

微积分在经济管理中的应用

蔡异欣 温惠林 张晓圃

Wei jifen

中国商业出版社

微积分在经济管理中的应用

蔡异欣 温惠林 张晓圃 编著

•
中国商业出版社出版
新华书店首都发行所发行
北京财贸学院印刷厂印刷

•
787×1092 毫米32开 6.5 印张 140 千字
1989年11月第1版 1989年11月第一次印刷
印数1-3000册 定价 2.80 元
ISBN7-5044-0239-7/F.154

前 言

在经济工作的研究中,运用数学方法进行定量分析,对于搞好经济管理工作,提高经济效益,具有非常重要的作用。近年来,作为线性代数、概率论两门数学的应用,诸如投入产出、线性规划、数理统计等方面的内容,各层次的议论和著作颇多,无疑使读者受益非浅。但微积分如何在经济中应用的议论,与前两门数学相比,有较大差距,致使一些经济院校的在校生不了解微积分在经济活动分析研究中的作用。为了适应广大经济工作者及经济院校学生学习的需要,提高他们运用数学方法分析和处理一些经济现象的能力,因此编写了这本书。

本书是为具有大学一年级数学基础或具有同等水平的实际经济工作者编写的,因此不涉及具体数学的概念、公式的讲解和推导,同时也没象西方数理经济学那样,按经济学的系统将数学系统打乱,而是按照数学的讲授顺序,进行编写,这对读者阅读似乎会更感方便些。

一些经济数学模型和经济函数的建立,不仅要涉及到相当广泛的经济学概念,而且还要结合不同的时间、地点等诸多的复杂因素对经济问题的制约来进行综合分析讨论。因此,经济问题是一个颇为复杂的问题,为了避免抛开数学用大量篇幅讲经济学,所以对一些经济数学模型和经济函数的建立未作深入讨论,只是对它们尽可能做到解释清楚。本书是向读者说明,在经济研究中,微积分的应用的广泛性,特别着重讲述了这些数学概念的经济含意是什么,并且通过相

当数量的具体例题及其解答，告诉读者如何用这些数学概念去分析经济现象。希望为读者在学习和研究经济问题时，起到引导的作用。因此，希望读者在阅读本书时，要着重掌握分析问题和解决问题的方法，对具体的经济函数，必须从各自的实际情况出发，万不可原样照搬。由于前后有密切联系，请读者在阅读时要首尾相顾，前后贯通。另外，一些经济活动本不是连续的，我们只不过是用一些连续函数来近似模拟这些经济现象，借以用数学方法去解决这些经济问题。

本书经北京财贸学院数学教研室主任封长安副教授审读。

本书可供普通经济院校、成人经济高校的学生、教师以及经济管理工作者参考之用。编者水平有限，错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编 者

1989年3月

于北京财贸学院

目 录

第一章 导数在经济中的应用	1
(一) 总成本、平均成本 和边际成本.....	1
(二) 总利润、边际利 润和最 大利润.....	11
(三) 需求函 数、边际需 求和需求弹性.....	20
(四) 最优订 购量 问题.....	27
(五) 最大税 收问 题.....	32
(六) 在其他 方面的 应用.....	37
第二章 不定积分在经济中的应用	44
(一) 由边际成本求总成本函 数.....	44
(二) 由边际收入求总收入函数和需 求 函数.....	49
(三) 由边际消费倾向和边际储蓄 倾向 求消 费 函 数.....	57
(四) 在其他方面的 应用.....	60
第三章 定积分在经济中的应用	65
(一) 在生产活动中分析和掌 握产 品总量.....	65
(二) 在生产活动中分析和控制 成本 总量.....	68
(三) 分析总收入的变化掌握获取最 大利 润的最 佳 产 量.....	70
(四) 由消费需求的增长掌握商品供应 总量 的 变 化	78

(五) 分析和计算资本价值.....	80
(六) 关于内部利率的分析.....	82
(七) 关于资本的常数折旧率.....	84
(八) 关于货币利率与股息率的分析.....	85
(九) 计算消费者剩余和生产者剩余.....	88
(十) 关于设备更新时间的最佳选择.....	99
(十一) 关于增添附加设备或附加人员的收 益分析.....	101
(十二) 在其他方面的应用.....	103

