重庆出版社科学学术著作出版基金资助

变形体非协调理论

郭仲衡　梁浩云　编著

重庆出版社

● 郭仲衡　梁浩云　编著

● 重庆出版社出版

变形体非协调理论

责任编辑　夏树人
封面设计　王晓姗

郭仲衡　梁浩云编著
变形体非协调理论

重庆出版社出版、发行（重庆长江二路205号）
新 华 书 店 经 销　重庆印制一厂印刷
*
开本850×1168 1/32 印张 11.375 插页 4 字数 275 千
1989 年 2 月第一版　1989 年 2 月第一版第一次印刷
印数：1—1,750
*
ISBN 7-5366-0736-9/O·6
科技新书目188—267　定价：5.55元

献　　给

Kazuo Kondô（近藤一夫）

和

Ekkehart Kröner

《应用数学和力学》讲座丛书序

《应用数学和力学》编委会为了适应四化建设的需要，推动应用数学和力学方面的学术交流，自去年5月起在全国各地举办不定期的《应用数学和力学》讲座，由本刊编委同志义务分任主讲，讲授有关专题，介绍最新成就，深得各方同志支持和欢迎。1980年已举办讲座5期，今后将继续举办。由于场地、名额所限，希望能参加听讲而向隅的同志很多，纷纷提出要求。为此，特将讲座材料内容，编成丛书，陆续分册出版，以供读者。

长期以来，应用数学和力学是相辅相成的。晚近的发展更加如此。例如：由于人类生产活动的飞速发展，生产材料的日益更新，我们要处理比弹性、塑性，不可压缩流体，非粘性流体等更为复杂的介质，从而要研究有记忆性能的材料、有极化性质的材料和有非局部性质的材料等的力学性质。为了描述这些力学性质，人们就要求大量使用泛函分析和群论的方法。又例如：为了处理巨型的机械、特大的载荷和高速的运动，人们面对着大量的非线性问题。为了处理这些非线性问题，20年来，力学界开发了奇异摄动理论的研究。又例如：计算机的发展，提供了力学原理直接用于工程上复杂结构物强度计算的可能性，从而开创了近代的有限元理论，以及和有限元理论密切相关的广义变分原理。其它如嘉当张量之用于极化材料的分析，突变理论之用于处理稳定性问题，沃许函数之用于映象理论等，也无不如此。此外，随机过程和模糊数学等学科的发展，也正深刻地反映在力学原理处理真实生产问题的过程之中，从而使生产问题的处理更真实地反映

了现实。

《应用数学和力学》讲座和讲座丛书，将尽可能地反映这种日新月异的发展情况。

《应用数学和力学》编委会谨借丛书发行之际，向主讲的编委同志和编辑部的工作同志们致谢，由于他们的无私劳动和辛勤努力，讲座才能办成，丛书才得出版。

恳请读者不吝指教，对本丛书的任何意见，都将是对《应用数学和力学》编委会工作的支持和爱护。

钱伟长

1981年1月29日于北京清华园照澜院

序　言

1983年4—5月份，我曾在杭州由《应用数学和力学》编委会主办的第23期《应用数学和力学》讲座上主讲了与书名相同的系统讲座。梁浩云同志担任了该讲座的辅导工作。这本书是在当时的讲义基础上由梁浩云同志进行整理和补充而成的。由于时间仓促，挂一漏万在所难免，请读者指正。

郭仲衡

(Guo Zhong-heng)

1987年12月于北京大学

前　言

1901年 Weingarten 发表了关于任意闭回路上位移和转动的跳跃为恒量的著名定理。6年之后，Volterra 又提出两大类基本畸变（distortion）形式。这两事件为以后的位错理论，或更一般的缺陷理论奠定了基础。Volterra 是这样考虑的：将一个圆筒沿其母线切开，如果将第一个切面对另一个切面进行相对平移，我们就有 Volterra 第一类畸变，或叫位错（dislocation）。如果是相对转动，那就有第二类畸变，即向错（disclination）。也有个别作者提出叫做螺错（dispiration）的第三类畸变形式。关于螺错是否构成一种独立的畸变形式，尚有争议。在这里我们将不涉及它。

