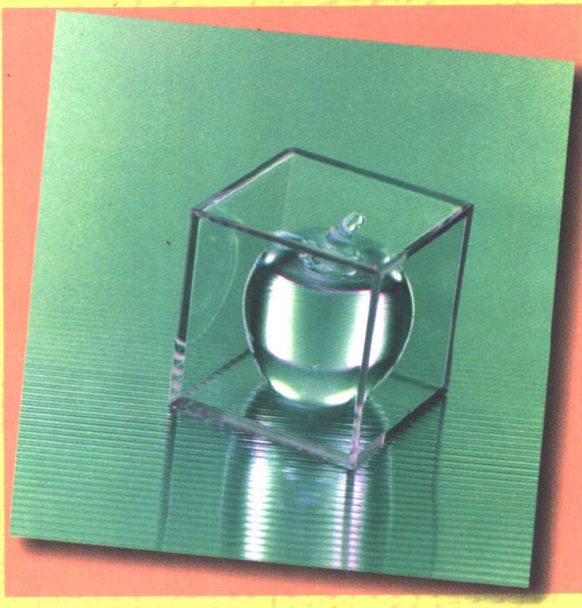
大学基础课学习辅导丛书

线性代数学习辅导

XIANXING DAISHU



XUEXI FUDAO

★ 主编 王庆成 王晓易

科学技术文献出版社

大学基础课学习辅导丛书

线性代数学习辅导

主　编　王庆成　王晓易

编　委　刘俊荣　张利凯　崔现伟

王岩华　王述珍　刘淑霞

马守荣

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北　京

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导/王庆成等主编.-北京:科学技术文献出版社,2002.8

(大学基础课学习辅导丛书)

ISBN 7-5023-4005-X

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010219 号

出　版　者:科学技术文献出版社

地　　　址:北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038

图书编务部电话:(010)68514027,(010)68537104(传真)

图书发行部电话:(010)68514035(传真),(010)68514009

邮 购 部 电 话:(010)68515381,(010)68515544-2172

网　　　址:http://www.stdph.com

E-mail:stdph@istic.ac.cn;stdph@public.sti.ac.cn

策 划 编 辑:王亚琪

责 任 编 辑:付秋玲

责 任 校 对:唐　炜

责 任 出 版:刘金来

发　行　者:科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销

印　刷　者:北京国马印刷厂

版 (印) 次:2002 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

开　　　本:850×1168　32 开

字　　　数:482 千

印　　　张:14.75

印　　　数:1~15000 册

定　　　价:15.00 元

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书是线性代数学习辅导书,内容包括行列式、矩阵、线性方程、二次型、线性空间、线性变换、欧氏空间,共七章。本书适用于非数学专业的理工科、经济类读者,同时对于参加硕士研究生考试的学生也是一本非常有价值的学习参考资料。

前　言

大学数学是工科、经济、农医类乃至部分文科类院校的公共基础课，线性代数是大学数学的重要组成部分。由于线性代数的内容概念纷杂，常常难以把握其中要领，所以在解这类习题时很多学生感到无从下手。

我们编写此书的目的是提供一本完整的、取材恰当的线性代数辅导书。由于是一本辅导性读物，所以在编写过程中我们对线性代数的基础部分进行了比较全面的论述，给出了主要的结论，由于篇幅限制而没有给出抽象、冗长的定理证明，读者如果有兴趣可以查阅相关文献。学好数学课程，做习题是必不可少的。通过做题可以加深对概念的理解，巩固从教材中学到的知识，掌握各种技巧。本书在编写习题及其解答部分时，笔者翻阅了大量的国内外资料、文献，收集了线性代数方面的各种典型的例题，并列出了详细解答过程，相信读者会从中受益匪浅。对于广大的理工科学生来说，相信该书能够成为他们的良师益友；对于青年研究者来说，该书也可以作为一份有益的参考资料。对普通高校非数学专业的学生参加各种形式的高等教育学习（考试），以及参加硕士研究生的入学考试均会有很大的帮助。

由于笔者水平有限以及编写的时间仓促，书中错误、疏漏之处在所难免，望广大的读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　行列式

※　知识网络图

- 行列式
  - 行列式的定义
    - 排列
    - 逆序数
    - 二阶行列式定义
    - 三阶行列式定义
    - n 阶行列式定义
  - 行列式的性质
    - 行列式六条基本性质
    - 行列式的展开定理
  - 行列式的计算　四种常见计算方法
  - 克莱姆法则

重点·难点·考点

本章重点在于利用行列式的定义和性质来计算行列式的值，其中四种常见计算方法的掌握是难点，需反复练习、掌握.

第一节　行列式的定义

一、基础知识导学

1. 由 n 个不同的自然数，按一定次序排列起来的有序数组称为一个 n 阶排列，通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

2. 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个逆序，一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数，用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为偶排列，否则称为奇排列.