第四章 偏导数在经济中的应用107

(一) 边际成本.....	107
(二) 边际需求.....	109
(三) 偏弹性.....	115
(四) 边际生产率.....	124
(五) 线性齐次生产函数.....	128
(六) 等产量曲线.....	136
(七) 规模收入.....	145
(八) 效用函数.....	148
(九) 比较静态导数.....	152
(十) 最优化问题.....	157

第五章 微分方程在经济中的应用172

(一) 分析商品的市场价格与需求量之间的 函数关系.....	172
(二) 分析产量、收入、成本及利润之间的	

函数关系	176
(三) 关于国民收入、储蓄与投资关系问题	184
(四) 关于国民收入与国民债务问题	186
(五) 关于流动收入、流动消费和流动投资 问题	189
(六) 关于商品存贮过程中的基本衰减问题	191
(七) 在其他方面的应用	192

参 考 书 目

1. (美) JEAN E. WEBER 著
数学分析在企业管理与经济学中的应用(第三版)
 2. (挪威) Knut Sydsreter 著
经济数学分析教程
 3. (日) 冈 本哲治等编著
经济数学
 4. (美) ALPHA C. CHIANG 著
数理经济学的基本方法
 5. R. G. D. Allen 著数理经济学
-

第一章 导数在经济中的应用

(一) 总成本、平均成本和边际成本

要对经济与企业的经营管理进行数量分析,“边际”是个重要的概念,现以成本为例进行说明。

在设备不变的前提下,如果设产品的总成本是产量 x 的函数 $C = C(x)$,则称 $C(x)$ 为总成本函数,称 $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ 为平均成本(或单位成本),即 $\bar{C}(x)$ 表示由开始生产到产量为 x 时这段生产过程中,每增加一个单位产量,总成本平均增加的数量。

总成本函数 $C(x)$ 的导数

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

称为边际成本。

对于产量只取整数单位的产品而言,一个单位的变化则是最小的变化。现假设产品的数量是连续变化的,于是产品的单位可以无限细分,则边际成本

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

就是产量为 x 单位时的总成本的变化率。显然,它相当近似地表示,当已经生产了 x 个单位产品时,再增加一个单位产品,使总成本增加的数量。

平均成本 $\bar{C}(x)$ 的导数

$$\bar{C}'(x) = \left[\frac{C(x)}{x} \right]' = \frac{x C'(x) - C(x)}{x^2}$$

称为边际平均成本。

当 $\overline{C}'(x) = 0$ 时，即边际平均成本为零时，有

$$xC'(x) - C(x) = 0$$

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x} = \overline{C}(x)$$

因此，在边际成本等于平均成本的 x 值处有平均成本的极小值。

一般情况下总成本 $C(x)$ 等于固定成本 K_0 (常数)与可变成本 $K(x)$ 之和。即

$$C(x) = K_0 + K(x)$$

则平均成本为：

$$\overline{C}(x) = \frac{K_0}{x} + \frac{K(x)}{x}$$

而边际成本则为：

$$C'(x) = [K_0 + K(x)]' = K'(x)$$

显然，边际成本与固定成本无关。

其边际平均成本为

$$\begin{aligned}\overline{C}'(x) &= \left[\frac{K_0}{x} + \frac{K(x)}{x} \right]' \\ &= -\frac{K_0}{x^2} + \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2} \\ &= \frac{xK'(x) - K(x) - K_0}{x^2}\end{aligned}$$

如果可变成本 $K(x)$ 是由生产成本 $T(x)$ 与运输成本 $P(x)$ 组成。即

$$K(x) = T(x) + P(x)$$

于是

$$K'(x) = T'(x) + P'(x)$$

显然，边际成本 = 边际生产成本 + 边际运输成本。

例1. 求线性总成本函数 $C(x) = ax + b$ ($a > 0, b \geq 0$) 的平均成本，边际成本和边际平均成本，

解：平均成本： $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = a + \frac{b}{x}$

边际成本： $C'(x) = a$

边际平均成本： $\bar{C}'(x) = -\frac{b}{x^2}$

总成本和边际成本由直线来表示，而平均成本由等轴双曲线的第一象限分支来表示，此双曲线具有水平渐近线 $C'(x) = a$ 。因此平均成本是产品单位数(件数)的递减函数，它没有极小值，但随产品单位数的增加而趋近边际成本 a (如图1-1)