另一方面，金相学家们早就观察到在金属塑性区域内的滑移。许多理论家就用位错理论来解释塑性现象。冷加工和辐照等在金属中也会引起位错的出现。内应力问题也不能完全在经典理论范围内解决。经典理论的一个重要标志是变形的协调性，即每个物体点变形后在空间都有一个唯一确定的位置。如果对物体的假想微元施加任意变形，一般而言，若不再另加变形，我们不能将这些变形的微元重新拼合为一个变了形的物体整体。我们说，这种变形是非协调的。只有满足某些限制——“协调条件”，换言之，变形必须是协调的，变形后微元才能无缝地拼合起来。我们也可以类似地来想象内应力问题。如果将一个有内应力的物体分割成微元，这些微元就被释放为无应力状态。这些解放后的微元一般也不能无缝地拼合成一个处于自然状态（即各点应力为零）

的物体。

解决这种非协调问题，存在着众多的学派，他们间的结果有些也并不一致。这里只能选择性地讲述其中的某些，包括：线性的缺陷连续统理论，缺陷理论与非黎曼几何的对应，变形体非协调理论的理性理论和位错与向错的规范场理论。在介绍各种方法之前，都对所需的数学工具作一简单介绍，尽可能使叙述自成系统。

首先，我们将引进三种不同程度的非协调性使线性的连续统理论从经典弹性理论脱胎出来。讲述将采用绝对符号法。引进线、面、体δ-函数使得我们能用缺陷的连续统理论去处理孤立位错和缺陷。这是前五章的内容。在第六章我们简单介绍位错和向错的运动。

我们生活所在的是欧氏空间，所谓协调与不协调是相对这个空间而言的。是否可以超脱出这个空间而进入更一般的抽象空间，从另一个角度考虑问题呢？回答是肯定的。这时非协调性的矛盾就转化为选择具有适当性质的空间的矛盾，这些非欧空间所具有的曲率、挠率等等将可通过某种方法与刻划非协调性的种种缺陷度量建立对应关系。从50年代初期起，日本的近藤一夫，英国的 Bilby 和德国的 Kröner 等人就是这样创造性地把抽象的微分几何用于解决缺陷问题。Kröner 认为：“位错和内应力的一般理论惊人地和广义相对论相似，后者促进了微分几何的发展，使之具有今天的能简单地表示复杂关系的漂亮形式。但又不同于广义相对论，摆脱了人为的（speculative）结构，只依赖实在的基本法则。位错的连续统理论表明了，如何可以利用连络、Einstein 张量等概念来建立一个没有内在矛盾的物理理论。”个别作者则仍保留在欧氏空间的框架内，但采用非完整标架的办法。也有从下面这样一个现象得到启发而试图在高维空间解决问题的：停留在二维欧氏空间里，考虑薄板翘曲的问题是不可能的，因它翘曲

成为一个浸在三维欧氏空间里的曲面。在第七、八章我们将主要介绍非黎曼几何的有关内容和用非黎曼空间描述缺陷的方法。

从推广经典理论入手的第一种方法也好，用非黎曼几何的方法也好，都在于处理问题的几何——拓扑描述的方面。最后仍然假设缺陷度量例如非协调度或位错密度等为已知，然后按经典方法解决问题。

理性力学工作者试图将问题统一地考虑，使之构成一个完整的数学问题。从60年代中期起，Noll，C. C. Wang等人的工作已经显示，一旦关于物质的本构假设建立起来，附于物质流形的本构方程将完全确定了物质流形的几何结构。于是，几何结构是理论的自然结果，而不是作为理论的出发点的最初假设。当然，为了应用数学工具又添加了光滑性等一些局限，理论还有待进一步完善和发展。在第十章我们介绍一下这样的一个理论框架。由于整个讨论都是在物质流形上展开的，在第九章有必要介绍流形论的初步知识。

规范场理论在建立近代物理的基本粒子理论中获得了巨大的成功。位错理论与广义相对论的惊人相似启发人们用近代物理中规范场论的方法去处理位错和向错的问题。1978、1979年国内外相继发表了位错规范场理论的结果，到了1983年第一本关于位错和向错的规范场理论的专著问世了。缺陷的规范场理论是近几年才展开的方兴未艾的研究领域，在最后一章我们简单介绍有关结果以期引起读者的关注。

