

OLYMPIC

MATHEMATICS

帮你参加

小学版

数学奥林匹克

中国数学会普及工作委员会 编



OLYMPIC

MATHEMATICS

帮你参加

小学版

数学奥林匹克

中国数学会普及工作委员会 编



开明出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

帮你参加数学奥林匹克. 小学版/中国数学会普及工作委员会编. —
北京: 开明出版社, 2002. 8

ISBN 7-80133-570-8

I. 帮 … II. 中 III. 数学课—小学—教学参考资料
IV. G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 057389 号

策 划: 田 火

策划执行: 刘维维

装帧设计: 高 伟

责任编辑: 辛 洁

帮你参加数学奥林匹克 (小学版)

编著 中国数学会普及工作委员会

出版 开明出版社 (北京海淀区西三环北路 19 号)

印刷 廊坊人民印刷厂

发行 新华书店北京发行所

开本 880×1230 毫米 1/32 印张 7.625 字数 150 千

版次 2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷

书号 ISBN-80133-570-8/G·500

印数 00001—20000 册

定价 10.00 元

致读者

同学们：

正如本书书名——帮你参加数学奥林匹克，这是一本帮助你参加“数学奥林匹克”竞赛的书。

小学数学竞赛自1991年拉开帷幕，每年春季举行一次，经过3年的实践，于1993年开始举办了内容、形式更丰富多彩的“总决赛”，即现在的“我爱数学少年夏令营”。今年恰好是“我爱数学少年夏令营”10周岁。

小学数学奥林匹克按小学数学大纲进行教学，不超前，不超纲，学有余力的同学都可以参加这一课外活动。通过开展小学数学竞赛、中学数学竞赛，发现和培养了一批数学特长生，并不断地为国家奥林匹克集训队输送人才。使我国在国际数学奥林匹克竞赛中一直保持领先地位。

奥林匹克数学活动的开展，不仅培养了一批特长生，还培养了一支在教学第一线上的骨干教师队伍，造就了一支优良的高级教练员队伍。这些高级教练员通过在第一线的教学、培训以及组织竞赛、参与命题，积累了大量的、丰富的、宝贵的经验和体会，也正是由于他们的辛勤耕耘，使他们在全国享有盛名。但由于方方面面的条件所限，能够真正聆听他们讲课的人非常有限。为了满足广大读者的愿望与要求，我们组织了一批从事小学数学集训的专家和高级教练，尽量把他们的“绝活”写下来，献给那些对数学有兴趣、有热情、学有余力的同学，给同学们创造一个与专家、高级教练“零距离”的机会。

编者

2002. 08.

MATHEMATICS OLYMPIC 

逻辑推理	刘 莹	119
展开想象的翅膀	夏兴国	134
在低起点上提高	余文熊	144
先别想着列方程	许也平	158
铺垫 练习 深化 调适	阮伟明	170
漫谈命题与解题	吴建平	184
自己动手编写竞赛题	程晓芳	199
浅析“粗心”	赵森清	210
解题以后多反思	徐 军	220
数学接力赛	吴建平	230

算得巧

朱小音

小学数学中，计算占有极为重要的位置，因为它是学习一切科学知识的基础。要想算得好，就要会心算，还要学习一些计算方法，在这里我们着重介绍使用分配律和巧算的方法，希望对同学们的计算有帮助。

一、运算律



例 1 计算 237×99 。

解

$$\begin{aligned} & 237 \times 99 \\ &= 237 \times (100 - 1) \\ &= 23700 - 237 \\ &= 23463. \end{aligned}$$



例 2 计算 $342 \frac{3}{7} \times \frac{7}{9}$ 。

解

$$\begin{aligned} & 342 \frac{3}{7} \times \frac{7}{9} \\ &= \left(342 + \frac{3}{7} \right) \times \frac{7}{9} \\ &= 342 \times \frac{7}{9} + \frac{3}{7} \times \frac{7}{9} \end{aligned}$$



$$= 266 + \frac{1}{3}$$

$$= 266 \frac{1}{3}$$

以上两个例子我们可以看到，有时候把乘法中的一个乘数拆成两个数的和或两个数的差，然后用分配律，能够使计算简单，便于心算。

例3 计算

$$71 \frac{1}{6} \times \frac{6}{7} + 61 \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} + 51 \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + 41 \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + 31 \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}。$$

分析 由上面例2的方法，我们可以把 $71 \frac{1}{6}$ 拆成 $70 + \frac{7}{6}$ ，同理 $61 \frac{1}{5} = 60 + \frac{6}{5}$ ， $51 \frac{1}{4} = 50 + \frac{5}{4}$ ，...