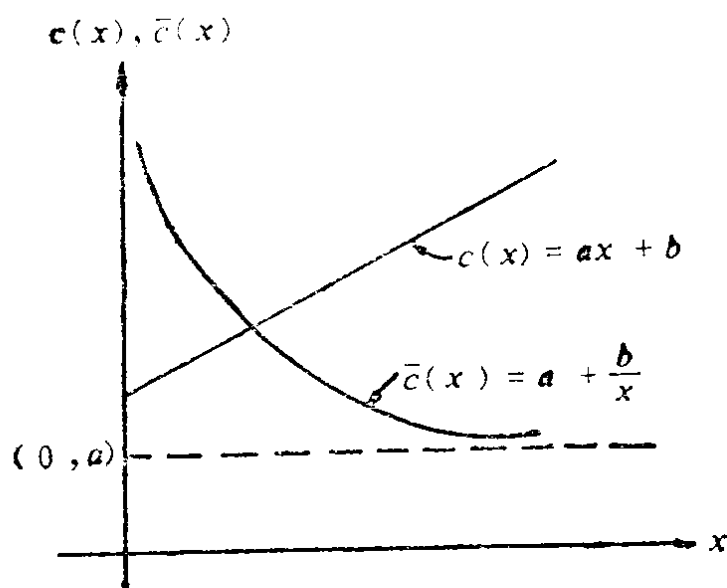


图 1 - 1

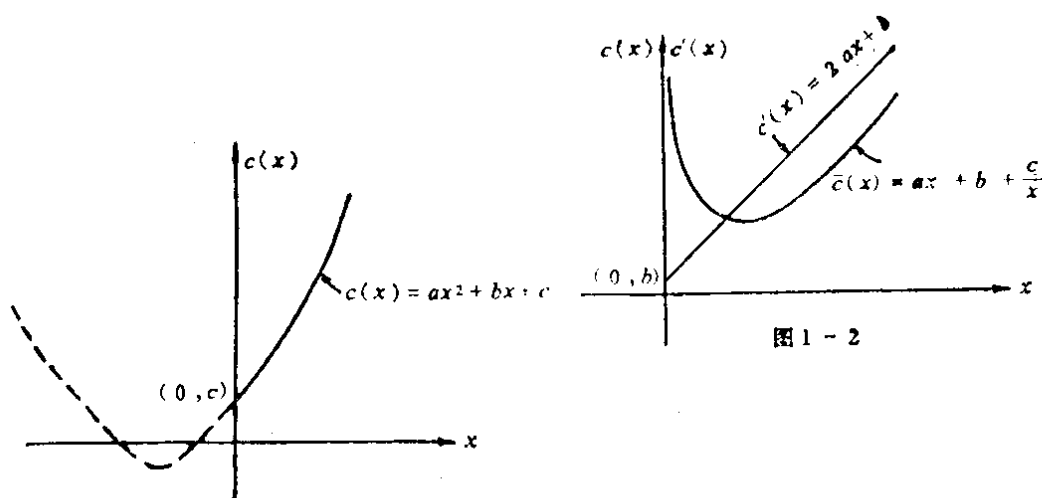
例2. 求二次总成本函数 $C(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0, b \geq 0, c \geq 0$) 的平均成本，边际成本和边际平均成本。

解： 平均成本： $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = ax + b + \frac{c}{x}$

边际成本： $C'(x) = 2ax + b$

边际平均成本： $\overline{C}'(x) = a - \frac{c}{x^2}$

总成本由抛物线的第一象限部分来表示，平均成本由双曲线的第一分支来表示，而边际成本由直线来表示(如图1-2)



若 $\overline{C}'(x) = 0$ 则 $ax^2 - c = 0$, $x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$ (舍负)

又 $\overline{C}''(x) = \frac{2c}{x^3} > 0$, 因此在 $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$ 处平均成本有最小值。