内 容 简 介

本书介绍线性的缺陷连续统理论、缺陷理论与非黎曼几何的对应、变形体非协调理论的理性理论和位错与向错的规范场理论，以期读者对变形体非协调理论的全貌有所了解，并为深入研究非协调问题打下初步的基础。本书体系严谨，叙述简明清晰，力求自成系统，可供应用数学和力学工作者和理工科大学师生学习参考。

本丛书原由四川人民出版社和四川科学技术 出 版 社 先后出版。自1985年4月起，本丛书由重庆出版社继续出版。

目　录

第一章 绝对符号法

在建立第一种缺陷理论时，我们将停留在三维欧氏空间内。自然界的运动法则以及所出现的几何量或物理量是与坐标系无关的，因此任何物理法则原则上必须用不依赖于坐标的量来表达。但是处理具体问题时，又总得引进一个比较方便的坐标系。这样一来物理法则的表达式中将夹杂了由具体坐标系所招致的与原来物理法则完全无关的东西。这在理论研究中有时会引起不必要的复杂化，甚至遮盖了所反映的物理实质。为了摆脱这种情况，不用坐标系的抽象记法（绝对符号法）具有很大的吸引力。它简单明晰，物理图象突出。只运用标量和向量的一些力学分支广泛应用这种方法。但是在出现比向量更复杂的物理量的力学分支里，单纯的抽象记法有时显得并不方便，而既采用坐标系又摆脱具体坐标系的影响的张量分量形式在运算过程中有时较为简单。两者的桥梁是并矢记法。我们将不固执地局限于同一种方法，但结果总是用绝对符号法表出。

§1.1 坐标系和求和约定

在三维欧氏空间 R^3 内我们将采用单一的笛氏（右手）坐标系 $\{O, x_i\}$，基向量为 $\mathbf{e}_i(i=1,2,3)$。任意向量 $\mathbf{u}$ 可以表达为这三个基向量的线性组合

$$\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3=u_i\mathbf{e}_i \qquad (1.1.1)$$

这里采用了 Einstein 求和约定：凡重复一次且仅一次的下标均

从 1 到 3 求和．重复的指标叫哑指标，可以任意代换．于是

$$\mathbf{x}=x_i\mathbf{e}_i$$

表示一点的位置向量。

§1.2 二阶张量的定义

二阶张量是一个线性算子，它把三维欧氏空间的任意一个向量变换成同一个空间的另一个向量：

$$\boldsymbol{\varphi}: R^3\to R^3.$$

$$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{a}=\mathbf{b},\quad \mathbf{a},\mathbf{b}\in R^3. \tag{1.2.1}$$

显然对二阶张量可以定义加法和数乘运算，因此全体二阶张量构成一个九维线性空间。

我们再引进**张量积**的概念。对于任意两个向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，我们称 $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的张量积，它是这样的一个二阶张量：对任意一个向量 $\mathbf{w}\in R^3$，由

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{w}=(\mathbf{v}\mathbf{w})\mathbf{u} \tag{1.2.2}$$

给出一个与 $\mathbf{u}$ 共线的向量，它表示对张量积中的第一个向量的放大或缩小。假设一个二阶张量 $\boldsymbol{\varphi}$ 对基向量 $\mathbf{e}_i$ 的作用为

$$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e}_i=\varphi_{ji}\mathbf{e}_j, \tag{1.2.3}$$

由于 $\boldsymbol{\varphi}$ 是线性变换，因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 对任一向量 $\mathbf{w}=w_i\mathbf{e}_i$ 的作用可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{w}&=\boldsymbol{\varphi}(w_i\mathbf{e}_i)=w_i(\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e}_i)=\varphi_{ji}w_i\mathbf{e}_j\\&=\varphi_{ji}(\mathbf{e}_i\mathbf{w})\mathbf{e}_j=\varphi_{ji}(\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i)\mathbf{w},\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

由 $\mathbf{w}$ 的任意性我们得到

$$\boldsymbol{\varphi}=\varphi_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j, \tag{1.2.5}$$

它表明任一个二阶张量都可以表成基向量 $\mathbf{e}_i$ 的张量积的线性组合．因此，基向量的张量积 $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$（九个二阶张量）构成了由全体二阶张量组成的九维线性空间的一组基．φ_{ij} 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基上