特勒根定理和网络

P. 小彭菲尔德　R. 斯彭斯　S. 杜因克尔 著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

特勒根定理是一个电路定理，单靠基尔霍夫定律就能把它推导出来，因此可以广泛地应用到多种网络上去。本书对特勒根定理作了详细的说明，还用它推导了许多已知的结果。本书可供从事电路工作的科技人员及大专院校的师生参考。

P. Penfield, Jr., R. Spence, S. Duinker
TELLEGEN'S THEOREM AND
ELECTRICAL NETWORKS
The M. I. T. Press, 1970

特勒根定理和网络

P. 小彭菲尔德
R. 斯 彭 斯 著
S. 杜 因 克 尔
肖 江 译

*

科 学 出 版 社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1976 年 12 月第 一 版　开本：787×1092 1/32
1976 年 12 月第一次印刷　印张：5
印数：0001—11,220　字数：108,000

统一书号：15031·137
本社书号：770·15—5

定 价：0.52 元

译者前言

这是一本专门讨论特勒根定理的小册子.

特勒根定理是一个电路定理. 单靠基尔霍夫定律，就能将它推导出来，而不涉及电路元件的性质. 所以，它适用于任何电路，其应用范围日渐广泛.

本书所搜集的多方面问题，都应用特勒根定理给出了证明. 其中许多问题的最初证明，是用其它方法得到的；对这些问题本身，本书只作简单叙述.

研究电路问题时，特勒根定理有一定参考价值. 因此，我们遵照毛主席关于"**洋为中用**"的教导，翻译了此书，供从事电路工作的科技人员及大专院校的师生参考.

翻译时对原文个别地方作了删节，某些地方加了译者注，希望对读者有所帮助. 为了补救一点译名不准确的毛病，书末附有中英名词对照. 译文中缺点错误在所难免，欢迎读者批评指正.

目　录

第一章　引　言

在某种特殊领域，可能经常发展出简单、普遍而又极有价值的定理，它既有助于已知结果的导出，又能指出取得新结果的途径. 网络理论中的特勒根定理，就具有这种性质. 本书虽然主要为教学目的而写，但也包括一些新的结果. 我们希望本书能促进这一定理的广泛应用.

在网络分析里通常要用到三种类型的方程：据基尔霍夫第一定律写出的方程，即在每一瞬时流入每一节点的总电流为零的诸方程；据基尔霍夫第二定律写出的方程，即在每一瞬时沿每个回路的电压之和为零的诸方程；元件的成分方程，例如电阻的欧姆定律和电容的电荷-电压关系. 一般说来，求解网络问题，需要联立解这三种类型的方程，还要加上起始条件的限制和网络端口处激励的限制. 单是基尔霍夫两定律中的任一个定律，对于决定网络的工作状态来说是必要的但非充分的. 只在基尔霍夫两条定律都应用到实际问题的成分方程、起始条件和端口激励时，所得到的解答才符合实际情况.

另一方面，特勒根定理中用到满足基尔霍夫电压定律的电压，也用到满足基尔霍夫电流定律的电流，但是这些电压、电流并不必要和网络中的成分方程联系在一起. 这样一来，在特勒根定理中出现的电压和电流可以不存在于所给定的网络之中.

特勒根定理的不寻常之处在于，仅仅靠基尔霍夫电流定律和电压定律就能把它证明出来. 因此，不论元件的性质如何，激励的种类如何，特勒根定理总是成立的. 近来由于对非

线性网络、时变网络感兴趣，也提高了特勒根定理的重要性，因为这一定理是可以应用于这些网络的少数几个普遍定理中的一个.

在 1952 年特勒根发表文章的前后，已对特勒根定理作过许多独立的推导及讨论. 最近，岸、木田 (Kishi, Kida, 1967, 1968)发表了"边-端口守恒定理"，这定理具有特勒根定理的许多特点，用法相同，就实效说，二者是等价的. 他们应用他们的定理，导出了本书的某些结果. Bottani 和 Sartori (1956, 362—366 页；1958—1959；Sartori, 1966)也给出了这个定理. 在特勒根文章发表前二年，Cohn (1950)应用了和特勒根定理相同的内容，证明了现在称之为 Cohn 定理的定理. 再早一年，Bott(1949；同时参看 Bott 和 Duffin, 1953)几乎以纯数学的形式陈述了这个定理，而实质上和 Weyl(1923)更早些时候陈述的一样. 约在特勒根论文发表十五年以前，Posthumus 和 Douma(1936) 研究振荡器的频率稳定性时应用了特勒根定理的某些特殊情况；本世纪初，Donati(1899；1900；1917；1925，121—133 页，261—265 页)和 Wilberforce (1903；Skalicky, 1943；Wallot, 1944，第 150 节)应用一些同样的概念研究了互易性.