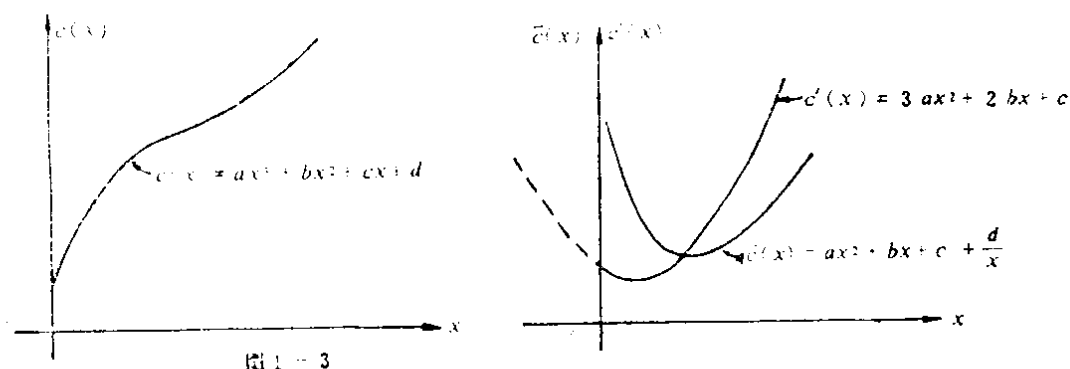
例3. 求三次总成本函数 $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0, b \leq 0, c \geq 0, d \geq 0, b^2 \leq 3ac$) 的平均成本、边际成本和边际平均成本。

解： 平均成本： $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$

边际成本: $C'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

边际平均成本: $\overline{C}'(x) = 2ax + b - \frac{d}{x^2}$

总成本由三次曲线的第一象限部分来表示, 平均成本由双曲线的第一象限分支来表示, 而边际成本由抛物线的第一象限部分来表示。(如图1-3)。



当总成本函数的凹性在指定区间内变化时, 三次成本函数常常是适用的。然而, 这样的函数在第一象限中必定不能有极大值或极小值。

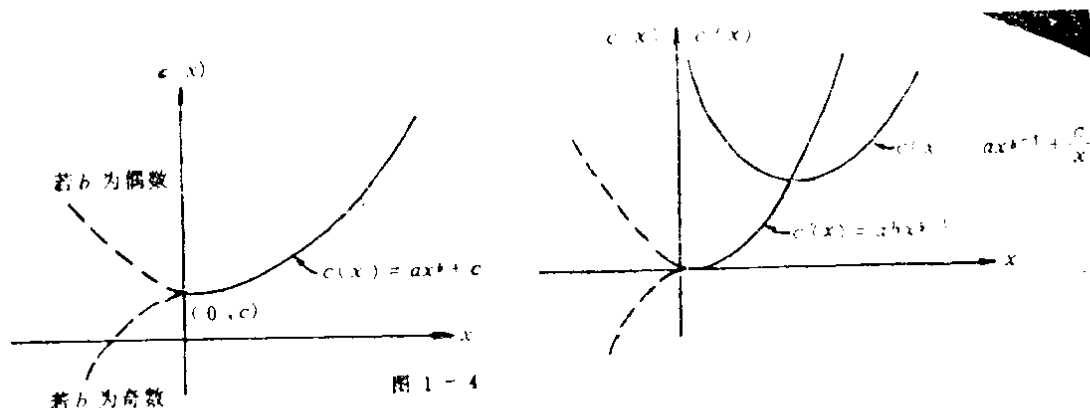
例4. 求高次多项式总成本函数 $C(x) = ax^b + c$ ($a > 0, b > 1, c \geq 0$) 的平均成本、边际成本和边际平均成本。

解: 平均成本: $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = ax^{b-1} + \frac{c}{x}$

边际成本: $C'(x) = abx^{b-1}$

边际平均成本: $\overline{C}'(x) = a(b-1)x^{b-2} - \frac{c}{x^2}$

总成本由代数曲线的第一象限部分来表示, 平均成本由双曲线的第一象限分支来表示, 而边际成本则由代数曲线的第一象限部分来表示(如图1-4)



