆明工学院	(149)

二十、太原工学院	(159)
二一、北京航空学院	(168)
二二、南京航空学院	(175)
二三、北京钢铁学院	(182)
§ 1. 工科类型	(182)
§ 2. 理科类型	(186)
二四、武汉钢铁学院	(189)
二五、华东工程学院	(197)
二六、西北电讯工程学院	(205)
二七、成都电讯工程学院	(215)
二八、中国人民解放军通讯工程学院	(222)
二九、上海纺织工业学院	(232)
三十、北京邮电学院	(238)
§ 1. 应用数学专业	(238)
§ 2. 非数学专业	(246)
三一、上海海运学院	(254)
三二、上海铁道学院	(261)
三三、西安冶金建筑学院	(268)
三四、石油化工科学研究学院	(274)
三五、北京化工学院	(284)
三六、华东石油学院	(291)
三七、中南矿冶学院	(297)
三八、中国矿业学院北京研究生部	(302)
三九、华北电力学院北京研究生部	(308)
四十、华北水利水电学院北京研究生部	(316)
四一、长春地质学院	(323)
四二、武汉地质学院北京研究生部	(328)

§ 1. 通用各专业	(328)
§ 2. 磁法勘探专业	(333)
四三、北京体育学院	(340)
四四、上海交通大学	(346)
§ 1. 高等数学	(346)
§ 2. 解析几何	(352)
§ 3. 线性代数	(359)
§ 4. 数学分析	(368)
四五、西北农学院	(376)
四六、上海机械学院	(386)
四七、陕西机械学院	(393)
四八、东北重型机械学院	(399)
四九、西安公路学院	(405)
五十、北京大学	(419)
§ 1. 数学分析专业	(419)
§ 2. 固体物理、加速器物理、激光物理、 实验核物理、电子物理、波谱及量子 电子学、核物理专业	(425)
§ 3. 力学系	(430)
§ 4. 地球物理、大气物理、气象学、空间物 理、天体物理等专业	(436)
§ 5. 地理专业	(442)
五一、中国人民大学	(447)
五二、北京师范学院	(454)
§ 1. 数学分析	(454)
§ 2. 理论物理专业	(460)
五三、北京师范大学	(466)

§ 1. 光学光谱专业、分子天文学、天体力学、 现代化教育技术专业	(466)
§ 2. 数学分析专业	(471)
五四、江苏师范学院	(480)
物理、化学专业	(480)
五五、西北大学	(486)
五六、兰州大学	(491)
§ 1. 数学分析	(491)
§ 2. 数学分析	(500)
§ 3. 高等数学	(503)
§ 4. 物理有机化学方向及理化学专业	(507)
五七、复旦大学	(512)
§ 1. 固体、流体力学	(512)
§ 2. 表面物理与半导体物理专业、半导体 微电子学专业、无线电电子学专业、 激光物理专业、激光化学专业、气体 放电专业、生物物理专业	(523)
五八、厦门大学	(529)
§ 1. 数学、控制理论等专业	(529)
§ 2. 半导体物理专业	(535)
五九、山东大学	(541)
§ 1. 数学分析	(541)
§ 2. 物理、电子、光学类	(546)
六十、四川大学	(552)
§ 1. 数学分析	(552)
§ 2. 半导体物理、固体物理专业	(560)
§ 3. 物质结构、结构化学、有机化学、	

激光化学专业	(565)
六一、南京大学	(570)
§ 1. 生理声学、核物理专业	(570)
§ 2. 数学专业高等数学	(577)
§ 3. 数学专业实变函数与复变函数	(581)
§ 4. 数学专业微分方程与微分几何	(588)

一、中国科学技术大学

§ 1. 物 理 型

(一) 計算下列积分:

1. 求 $I = \int_0^1 x f(x) dx$, 其中 $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$.

解 $I = \int_0^1 x \left[\int_1^{x^2} e^{-t^2} dt \right] dx$, 交换二重积分的次序得:

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^1 e^{-t^2} dt \int_0^{\sqrt{t}} x dx \\ &= - \int_0^1 \frac{1}{2} t e^{-t^2} dt = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \end{aligned}$$