显然，1883 年赫维赛德第一次叙述并推导了类似特勒根定理的内容. 他的论述和证明只占一节篇幅，他用这定理也只有一个目的(推导本书 4.5 节中的最小热量定理)[1].

早先的作者中，没有人指出这定理的普遍性及其在应用上的灵活性，却只是将它用于一个特定的目的，或者只作出数

1) 用本书的符号将他的原文(1883；1892a，305—306 页)摘引如下.

虽然用焦耳和欧姆定律以及(能量)守恒定律得到 $\sum_p v_p i_p = \sum_\alpha v_\alpha i_\alpha$，然而此方程全然不依赖于欧姆定律；而且对于诸导体间的任何电流分配，此方程也成立，只要此分配与端钮上同样的(电流)电源相一致. 当 i_1(在第一个端口处)以任何方式分给接到第一个端钮的诸导体，i_2(在第二个端口处)以任何方式流入它的各

学的说明而没有探讨它的应用．特勒根(1952，1953)才是第一个倡议它是一个有用的定理，而且写了一篇论文来证明它并说明其应用．此后，此定理就被称作特勒根定理．本书作者认为这是对于他认识了这个定理的价值所作出的公正评价，即使他不是首先导出或者为了特定的目的应用此定理的人．

至少有七本教科书讨论了特勒根定理 (Bottani 和 Satori, 1956,362—366 页；Newstead, 1959,第 16 节；Bose 和 Stevens, 1965,第七章；Cruz 和 Van Valkenburg, 1967，6.5 节；Desoer 和Kuh, 1969,第九章；Rohrer, 1970，48—49 页；Spence, 1970，第五章)，但很少用它去证明新的结果．希望本书能促进此定理的更多应用．近来讨论此定理的有：Bordewijk(1956)，Volta (1962)，Brayton 和 Moser(1964)，Weinberg(1965)，Duinker (1968)，Penfield 等(1970)．

在本书第二章中，从基尔霍夫定律证明了特勒根定理，并给出了迄今所知的它的最普遍形式．此外，还提出了有着有用性质的两种弱形式．特勒根定理的这两种弱形式，可应用于电压、电流和波变量（散射变量）．在特勒根定理中用波变量，我们认为是尚未有过的[1)]．

从第三章到第七章，应用特勒根定理导出和推广了已知的网络定理．在大多数场合，用特勒根定理来证明比用其它方法证明要简单；实际上在所有场合下，它可以更清晰地勾划

导体时，这方程也成立． 当然，有个例外，那就是在联接第二和第一端钮的导线(电阻)中的电流应保持为业已固定的值不变；对其它端钮也是这样．每根导线有两个端钮；因此，对一特殊的导线联接，如(端口 1)和(端口 2)，便有 $v_1 i_{12}+v_2 i_{21}=$ $=(v_1-v_2)\ i_{12}=v_{12}i_{12}$（这里 v_{12} 和 i_{12} 是支路电压和支路电流），当遍及所有的导体，便得到 $\sum_p v_p i_p=\sum_\alpha v_\alpha i_\alpha$． 在符合欧姆定律的分配下，我们还可得出 $\sum_p v_p i_p=$ $=\sum_\alpha R_\alpha i_\alpha^2$，并且由于任何导体的热量(耗散)是 $R_\alpha i_\alpha^2$，这样便得到能量守恒．

1） 岸、木田 (1967) 用波变量表示他们所得的一些结果，但并未将波变量用于特勒根定理．

出各种定理适用于何种类型的网络．虽然我们有时也将各种定理的适用范围加以推广，但并非始终如此，而是宁愿把重点放在如何应用特勒根定理上．至于各种定理本身，一般不予讨论．从第三章到第七章不需要按照次序去阅读；如果读者愿意，可以跳过任何一章而不会失去连贯性．在第八章里，简短地指出了特勒根定理在其它物理系统中的应用．

第二章　特勒根定理的证明

2.1 记　　号

一个网络的拓扑性质，规定了节点和支路的位置．建立此拓扑性质，不必考虑该网络由什么元件（电阻、电容等）组成．每个二端元件占有一个单一支路，而多端元件如晶体管、理想变压器、回转器、互感则占有一个以上的支路．例如图2.1表示晶体管的拓扑图，它有三个节点，两个支路．所以，在支路和元件之间总存在着对应关系，但对多端网络讲，这并不是一一对应的关系．

本书对某个支路里的电压、电流的符号采用下述规定：电压与电流的乘积代表输入到占有该支路的元件中的功率．这就是说，支路电流的正方向，是从电压参考极性为正的节点流入该支路，见图2.2.