这类简单的多项式曲线对于 $x \geq 0$ 总是向上凹的，因此在实际中通常只适合于有限范围内的 x 值。

若 $\overline{C}'(x) = 0$ ，则 $a(b-1)x^{b-1} - c = 0$

$$\therefore x = \left[\frac{c}{a(b-1)} \right]^{\frac{1}{b-1}}$$

又 $\overline{C}''(x) = a(b-1)(b-2)x^{b-2} + \frac{2c}{x^3} > 0$ ，因此，在 $x = \left[\frac{c}{a(b-1)} \right]^{\frac{1}{b-1}}$ 处 $C(x)$ 有最小值

注意：当 $x = \left[\frac{c}{a(b-1)} \right]^{\frac{1}{b-1}}$ 时，平均成本与边际成本相等。

例5. 求指数总成本函数 $C(x) = ae^{bx}$ ($a > 0, b > 0$) 的平均成本，边际成本和边际平均成本。

解：平均成本：
$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{ae^{bx}}{x}$$

边际成本：
$$C'(x) = abe^{bx}$$

边际平均成本：
$$\begin{aligned} \overline{C}'(x) &= \frac{abxe^{bx} - ae^{bx}}{x^2} \\ &= \frac{ae^{bx}(bx - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

总成本由指数曲线的第一象限部分来表示、平均成本由指数双曲线的第一象限分支来表示，而边际成本则由指数曲线的第一象限来表示如图(1-5)。

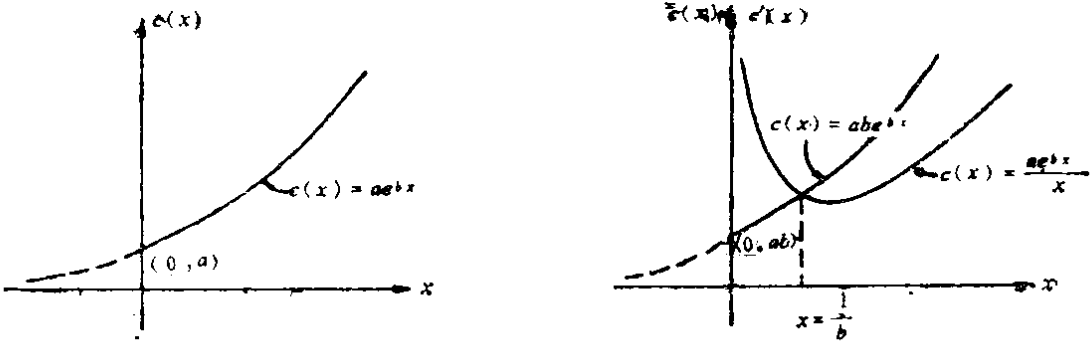


图 1-5

指数曲线和对数曲线对所有的 $x \geq 0$ ，不是向上凹的，就是向下凹的，因此，在实际中通常只适合于有限范围内的 x 值。

若 $\overline{C}'(x) = 0$ 则 $ae^{bx}(bx - 1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{b}$

又
$$\overline{C}''(x) = \frac{ae^{bx}(b^2x^2 - 2bx + 2)}{x^3}$$

而
$$\overline{C}''\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{ae(1 - 2 + 2)}{\frac{1}{b^3}} = ab^3e > 0$$

所以，在 $x = \frac{1}{b}$ 时， $\overline{C}(x)$ 有最小值。

注意：当 $x = \frac{1}{b}$ 时，平均成本与边际成本相等。

例6. 某厂生产某种产品，总成本 C 是产量 x 的函数：
 $C = C(x) = 200 + 4x + 0.05x^2$ (单位：元)。

(1) 指出固定成本、可变成本，

(2) 求边际成本函数及产量为 $x = 200$ 时的边际成本，并说明其经济意义；

(3) 如果国家对该厂征收固定税收，问固定税收对产品的边际成本是否会有影响？为什么？试举例说明之。

解：(1) 固定成本为200，可变成本为

$$4x + 0.05x^2,$$

(2) 边际成本函数为

$$\begin{aligned} C'(x) &= (200 + 4x + 0.05x^2)' \\ &= 4 + 0.1x \end{aligned}$$

$$C'(200) = 4 + 0.1 \times 200 = 24$$

当产量 $x = 200$ 时的边际成本为24，在经济上说明在产量为200单位的基础上，再增加一单位产品，总成本近似地要增加24元。

(3) 因国家对该厂征收的固定税收与产量 x 无关，这种固定税收可列入固定成本，因而对边际成本没有影响。例如国家征收的固定税收为100，则总成本为 $C(x) = (200 + 100) + 4x + 0.05x^2$ 边际成本函数为 $C'(x) = 4 + 0.1x$ 可见，征收固定税与没有征收固定税时，边际成本相同。