3. 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

5. n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

其中 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 表示 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示对所有的 n 阶排列求和，所以 n 阶行列式共有 $n!$ 项，每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积，上面的 n 阶行列式又常记作 D, D_n，$|a_{ij}|$ 或 $|a_{ij}|_n$.

n 阶行列式还可以定义为

$$|a_{ij}| = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

或 $|a_{ij}| = \sum (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 也是一个 n 阶排列，求和 $\sum$ 是对所有不同行不同列的 n 个元素的乘积求和，在按定义计算行列式值时必须注意乘积项前面的符号，且不要漏掉项.

二、典型例题解析

例 1　计算 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解:像这种主对角线下方的元素全为零的行列式称为上三角形行列式,因为这种行列式有很多元素为零,所以展开式中有很多项为零,事实上除

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

这一项可能不等于零外,别的项全为零.这项各元素的列标组成自然序排列,故取正号,于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

类似地,一般的 n 阶上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上式的值等于其主对角线上各元素的乘积.

类似地,下三角形行列式(主对角线上方的元素全为零的行列式)和对角行列式(主对角线以外的元素全为零的行列式)的值也都等于主对角线上元素之积.

例 2　计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解:与例 1 同理,可知只有

$$a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}$$

这一项可能不等于零,而这项前的符号为$(-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 321]}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,故所求行列式等于$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$.

例 3 求函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2x & 3 \\ 5 & 1 & x & x \end{vmatrix}$$

的 x^4 与 x^3 的系数.

解:这里元素 $a_{11},a_{22},a_{33},a_{43},a_{44}$ 各含 x 的一次方幂,而其余元素全是常数.所以只有在上述 5 个元素中取 4 个相乘,才出现 x^4,又根据定义,行列式的每项的元素要取自不同行及不同列,这样,只有 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 这项含 x^4,且不难算出 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x^4$.其列标组成顺序排列,所以 x^4 的系数为 2.同理,只有在上述 5 个元素中取 3 个并与其余一个常数元素相乘的项,才出现 x^3,不难看出只有 $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 这一项符合要求,又$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-3x^3$,所以 x^3 的系数为 -3.

例 4 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{vmatrix}$

解:按第一行展开得

$$D=\begin{vmatrix}x_1&0&0&0\\1&x_2&0&0\\0&1&x_3&0\\0&0&1&x_4\end{vmatrix}+(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}1&x_1&0&0\\1&1&x_2&0\\1&0&1&x_3\\1&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=x_1x_2x_3x_4+D_2$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix}1&x_1&0&0\\1&1&x_2&0\\1&0&1&x_3\\1&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x_2&0\\0&1&x_3\\0&0&1\end{vmatrix}-x_1\begin{vmatrix}1&x_2&0\\1&1&x_3\\1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=1-x_1(1+x_2x_3-x_2)=1-x_1+x_1x_2-x_1x_2x_3,$$

所以　$D=1-x_1+x_1x_2-x_1x_2x_3+x_1x_2x_3x_4.$

三、同步自测训练

1. 下列的排列是自然次序 1,2,3,4,5,6,7,8,9 的重排,判定 i,k 使得

(1) 排列 $1,2,7,4,i,5,6,k,9$ 为偶排列.

(2) 排列 $1,i,2,5,k,4,8,9,7$ 为奇排列.

2. 排列 $n,n-1,\cdots,2,1$ 对自然数序 $1,2,\cdots,n$ 共有多少逆序?

3. 假设排列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 共有 I 个逆序,则排列 $\alpha_n,\alpha_{n-1},\cdots,\alpha_2,\alpha_1$ 共有多少个逆序?

4. 若把 $1,2,\cdots,n$ 视为原先的次序,并假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 有 I 个逆序,证明当视次序 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 为自然次序时,次序 $1,2,\cdots,n$ 的逆序也为 I 个.

5. 利用行列式的定义求值

$$\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\\\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4&\beta_5\\a_1&a_2&0&0&0\\b_1&b_2&0&0&0\\c_1&c_2&0&0&0\end{vmatrix}$$

6. 利用行列式的定义计算下列行列式展开式中 x^4 与 x^3 的系数.

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$$

7. 利用定义计算下列行列式的值

(1) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ 0 & 2 & a & \cdots & a\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$

四、自测训练答案

1. **解**:(1) 排列中缺元素 8 和 3,若 $i=3,k=8$,则有逆序 74,73,75,76,43,逆序数为 5,为奇排列,不符合要求.若 $i=8,k=3$,则有逆序 74,75,76,73,43,85,86,83,53,63,逆序数为 10,为偶排列.符合题意,故而 $i=8,k=3$.