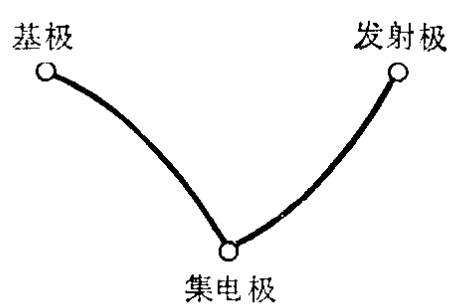

图 2.1　晶体管的拓扑表示

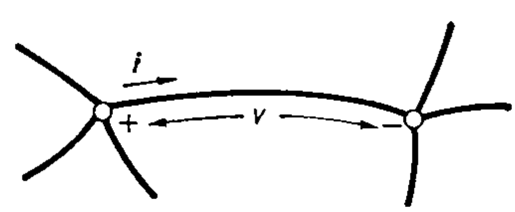

图 2.2　网络内部支路的符号规定

网络的端口是指抽到“外边”的一对端组，在其上可施加电压和通以电流．端口处的电压和电流的正方向如图2.3那

样规定.

本书用希腊字母下标表示网络内部支路，拉丁字母下标则表示端口；下标记号见图 2.4. 用小写字母 i、v 代表电流、电压的时域变量，大写字母 I、V 代表频域变量.

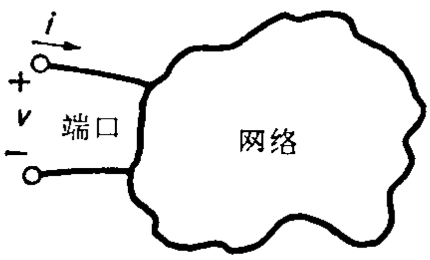

图 2.3 网络端口的符号规定

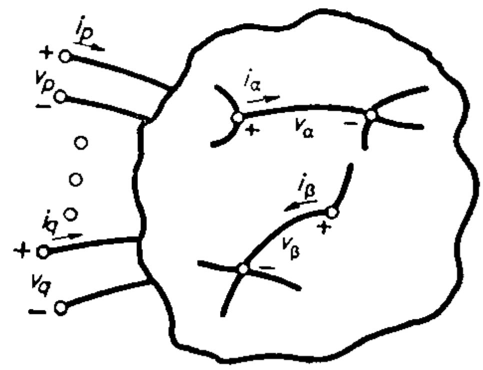

图 2.4 网络内部支路用希腊字母下标，端口用拉丁字母下标

2.2 基尔霍夫定律

设一网络没有端口，有 b 个支路，n_t 个节点，s 个分离部分. 基尔霍夫电流定律对电流提出了(n_t-s)个限制，因此仅可独立地规定 $(b-n_t+s)$ 个电流，其它的电流可从下述线性关系求出：

$$i_\alpha=\sum_\beta B_{\beta\alpha}j_\beta \tag{2.1}$$

式中 j_β 是独立电流，一共有$(b-n_t+s)$个，而 $B_{\beta\alpha}$ 则是一个 $(b-n_t+s)\times b$ 的矩阵，一般称作回路矩阵，或者叫做束集矩阵[1].

基尔霍夫电压定律亦可用 $B_{\beta\alpha}$ 表示之. 对于任一个独立电流，存在一个闭合回路，此回路不包含其它独立电流. 因此有 $(b-n_t+s)$ 个这样的回路，对每个回路可写一个基尔霍夫电压定律方程. 结果为：

1) 读者如不熟悉用此形式表示基尔霍夫定律，可参考通行的教本，如 Guillemin(1953，第 1 章)和Seshu与Balabanian(1959，9.8 节).