例7. 某厂日生产能力最高为1000吨，每日产品的总成本 c (单位：元) 是日产量 x (单位：吨) 的函数： $C = C(x) = 1000 + 7x + 50\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1000$)

求(1) 日产量为100吨时的总成本；

(2) 日产量为100吨时的平均单位成本；

(3) 日产量由100吨增至225吨时，总成本增加了多少？

(4) 日产量由100吨增至225吨时，总成本的平均变化

率:

(5) 日产量为100吨时的边际成本。

解: (1) 日产量为100吨时的总成本为:

$$C(100) = 1000 + 7 \times 100 + 50\sqrt{100} = 2200(\text{元})$$

(2) 日产量为100吨时的平均单位成本为

$$\frac{C(x)}{x} \Big|_{x=100} = \frac{2200}{100} = 22(\text{元/吨})$$

(3) 增加的总成本为:

$$\begin{aligned}\Delta C(x) &= C(225) - C(100) \\ &= 3325 - 2200 = 1125(\text{元})\end{aligned}$$

(4) 总成本的平均变化率为:

$$\frac{\Delta C(x)}{\Delta x} \Big|_{\substack{x=225 \\ \Delta x=125}} = \frac{1125}{125} = 9(\text{元/吨})$$

(5) 日产量为1000吨的边际成本为:

$$\begin{aligned}C'(x) &= 7 + \frac{25}{\sqrt{x}} \quad (0 \leq x \leq 100) \\ \therefore C'(100) &= 7 + \frac{25}{10} = 9.5(\text{元/吨})\end{aligned}$$

例8. 某工厂的生产成本函数是 $C(x) = 9000 + 40x + 0.001x^2$, 问欲达到最小平均成本, 该工厂应生产多少产品?

解: 设平均成本函数为 $\bar{C}(x)$

则
$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{9000}{x} + 40 + 0.001x$$

$$\bar{C}'(x) = -\frac{9000}{x^2} + 0.001$$

令
$$\bar{C}'(x) = 0 \quad \text{得 } x^2 = 9000000 \quad \therefore x = 3000$$

$$\text{又} \quad \overline{C}''(x) = \frac{18000}{x^3} \quad \overline{C}''(3000) > 0$$

所以, 当 $x = 3000$ 时, $\overline{C}(3000)$ 为最小平均成本

例9. 某工厂每月生产某产品 x 吨的成本函数为 $C =$

$C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 8x + 4900$ (元) 求最低平均成本。

解: 平均成本 $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{4}x + 8 + \frac{4900}{x}$

$$\overline{C}'(x) = \frac{1}{4} - \frac{4900}{x^2}$$

$$\text{令 } \overline{C}'(x) = 0 \quad \text{即 } x^2 - 19600 = 0 \quad \therefore x = 140$$

$$\text{又} \because \overline{C}''(x) = \frac{9800}{x^3} > 0 \quad \therefore \overline{C}(x) \text{ 有极小值 } \overline{C}(140) = 78$$

即每月产量为140吨时, 最低平均成本为78元/吨

例10. 设生产某产品每日固定成本为10000元, 可变成本与产品的产量 x (单位: 吨) 的立方成正比。又知当日产量为20吨时, 总成本为10040元, 问日产量为多少吨时, 才能使每吨成本最小?

解: 设总成本为 $C = C(x)$

$$\text{则} \quad C = C(x) = 10000 + Kx^3$$

$$\text{当} \quad x = 20 \text{ 时} \quad C = 10040$$

$$\text{即} \quad 10040 = 10000 + K \cdot 20^3 \quad \therefore K = \frac{1}{200}$$

$$\text{平均成本} \quad \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10000}{x} + \frac{x^2}{200}$$

$$\overline{C}'(x) = \frac{-10000}{x^2} + \frac{x}{100}$$

$$\text{令} \quad \overline{C}'(x) = 0 \quad \therefore x = 100$$