

## 图书在版编目(CIP)数据

低雷诺数流理论/严宗毅编著. —北京: 北京大学出版社, 2002. 6

ISBN 7-301-04682-0

I. 低… II. 严… III. 斯托克斯流动-理论 IV. 0357

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 033971 号

### 书 名: 低雷诺数流理论

著作责任者: 严宗毅

责任编辑: 邱淑清

标准书号: ISBN 7-301-04682-0/O · 0485

出版者: 北京大学出版社

地址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电话: 出版部 62752015 发行部 62754140 编辑部 62752021

电子信箱: [zpup@pup.pku.edu.cn](mailto:zpup@pup.pku.edu.cn)

印刷者: 北京大学印刷厂

发行者: 北京大学出版社

经销者: 新华书店

850 毫米×1168 毫米 32 开本 18 印张 449 千字

2002 年 6 月第一版 2002 年 6 月第一次印刷

定 价: 27.50 元

## 序

低雷诺数流是流体力学中的一个分支学科. Happel 和 Brenner 的著名著作《低雷诺数流体动力学》对此学科在 60 年代前的发展做了全面系统的总结和介绍. 此书问世以来, 被人们广泛引用, 极大地推动了该学科的发展, 至今仍是从事低雷诺数流研究工作者公认的经典著作. 近 30 年来, 在化工、生物医学工程、环境、物理化学等领域的推动下, 低雷诺数流得到了迅速的发展, 已成为流体力学中一个活跃的分支领域. 为了反映这一学科的新发展和新成果, 人们热切地期望有一本新的低雷诺数流的专著问世以补充 Happel 和 Brenner 名著的不足. 严宗毅教授编著的《低雷诺数流理论》正是在这种情况下满足了广大读者的要求.

我很高兴有机会首先阅读了本书的手稿. 严宗毅教授的这本书写得很好, 很有特色. 一方面, 他以四种新方法为主线, 系统全面而又有重点地介绍了近 30 年来此领域的最新进展; 另一方面, 为了保持全书的系统性和完整性, 并方便读者的阅读, 做到理论与应用结合, 对低雷诺数流的基本理论、精确解、反射法、Stokes 流理论的发展及应用, 以及有关的数学基础也作了恰如其分的介绍, 使全书既突出重点又兼顾基础及一般, 既讲清原理又不忽略应用, 浑然自成一体. 本书的作者在介绍国外学者成果的同时, 还十分注意总结我国学者包括作者及台湾同行在低雷诺数流中的贡献, 取材广泛全面, 基本上反映了该领域国内外的主要的新成果. 作者长期从事低雷诺数流的教学研究工作, 著述甚丰, 对此领域有广泛深入的了解. 在书中作者不仅全面系统地介绍各种方法而且还深入浅出地剖析每种方法的思路及其要点、难点、优缺点, 以及适用范围.

作者的精辟见解及科学研究工作中的经验之谈无疑将有助于引导读者较快地掌握该学科的发展前沿并在今后的理论和应用研究中起积极作用。

我和严宗毅教授相识于 1981 年,当时我作为访问学者在纽约哥伦比亚大学生物医学工程研究所 Skalak 教授那里工作,而他则在纽约市立大学攻读博士学位.由于研究工作相近,我经常去他寓所和他讨论低雷诺数流方面的问题,从中获得许多启示和帮助,并从此结下深厚的友谊.1985 年当他获得博士学位后,他拒绝了学校的高薪聘请,怀着海外学子报国之心毅然回国到北京大学力学系<sup>①</sup>工作,从此我们不仅是好朋友,而且还是有着共同事业和专业兴趣的同事.在和他十多年的交往中,他的博学多才,严谨的治学态度,一丝不苟的敬业精神和宽厚待人的作风,都给我留下深刻的印象.这本编著是他多年来心血和智慧的结晶,他将此书献给祖国和他的恩师们,我为此感到由衷的高兴和敬佩.我深信这本著作的出版一定会获得国内外学术界同行们、读者们的热烈欢迎和积极的反响.

吴望一

1996 年 9 月 1 日于北京大学

---

<sup>①</sup> 现名为“北京大学力学与工程科学系”。

## 前 言

低雷诺数流理论是近年来发展较快的一个流体力学分支. 它的迅速发展, 一方面是由于化工、生物、环境、物理化学等许多科学和工程部门提出了日益增多的低雷诺数流问题; 另一方面也是由于研究手段的进步与更新. 直到 20 世纪 60 年代, 低雷诺数流的精确解很少, 近似解法也只限于流体中少量形状规则的物体彼此相距较远的情形. 近三十多年间发展的四种新方法(多极子配点法, 边界积分方程法, 体内奇点分布法和多极子矩法)使大量以往束手无策的难题迎刃而解: 其中既有轴对称问题, 也有三维问题; 既有无界流动, 也有有界流动; 既有球形粒子, 也有任意形状物体的绕流; 既有刚性微粒, 也有可变形的液滴和气泡; 物体的数目可以多到上百个, 而物体的间距却可以小到互相接触. 正是由于这些新解的出现, 低雷诺数流理论在一系列重要领域的应用取得了引人注目的进展. 人们日益迫切地感到, 需要有一部专著系统地总结低雷诺数流理论的新发展.