2. 求 $I = \iint_S y^2 x dy dz + z^2 y dz dx + x^2 z dx dy$, S 是曲面

$x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 的外侧。

解 应用高斯定理, 得:

$$I = \iiint (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

令

$$z = w + a \quad dz = dw$$

所以 $I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (r^2 + 2ar \cos \varphi + a^2) r^2 \sin \varphi dr$

$$= 2\pi \int_0^\pi \left(\frac{8a^5}{15} \sin \varphi + \frac{a^5}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right) d\varphi$$

$$= \frac{32\pi a^5}{15}$$

(二) 求微分方程: $y'' + 4y = x \sin 2x$ 的通解。

解 其特征方程: $r^2 + 4 = 0$ 得: $r = \pm 2i$

所以 $y^* = x[(ax+b) \cos 2x + (cx+d) \sin 2x]$

代入原方程, 得:

$$\begin{aligned} (2c-8ax-4b) \sin 2x + (2a+8cx+4d) \cos 2x - \\ -4(ax^2+bx) \cos 2x - 4(cx^2+dx) \sin 2x + \\ +4(cx^2+dx) \sin 2x + 4(ax^2+bx) \cos 2x = x \sin 2x \end{aligned}$$

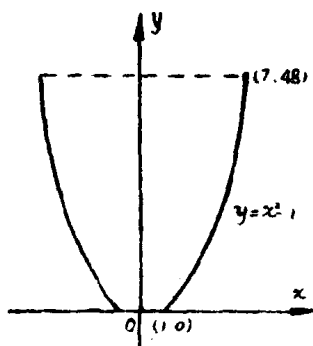
比較其系数得:

$$\begin{cases} -8a=1 \\ 2c-4b=0 \\ 8c=0 \\ 2a+4d=0 \end{cases} \quad \text{解得:} \quad \begin{cases} a=-\frac{1}{8} \\ b=0 \\ c=0 \\ d=\frac{1}{10} \end{cases}$$

所以 $y^* = \frac{x}{16} \sin 2x - \frac{1}{8} x^2 \cos 2x$

故通解为: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{16} \sin 2x - \frac{x^2}{8} \cos 2x$.

(三) 一容器由曲线 $y = x^2 - 1$ ($1 \leq x \leq 7$) 单位 cm) 绕



(第三题)

y 轴旋转所围成, 其内盛满一种液体, 会从底部小孔流出, 流出的速率为 $a\sqrt{3y}$ cm³/秒, 这里 y 是液面距离小孔的高度, a 是正常数。求液体全部流完所需的时间 T 。

解 根据题意得:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-a\sqrt{3y}}{\pi x^2} = \frac{-a\sqrt{3y}}{\pi(y+1)}$$

由此得

$$\int_0^T dt = -\frac{\pi}{a\sqrt{3}} \int_{48}^0 \left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy$$

$$T = \frac{136\pi}{a} \quad (\text{秒})$$

(四) 求边界值問題

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -r^2 \sin 2\varphi \\ u|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=2} = 0. \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 1 < r < 2. \end{cases}$$

的解 $u(r, \varphi)$

解 先找一个特解 v , 为此, 将方程改用直角坐标表出,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -r^2 \sin 2\varphi = -2r^2 \sin \varphi \cos \varphi = -2xy$$

$v_1 = -\frac{1}{3}x^3y$ 显然是一个特解, $v_2 = -\frac{1}{3}xy^3$ 显然是一个特解。

为对称起见, 取 $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = -\frac{1}{6}x^3y - \frac{1}{3}xy^3$

$$= -\frac{1}{6}(x^2 + y^2)xy = -\frac{1}{6}r^2 r \cos \varphi r \sin \varphi$$

$$= -\frac{r^4}{12} \sin 2\varphi.$$

特解 v 既已找到, 可令: $u = v + w$

$$\text{則有: } \begin{cases} \Delta w = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0 \\ w|_{r=1} = u|_{r=1} - v|_{r=1} = \frac{1}{12} \sin 2\varphi \\ w'|_{r=2} = u'|_{r=2} - v'|_{r=2} = \frac{32}{12} \sin 2\varphi \end{cases}$$

W 問題的分離變量解為: $W = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$.

$$\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$R(r) = C r^m + D r^{-m}$$

由定解條件知. $A=0, m=2$

$$\begin{aligned} \therefore W(r, \varphi) &= (C' r^2 + D' r^{-2}) \sin 2\varphi \\ (C' &= BC, D' = BD) \end{aligned}$$

代入邊界條件得:

$$\begin{cases} W|_{r=1} = (C' + D') \sin 2\varphi = \frac{1}{12} \sin 2\varphi \\ W'_r|_{r=2} = \left(4C' - \frac{1}{4}D'\right) \sin 2\varphi = \frac{32}{12} \sin 2\varphi. \end{cases}$$

$$\text{即: } \begin{cases} C' + D' = \frac{1}{12} \\ 4C' - \frac{1}{4}D' = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C' + D' = \frac{1}{12} \\ 16C' - D' = \frac{128}{12} = \frac{32}{3}. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} C' = \frac{1}{17} \cdot \frac{128}{12} \\ D' = \frac{1}{12} - \frac{1}{17} \cdot \frac{128}{12} = \frac{1}{12} \cdot \frac{117}{17} - \frac{128}{12} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{17} \cdot \frac{111}{12} \end{cases}$$

$$\therefore u = -\frac{r^4}{12} \sin 2\varphi + (C' r^2 + D' r^{-2}) \sin 2\varphi$$