(2) 排列中缺元素 3 和 6,若 $i=6,k=3$,则有逆序 62,65,63,64,53,54,87,97,逆序数为 8,为偶排列,不符合要求.若 $i=3,k=6$,则有逆序 32,54,64,87,97,逆序数为 5,为奇排列,符合题意.故而 $i=3,k=6$.

2. **解**:$\tau[n(n-1)\cdots 21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1)$

$$=C_n^2.$$

3. **解**:由例 2 类似可知排列 $\alpha_n,\alpha_{n-1},\cdots\alpha_1$ 对序列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 共有 C_n^2 个

逆序.又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 共有 I 个逆序,故而

$$\tau(\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_1)=C_n^2-I$$

4. **证明** 只需考虑一对元素,不失一般性,考虑首两个数 α_1,α_2,若对自然次序 1,2,$\alpha_1\alpha_2$ 为逆序,则对自然次序 α_1,α_2,12 也为逆序.反之亦然.同理,对数对 α_i,α_k 和 i,k,其关系亦然.由此易知结论成立.

5. **解**:由行列式的定义,每一乘积项都是由不同行不同列的 n 个元素相乘而得,本题中,我们发现每一乘积项中都包含 0 元素,故而行列式的值为 0.

6. **解**:展开式中 x^4 项为 $(-1)^{\tau(1234)}2x\cdot x\cdot x\cdot x=2x^4$,系数为 2,含 x^3 的项为 $(-1)^{\tau(2134)}x\cdot 1\cdot x\cdot x=-x^3$,系数为 -1.

7. **解**:(1) 原式 $=(-1)^{\tau(12\cdots n)}1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n=n!$

(2) 原式 $=(-1)^{(n,n-1,\cdots 1)}1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(3) 原式 $=(-1)^{\tau(1,2,\cdots n)}1\cdot 2\cdots n+0+0\cdots+0=n!$

第二节 行列式的性质

一、基础知识导学

1. 行列式 D 的值与它的转置行列式 D' 的值相等,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 互换行列式的两行(列),行列式变号.

3. 行列式中某一行(列)所有元素都乘以 k,等于用 k 乘以此行列式,即行列式中某一行(列)的公因子 k 可以提到行列式的外面.

注意:如果 n 阶行列式中所有 n^2 个元素有公因子 k,则可以提出 n 个 k,即

$$\begin{vmatrix} k_{a_{11}} & k_{a_{12}} & \cdots & k_{a_{1n}} \\ k_{a_{21}} & k_{a_{22}} & \cdots & k_{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{a_{n1}} & k_{a_{n2}} & \cdots & k_{a_{nn}} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例.则此行列式的值等于零.

5. 若行列式中的某一行(列)的元素都是两数之和,如 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$,则这个行列式 D 就等于两个同阶行列式 D_1 与 D_2 之和,其中 D_1 的第 i 行元素为 $b_{i1},b_{i2},\cdots b_{in}$,$D_2$ 的第 i 行元素为 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$. D_1 与 D_2 中其他各行的元素与 D 相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意:如果行列式 $|a_{ij}|$ 中每一个元素 a_{ij} 都是两个数之和,如 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则一般说来 $|a_{ij}|\neq|b_{ij}|+|c_{ij}|$,例如

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2+3 \\ 3+4 & 4+5 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

6. 把行列式的某一行(列)的 k 倍加到另外一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

此性质对于简化行列式很重要,所以在计算高阶行列式时常常用到,但利用此性质时必须注意:

(1) 某一行(列)元素的 k 倍只能加到"另"一行(列)上,不可加到本行(列)上.

(2) 在一次变换完成后才可以进行第二次变换,切不可将第 i 行的 k 倍加到第 j 行,同时将原第 j 行的 λ 倍加到第 i 行.

7. 行列式的展开定理

将行列式 $D=|a_{ij}|$ 按行(列)展开的形式分别为

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases},$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases},$$

其中 A_{ij} 是行列式 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式,如下定义,在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列,由剩下的元素按原来的排法,构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}.

令

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

在运用展开定理时,常常是按非零元素少的那一行(列)展开,另外在计算 A_{ij} 时不要漏掉因子 $(-1)^{i+j}$.

二、典型例题解析

例 1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 7 & 3 \\ -4 & -5 & -7 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

解:这个行列式有一特点:第 i 行第 j 列的元素正好与第 j 行第 i 列的元素反号,即 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,5)$.具有这一特点的行列式称为反对称行列式.

将行列式的行列互换,再提出每行的公因子 -1:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^5D=-D$$

移项得 $2D=0$,所以 $D=0$.

一般地,奇数阶反对称行列式的值等于零.

例 2 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=d$

求 $\begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix}$

解:先提出各行的公因子,再将第 1,3 行互换:

$$\begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot(-1)\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$=-6\cdot(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=6d$$

例 3 计算行列式