作者开始酝酿写这本书, 大约始于 80 年代初期. 当时我正在美国纽约市立大学攻读博士学位, 有机会师从 Weinbaum 和 Pfeffer 两位教授, 他们是前面提到的多极子配点法的主要创始者. 以后, 我又有机会与 Acrivos 和吴望一两位教授共事, 他们分别在边界积分方程法和体内奇点分布法方面做出过开创性的贡献. 在我亲身参与低雷诺数流理论工作的过程中, 深切感到早在 1965 年初版的 Happel 和 Brenner 的名著《Low Reynolds Number Hydrodynamics》(低雷诺数流体动力学)已无法反映这一领域日新月异的发展. 该书虽然始终未曾修订, 仍然在 1973 和 1983 年

两次重印并很快脱销,这从一个方面反映了学术界对低雷诺数流理论著作的渴求. 当时,一种海外学子报效祖国的强烈责任感使我萌生了把这一学科新进展介绍给国内的想法. 从 80 年代初期以来,我先后为国内刊物撰写了近十篇有关的综述文章,1989 年还有幸应邀为国际上权威性的 Annual Review of Fluid Mechanics 和 Успехи Механики 撰写这方面的总结文章. 在 1985 年学成归国以后,我在北京大学力学系五次讲授研究生课“低雷诺数流”,多次指导研究生和本科生有关低雷诺数流的讨论班和毕业论文. 本书就是在这一基础上写成的. 1990 年,欧洲的一家出版社曾来函邀我把自己的英文总结文章扩展成书,可我更情愿让这部专著首先在北京以中文出版,以了却我回报祖国的一点小小心愿.

和十几年前相比,不仅我所面对的文献数量有了成倍的增长,而且所涉及的内容也有了許多新的开拓(例如,上述四种新方法中的多极子矩法主要是近十几年间发展起来的). 对于这样浩繁的资料,如何决定取舍确实是个不轻松的任务. 我给自己定下了几条原则,希望不至于太错. 第一,系统地介绍基本方法,尤其是四种新方法,用这些方法作为主线,把低雷诺数流理论贯穿起来. 低雷诺数流的课题是无穷无尽的,但只要掌握了基本方法,就可以举一反三,触类旁通. 因此,本书对每一种方法都力求交代清楚来龙去脉、基本思路、主要技巧和适用范围,并尽可能举例说明如何对不同的方法扬长避短,融会贯通,灵活运用. 第二,希望本书既能帮助读者打下扎实的基础,又能引导读者较快地接触这一学科分支的发展前沿,以利于他们今后在自己的科研或应用中有较高的起点. 因此,我们既要精选一些对学科发展有长远意义的经典成果,又要用主要篇幅突出近年的新成果. 例如,对历史上曾起过重要作用的反射法(它构成了 Happel 和 Brenner 名著的核心内容)和点力法,本书只做十分简略的介绍,因为现在已经有了更为优越的新方法. 第三,与其追求完备而罗列大量工作,不如深入解剖一些典型情况. 在低雷诺数流理论的近期文献中,我们不可避免要漏掉成百上千,

但希望选入本书的数百篇确实有一定代表性. 由本书所讲的内容出发, 顺藤摸瓜, 不难追溯更多的原始文献. 为了方便读者, 本书中凡是可能之处, 都尽量引述有关的综述文章和专著. 第四, 在原理与应用的关系上, 本书虽以原理为主, 但兼顾应用. 事实上, 在讲原理时常做许多理想化的简化假设, 而实际应用又往往涉及错综复杂的背景, 二者之间难免有一定差距. 为了弥补这一空白, 本书专辟第八章, 着重说明理论与实际相结合的方法和技巧. 尽管我们选讲的应用也是示例性的, 绝非包罗万象, 但书中 200 多幅图表列举了大量结果, 饱含着对实际工作者有用的信息. 侧重于应用的读者甚至可以先浏览第八章, 再根据该章提供的线索查阅前面有关章节.

作者希望, 这样写成的一本书能对力学、物理化学、生物医学工程、地球物理和气象科学、化工、环境、选矿等方面的科学工作者和工程技术人员有参考价值, 也可供研究生与本科生高年级选修课用作教材.

作者在长期的工作中得到北京大学力学与工程科学系吴望一教授许多帮助和指教, 这次又承蒙他在百忙之中仔细审阅全书, 提出了宝贵的意见, 并为本书作序, 谨表示衷心的感谢. 作者还愿借此机会, 对北京大学力学与工程科学系的温功碧教授、吴江航教授, 中国科学院力学研究所的白以龙院士和李家春教授所给予的支持和帮助表示诚挚的谢意. 山慧贤副教授认真校读和誊抄了全部书稿, 在此一并致谢.