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 71 \frac{1}{6} \times \frac{6}{7} + 61 \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} + 51 \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + 41 \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \\ & + 31 \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\ & = \left(70 + \frac{7}{6}\right) \times \frac{6}{7} + \left(60 + \frac{6}{5}\right) \times \frac{5}{6} + \left(50 + \frac{5}{4}\right) \times \frac{4}{5} \\ & + \left(40 + \frac{4}{3}\right) \times \frac{3}{4} + \left(30 + \frac{3}{2}\right) \times \frac{2}{3} \\ & = 60 + 1 + 50 + 1 + 40 + 1 + 30 + 1 + 20 + 1 \\ & = 205 \end{aligned}$$

下面我们再来看几个另一种使用分配律的例子。

例4 计算 $22 \times 47 + 42 \times 53$ 。

分析 47 与 53 的和，是一个好计算的数，为了得到这

个好数，只需把 42 拆成为 22 与 20 的和。

$$\begin{aligned}
 &\text{解} \quad 22 \times 47 + 42 \times 53 \\
 &\quad = 22 \times 47 + (22 + 20) \times 53 \\
 &\quad = 22 \times 47 + 22 \times 53 + 20 \times 53 \\
 &\quad = 22 \times (47 + 53) + 20 \times 53 \\
 &\quad = 2200 + 1060 \\
 &\quad = 3260
 \end{aligned}$$

你能在 10 秒内说出 $62 \times 37 + 52 \times 63$ 的结果吗？

 **例 5** 计算 $4.4 \times 18 + 0.56 \times 165$ 。

分析 如果 4.4 能变成 0.44，那么我们就能得到 $0.44 + 0.56 = 1$ 这一好数，在乘法 4.4×18 中，4.4 缩小 10 倍，18 就应扩大 10 倍。

$$\begin{aligned}
 &\text{解} \quad 4.4 \times 18 + 0.56 \times 165 \\
 &\quad = 0.44 \times 180 + 0.56 \times 165 \\
 &\quad = 0.44 \times (15 + 165) + 0.56 \times 165 \\
 &\quad = 0.44 \times 15 + (0.44 \times 165 + 0.56 \times 165) \\
 &\quad = 6.6 + (0.44 + 0.56) \times 165 \\
 &\quad = 6.6 + 165 \\
 &\quad = 171.6。
 \end{aligned}$$

 **例 6** 计算 $41.2 \times 8.1 + 11 \times 9.25 + 537 \times 0.19$ 。

分析 先把 8.1 缩小 10 倍，与 0.19 凑成好数。

$$\begin{aligned}
 &\text{解} \quad 41.2 \times 8.1 + 11 \times 9.25 + 537 \times 0.19 \\
 &\quad = 412 \times 0.81 + 537 \times 0.19 + 11 \times 9.25 \\
 &\quad = 412 \times 0.81 + (412 + 125) \times 0.19 + 0.11 \times 925 \\
 &\quad = 412 \times 0.81 + 412 \times 0.19 + 125 \times 0.19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (125 + 800) \times 0.11 \\
 & = 412 \times (0.81 + 0.19) + 125 \times 0.19 + 125 \times 0.11 \\
 & \quad + 88 \\
 & = 412 + 125 \times (0.19 + 0.11) + 88 \\
 & = 500 + 37.5 \\
 & = 537.5
 \end{aligned}$$