$$\sum_{\alpha} B_{\beta\alpha} v_{\alpha} = 0 \tag{2.2}$$

基尔霍夫定律的上述形式，便于证明特勒根定理．元件的成份规律没有用到，而且网络可以包含多端元件．虽然我们假定网络没有端口，但对有端口的网络也可以写出基尔霍夫定律的上述形式即式(2.1)和(2.2)，此时可暂时把每个端口当做一个支路，而且还应注意到端口电流正方向的规定和支路电流正方向的规定是相反的(比较图 2.2 和 2.3)．

2.3 功 率 定 理

由式(2.1)和(2.2)可得出简明的功率定理．在这里导出功率定理，是因为导出方式和特勒根定理的导出相似．把式(2.1)乘以 v_{α}，得：

$$i_{\alpha} v_{\alpha} = \sum_{\beta} j_{\beta} B_{\beta\alpha} v_{\alpha} \tag{2.3}$$

如把上式对 α 取和，由于式(2.2)，所以上式右边取和后为零．结果为：

$$\sum_{\alpha} i_{\alpha} v_{\alpha} = 0 \tag{2.4}$$

此表达式的物理解释为：对于每个 α，乘积 $i_{\alpha} v_{\alpha}$ 代表输入到占有 α 支路元件中的瞬时功率．所以式(2.4)说明了输入到所有元件的瞬时功率之和为零，此结果和能量守恒原理符合．不论元件和激励的性质如何，这儿的证明总是对的．

如果网络有端口，由类似的推导可得出：

$$\sum_{p} i_{p} v_{p} = \sum_{\alpha} i_{\alpha} v_{\alpha} \tag{2.5}$$

这样，在每一瞬时，通过端口输入到网络中的功率，等于分配到网络中各元件的功率之和，没有不守恒的现象．

2.4 似功率定理

式(2.5)可以推广到具有两种状态的网络上去．所谓一个网络的两种状态，是指网络有同样的拓扑性质，但电流和电

压属于不同激励，不同元件或元件相同但元件数值不同，以及不同的起始条件下的电流和电压．一个网络的两种状态，也可以看成是具有同样拓扑性质的两个网络的真实状态．把基尔霍夫定律应用到每个状态．式(2.1)和(2.2)指出：

$$i'_\alpha = \sum_\beta B_{\beta\alpha} j'_\beta \tag{2.6}$$

$$\sum_\alpha B_{\beta\alpha} v''_\alpha = 0 \tag{2.7}$$

其中“一撇”和“二撇”代表两种状态．采取类似上节中从式(2.1)和(2.2)推导出式(2.5)的步骤，可由式(2.6)和(2.7)得到：

$$\sum_p i'_p v''_p = \sum_\alpha i'_\alpha v''_\alpha \tag{2.8}$$

注意，电流 i'_p 和 i'_α 服从基尔霍夫电流定律，可它们不必是网络的任何一组真实的电流，因为与之对应的那组电压可以不服从基尔霍夫电压定律[1]．相似地，电压 v''_p 和 v''_α 服从基尔霍夫电压定律，但一般地不必和服从基尔霍夫电流定律的任何一组电流相对应．所以，特勒根定理处理的电流和电压不必实际存在于网络之中，至少不必同时存在于网络中．象 $i'_p v''_p$ 这样的乘积不是功率，而是“似功率”．

由式(2.8)表达的似功率定理，是特勒根导出的原始形式(1952，1953)，因此后来称作“特勒根定理”．它可用来推导出许多网络定理．虽然这形式很有价值，但它不过是更一般形式的一个特殊情况．更一般的形式为式(2.20)，下面将作介绍．

2.5 例　　题

式(2.8)表达的似功率定理之不寻常处，在于网络的两种状态之间不必有什么联系．例如考虑图 2.5 的网络．此网络有两个端口和四个内部支路．此网络的两种可能状态如图 2.6