其中 C', D' 為上式值。

(五) 設 a, b, c 是三維綫性空間的一組基。 A 是這個空間的綫性變換。它使 $Aa = 3a - 2b + 3c$

$$Ab = 2a - 2b + 6c$$

$$Ac = -a + 2b - c$$

√ (1) 寫出 A 在基 a, b, c 下的矩陣 A 。

(2) 求出 A 的本征值和本征無關的本征向量。

(3) 給出可逆矩陣 T 和对角矩陣 D , 使得 $T^{-1}AT = D$.

解 (1) 由

$$A \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$$

得: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(2) 令 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 3 \\ 2 & -2-\lambda & 6 \\ -1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

得: $(\lambda+4)(\lambda-2)^2 = 0$

解得: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

将 $\lambda = -4$ 代入方程 $\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - (2+\lambda)x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - (1+\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$

得: $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

該方程組的秩为 2, 故其基础解系只有一个向量可取为:

$$\left\{ \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \\ 6 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \begin{Bmatrix} -6 \\ -12 \\ 6 \end{Bmatrix} = -6 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

于是对应于 $\lambda = -4$ 的本征向量为: $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$

又将 $\lambda = 2$ 代入方程 (1) 得 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

该方程的秩为 1, 故其基础解系有两个向量, 并可取为

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{Bmatrix} \text{ 与 } \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$$

于是对应于本征值 $\lambda = 2$ 的线性无关的本征向量为

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ 与 } \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

(3) $\because$ 由三个特征向量组成的矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ 满足 } T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 与 } T^{-1} \neq 0$$

$$\therefore T \text{ 及 } D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 合于所求}$$

§ 2. 化 学 型

(一) 求与曲线 $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y = 59$ 相切且与直线 $3x - 2y = 6$ 垂直的直线方程。

解 $\because 4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y = 59 \quad (1)$

故 $8x + 18yy' - 8 + 18y' = 0$, 即 $y' = \frac{8-8x}{18+18y}$

又 $\because 3x - 2y = 6$ 的斜率为 $\frac{3}{2}$

$\therefore$ 所求直线斜率为 $y' = -\frac{2}{3}$

$\therefore -\frac{2}{3} = \frac{8-8x}{18+18y}$ 整理得: $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$. 代入 (1)

得切点的坐标为: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -3 \end{cases}$

设所求直线为 $y = -\frac{2}{3}x + b$.

当经过 (4, 1) 点时, $b = \frac{11}{3}$. 所求方程为 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$,

当经过 (-2, -3) 点时, $b = -\frac{13}{3}$. 所求方程为 $y = -\frac{2}{3}x - \frac{13}{3}$

(二) 计算:

1. $\int \frac{dx}{1-e^x}$

解 令 $e^x = u$. 则: $dx = \frac{1}{u} du$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{u(1-u)} du \\ &= \ln \left| \frac{u}{1-u} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{e^x}{1-e^x} \right| + C \end{aligned}$$

2. 曲线 $y = (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}}$ 与 $x=0$, $x=4$, $y=0$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转所成旋转体体积。

解 $V = \int_0^4 \pi (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} dx$ 设 $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = u$, 则:

$$dx = 4u(u^2 - 1) du$$

$$V = \int_0^{\sqrt{3}} \pi 4u^2 (u^2 - 1) du = 4\pi \left[\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 \right]_{\sqrt{3}},$$

$$= 4\pi \left(\frac{4}{5} \sqrt{3} + \frac{2}{15} \right)$$

(三) 1. 已知: $x = -0.01$, $y = 0.02$ 用全微分计算

$$\ln \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \sin y}$$

的近似值。

解 设 $f(x, y) = \ln \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \sin y}$ $f(0, 0) = 0$

$$df(x, y) = \frac{\sec^2 x dx}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\cos y dy}{1 - \sin y}$$

由 $f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$ 当 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,
 $dx = -0.01$, $dy = 0.02$ 时

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \ln \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \sin y} = f(0, 0) + \frac{\sec^2 0 \times (-0.01)}{1 + \operatorname{tg} 0} \\ &\quad + \frac{\cos 0 \times (0.02)}{1 - \sin 0} = 0 - 0.01 + 0.02 = 0.01. \end{aligned}$$

2. 求 $y = \int_0^x (1+t) \operatorname{arc} \operatorname{tg} t dt$ 的极小值

解 $y' = (1+x) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

令 $(1+x) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = 0$, 得 $x_1 = -1$, $x_2 = 0$