利用分配律来计算，有时可以让每一步的计算数字简单，从而便于心算，达到减少错误，提高速度的目的。

 **例 7** 计算 $67 \div 7.5 + 3.8 \div 2.5 \div 0.3$ 。

分析 某数除以 7.5，可以看成为先除以 2.5，再除以 3。

解

$$\begin{aligned}
 & 67 \div 7.5 + 3.8 \div 2.5 \div 0.3 \\
 & = 67 \div 7.5 + 38 \div (2.5 \times 3) \\
 & = 67 \div 7.5 + 38 \div 7.5 \\
 & = (67 + 38) \div 7.5 \\
 & = 105 \div 7.5 \\
 & = 14。
 \end{aligned}$$

 **例 8** 计算

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)。$$

分析 注意到几个分数多次出现，我们把第一个括号里的 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ 看成是一个数 a ，把第二个括号的和看成是 b ，那么第三个括号里是 $1 + b$ ，第四个括号就是 a 。

解 设 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = a$ ， $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = b$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (1+a) \times b - (1+b) \times a \\
 &= b + a \times b - a - a \times b \\
 &= b - a \\
 &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{1}{7}
 \end{aligned}$$

把一个算式作为整体来处理，是数学中的换元思想。

二、拆与合

除了上面介绍的利用分配律巧算外，还有其他的巧算方法，现介绍几例：

 **例 1** 计算 $1994 + 1993 + 1992 - 1991 - 1990 - 1989 + \cdots + 8 + 7 + 6 - 5 - 4 - 3 + 2 + 1$ 。

分析 本题有多种计算方法，注意到，从前面数，每六个数的计算结果都是 9，共有

$$(1994 - 2) \div 6 = 332 (\text{组})$$

多 2 个。

解
$$\begin{aligned} \text{原式} &= 9 \times (1994 - 2) \div 6 + (2 + 1) \\ &= 2991. \end{aligned}$$

 **例 2** 计算 $(1234567 + 2345671 + 3456712 + 4567123 + 5671234 + 6712345 + 7123456) \div 7$ 。

分析 括号里的七个加数，都是由 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这七个数字组成，换句话说，这七个数的每一位也分别是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7。列出竖式是

帮你参加 >>>>>>>>>

$$\begin{array}{r}
 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\
 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 1 \\
 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 1\ 2 \\
 4\ 5\ 6\ 7\ 1\ 2\ 3 \\
 5\ 6\ 7\ 1\ 2\ 3\ 4 \\
 6\ 7\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\
 +\ 7\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

如果不进位，每一位的和都是 28。

解 原式 = $(1111111 \times 28) \div 7$
 $= 1111111 \times 4$
 $= 4444444。$

 例 3 计算 $11111 \times 11111。$

解 列出竖式：

$$\begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 \times\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1
 \end{array}$$

$$11111 \times 11111 = 123454321$$

大家都知道，一个数乘以 11，可以把这个数借位相加，
 如 932×11 可写成

$$\begin{array}{r}
 9\ 3\ 2 \\
 +\ 9\ 3\ 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

那么，一个数乘以由数字 1 组成的多位数，就可以多次错位

相加。

注： 11111×11111 可记作 11111^2 。

练习题

根据例 3，猜出 111111111^2 的结果。



例 4 计算 3333×3334 。

分析 我们先来计算 33×34 和 333×334 。

$$33 \times 34 = 11 \times 3 \times 34$$

$$= 11 \times 102$$

$$= 1122$$

$$333 \times 334 = 111 \times 1002$$

$$= 111222$$

解

$$3333 \times 3334$$

$$= 1111 \times 3 \times 3334$$

$$= 1111 \times 10002$$

$$= 11112222$$

同学们，你们能猜出 $3333333333 \times 3333333334$ 的结果吗？

从简单的情况入手，找出规律，从而猜出复杂算式的结果，对小学的同学来说，也是一种行之有效的方法。



例 5 计算 $1111111111 \times 9999999999$ 。

解法一 $1111111111 \times 9999999999$

$$= 1111111111 \times (10000000000 - 1)$$

$$= 11111111110000000000 - 1111111111$$

$$= 111111111108888888889$$

解法二 找规律



$$11 \times 99 = 1089$$

$$111 \times 999 = 110889$$

$$1111 \times 9999 = 1110889$$

从而猜出结果。

尽管解法二的做法不严格，但对做填空题，显然要比解法一来得快，且不易算错。

练习题

计算 333333×666666 。

(使用两种方法)