1）由于这个原因，它们可以当作“虚拟电流”．相似地，v''_p，v''_α 可以当作“虚拟电压”．

和图 2.7 所示．这两种状态有不同的元件和不同的激励．一种状态仅有电阻，另一种状态中有一个理想二极管和一个开路．两种情况下的激励亦不同，如图所示．

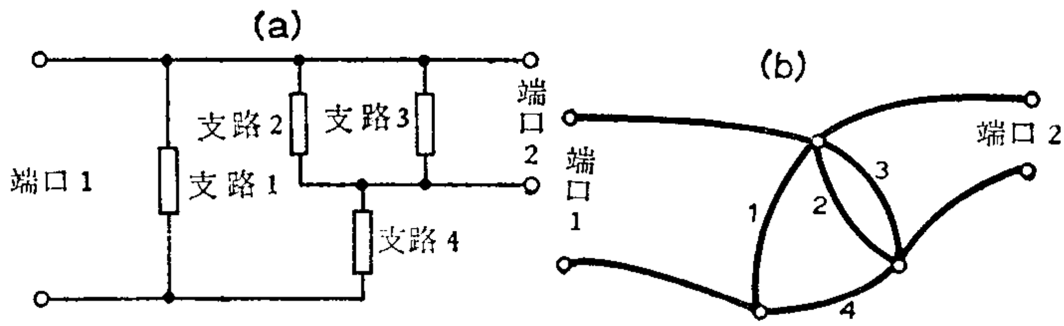

图 2.5 具有四条内部支路及两个端口的典型网络：(a)电路图，其中画出了元件，但未指明是什么元件；支路及端口都标明了号码；(b)网络的拓扑图，图中画出了有标号的支路及端口

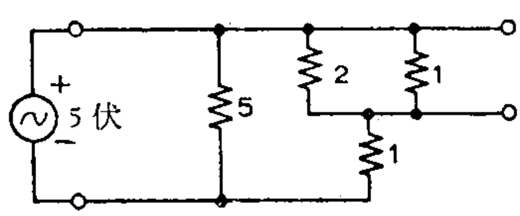

图 2.6 网络的一种状态（电阻单位为欧）

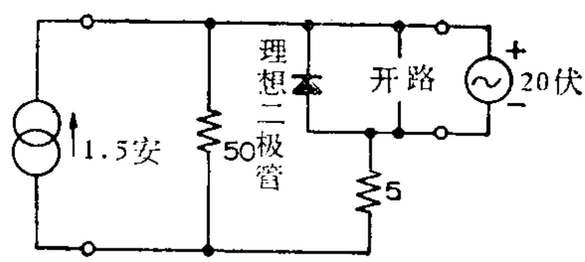

图 2.7 网络的另一种状态（电阻单位为欧）

两状态下的直流电压和电流值见表 2.1．从此表容易验证状态 1 的能量守恒：我们发现从端口输入的功率为 20 瓦，四个支路消耗的功率也是 20 瓦．也可验证状态 2 的能量守恒．发现从端口 1 输入的功率是 37.5 瓦，从端口 2 输出的功率是 20 瓦．净输入功率是 17.5 瓦．支路 1 消耗 12.5 瓦，支路 4 消耗 5 瓦，总消耗是 17.5 瓦．

表 2.1 还可用来验证似功率守恒，即验证式 (2.8)是否正确．于是，把状态 1 的电压和对应的状态 2 中电流相乘，应

当发现端口处的似功率之和等于支路的似功率之和. 事实上，我们从表2.1看出每个都是5.5瓦. 这个5.5瓦的似功率不能理解为真实的功率输入或真实的功率消耗；不过，它服从式(2.8)的守恒定理.

表 2.1　图 2.5 所示网络两种状态下的电压及电流

	状态 1（图 2.6）		状态 2（图 2.7）	
	v（伏）	i（安）	v（伏）	i（安）
端口 1	5	4	25	1.5
端口 2	2	0	20	−1
支路 1	5	1	25	0.5
支路 2	2	1	20	0
支路 3	2	2	20	0
支路 4	3	3	5	1

相似地，可以把状态1中电流乘以状态2的电压. 端口处的和以及支路的和都分别是100瓦.

对此仍有怀疑的读者，可能要把这个特殊拓扑性质下的似功率定理证明一下. 这很容易. 基尔霍夫电流定律指出，对于任一状态(这里指带一撇的状态)

$$i'_{p1}=i'_1+i'_4 \tag{2.9}$$

$$i'_{p2}=i'_2+i'_3-i'_4 \tag{2.10}$$

基尔霍夫电压定律指出，对于另一个状态(这里指带两撇的状态)

$$v''_{p1}=v''_1=v''_2+v''_4 \tag{2.11}$$

$$v''_{p2}=v''_2=v''_3 \tag{2.12}$$

式(2.9)和(2.10)中的电流以及式(2.11)和(2.12)中的电压，不必属于同一工作方式；的确，这组电流或者这组电压，只不过是在具有相同拓扑性质的网络中、而且符合基尔霍夫定律的一组电流或者一组电压而已，除此而外，它们之间不必有任