 **例 6** 计算 $7142.85 \div 3.7 \div 2.7 \times 1.7 \times 0.7$ 。

分析 $\frac{1}{7}$ 的循环节 142857 有一个很有趣的性质：

$$142857 \times 2 = 285714$$

$$142857 \times 3 = 428571$$

$$142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285$$

$$142857 \times 6 = 857142$$

$$142857 \times 7 = 999999$$

所以有

$$714285 \times 7 = 999999 \times 5$$

两边缩小 1000 倍

$$7142.85 \times 0.7 = 999.999 \times 5$$

解 $7142.85 \div 3.7 \div 2.7 \times 1.7 \times 0.7$

$$= 5 \times 999.999 \div 3.7 \div 2.7 \times 1.7$$

$$= 5 \times 27 \times 37.037 \div 3.7 \div 2.7 \times 1.7$$



$$\begin{aligned}
 &= (27 \div 2.7) \times (37.037 \div 3.7) \times 5 \times 1.7 \\
 &= 10 \times 10.01 \times 8.5 \\
 &= 85 \times (10 + 0.01) \\
 &= 850.85.
 \end{aligned}$$

 **例 7** 计算 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}$ 。

分析 每一分数的分母，都是两个连续自然数的积，很容易把这些分数分别拆成两个分数的差：

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 \times 2} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

解

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100} \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\
 &= 1 - \frac{1}{100} \\
 &= \frac{99}{100}.
 \end{aligned}$$

练习题

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{99 \times 101}.$$

“牛吃草”问题

裘宗沪

17 世纪英国伟大的科学家牛顿写过一本《普遍算术》的书，书中提出了一个“牛吃草”问题，大意如下：

有三片牧场，场上的草长得一样密，而且长得一样快。

它们的面积分别是 $3\frac{1}{3}$ 亩、10 亩和 24 亩。12 头牛 4 星期吃完第一片牧场原有的和 4 星期内新长出来的草；21 头牛 9 星期吃完第二片牧场原有的和 9 星期内新长出来的草，问多少头牛 18 星期才能吃完第三片牧场原有的和 18 星期内新长出来的草？

这是一道很有趣的算术题目。乍一看，似乎很难解，现在来说说它的解法。

题目涉及三种数量：原有的草、新长出的草、牛吃掉的草。

题目中把原有的草与新长出的草混在一起，原有的草是一个固定的数量，而新长出的草与时间（长了几星期）有关系，因此这两种数量要分开计算。

计算草的量，总要有个计量单位，可是题目中并没有列出草的计量单位，怎么办？我们就给它设定一个。

数学奥林匹克

OLYMPIC

吃草总量 = 牛头数 $\times$ 星期数 $\times$ 一头牛每星期吃草量
根据这一计算公式，可以设定“一头牛每星期吃草量”作为草的计量单位。这是解题时非常必需的一步。

又为了下面计算简便，不妨假定牧场面积都按 $3\frac{1}{3}$ 亩作“单位”来计算。

$$10 = 3\frac{1}{3} \times 3, 21 \div 3 = 7$$

因此题目中第二个条件，可以改变为 7 头牛 9 星期吃完 $3\frac{1}{3}$ 亩草地上原有的和新长出来的草。

现在我们开始具体计算。

对 $3\frac{1}{3}$ 亩草地来说

$$\text{原有的草} + 9 \text{ 星期新长出的草} = 7 \times 9$$

$$\text{原有的草} + 4 \text{ 星期新长出的草} = 12 \times 4$$

由此可以得出，每星期新长出的草是

$$(7 \times 9 - 12 \times 4) \div (9 - 4) = 3$$

那么原有的草是

$$7 \times 9 - 3 \times 9 = 36 \text{ (或者 } 12 \times 4 - 3 \times 4)$$

至此，已分别计算出 $3\frac{1}{3}$ 亩草地上，原有的草和每星期新长出的草。

对第三片牧场来说，原有的草和 18 星期新长出草的总量是

$$(36 + 3 \times 18) \times \left(24 \div 3\frac{1}{3}\right) = 27 \times 24$$