我还要感谢我的导师 S. Weinbaum 教授和 R. Pfeffer 教授, 是他们引导我进入了这一充满魅力的学术领域; 感谢美国的 A. Acrivos, P. Ganatos, 冯元桢, R. Skalak 和 Z. Dagan 各位教授, 聆听他们的讲学以及与他们的学术合作或学术交往使我终身受益.

愿以此书表达我的崇高敬意, 献给我的导师郭永怀院士和夫人李佩教授, 献给我的导师谈镐生院士和夫人邓团子先生, 他们对

我的谆谆教诲和关心爱护将永远激励我奋进不息。

最后,我要特别感谢北京大学出版社和责任编辑邱淑清编审.没有北京大学各级领导的支持,没有出版社的同志们孜孜不倦的辛勤工作和多方面的热情帮助,本书是不可能顺利出版的.

低雷诺数流理论本身正在蓬勃发展之中.作者学识有限,书中难免有不当之处.如蒙指正,不胜感激.

严宗毅

1996年3月于北京大学

# 目 录

序 .....	吴望一(1)
前言 .....	(3)
引论 .....	(1)
<b>第一章 Stokes 流的基本原理 .....</b>	<b>(8)</b>
1.1 Stokes 流问题的数学提法 .....	(8)
1.2 Stokes 流的几个基本定理 .....	(18)
(一) Stokes 流的最小机械能耗散定理 .....	(19)
(二) 互易定理 .....	(24)
1.3 无界 Stokes 流的基本奇点 .....	(25)
(一) Stokes 流的无旋奇点 .....	(26)
(二) 旋子 .....	(30)
(三) 点力(Stokes 流子) .....	(33)
(四) 由点力导出的其他奇点 .....	(36)
1.4 圆球在无界流体中的平移和旋转 .....	(40)
1.5 Faxen 定律 .....	(48)
1.6 轴对称 Stokes 流中物体的阻力 .....	(56)
参考文献 .....	(60)
<b>第二章 Stokes 流解法概论 .....</b>	<b>(62)</b>
2.1 圆球坐标系下的一般解和精确解 .....	(63)
(一) 轴对称 Stokes 流动的一般解 .....	(63)
(二) 流体球的运动 .....	(66)



(三) Stokes 源汇	.....	(69)
(四) 圆球坐标系下三维 Stokes 流的一般解	.....	(71)
2.2 圆柱坐标系下的一般解	.....	(73)
(一) 轴对称 Stokes 流动的一般解	.....	(73)
(二) 圆柱坐标系下三维 Stokes 流的一般解	.....	(77)
2.3 扁球与长球坐标系下精确解和一般解, 椭球的绕流	.....	(77)
(一) 扁球的轴对称 Stokes 绕流	.....	(78)
(二) 长球平移引起的轴对称 Stokes 流	.....	(81)
(三) Venturi 管中的流动和 Sampson 流动	.....	(83)
(四) 扁球坐标系下轴对称流的一般解	.....	(85)
(五) 扁球坐标系下三维流的一般解	.....	(86)
(六) 椭球的绕流	.....	(87)
2.4 双球、球环与切球坐标系下的精确解	.....	(92)
(一) 圆球位于大平板附近时的 Stokes 流	.....	(93)
(二) 双球坐标系下的其他精确解	.....	(103)
(三) 球环坐标系下的精确解	.....	(105)
(四) 切球坐标系下的精确解	.....	(107)
2.5 其他类型的精确解	.....	(107)
(一) 可通透介质的 Stokes 流	.....	(107)
(二) 多相介质的 Stokes 流	.....	(109)
(三) 二维角点附近的流动	.....	(110)
(四) 圆柱位于大平面壁附近的运动	.....	(112)
(五) 其他精确解简介	.....	(113)
2.6 反射法	.....	(113)
(一) 多个球形粒子在无界流体中的情形	.....	(114)
(二) 壁面对球形粒子运动的影响	.....	(121)
(三) 边界对任意形状粒子运动的影响	.....	(124)
2.7 点力法	.....	(125)
2.8 其他近似解法概说	.....	(129)

(一) 润滑理论 .....	(129)
(二) 加权残值法的基本思想 .....	(132)
(三) 边界加权残值法的应用 .....	(134)
(四) 内部加权残值法的应用 .....	(134)
(五) 摄动法的应用 .....	(136)
参考文献 .....	(138)
<b>第三章 多极子配点法</b> .....	<b>(144)</b>
3.1 无界轴对称 Stokes 流动 .....	(146)
(一) 刚性球串的无界轴对称绕流 .....	(146)
(二) 球形液滴串的无界轴对称绕流 .....	(155)
(三) 刚性球串的共轴旋转 .....	(157)
(四) 非球形物体的无界轴对称绕流 .....	(158)
3.2 有界轴对称 Stokes 流动 .....	(160)
(一) 无穷长圆管中的轴对称流动 .....	(161)
(二) 大平面所限定的轴对称流动 .....	(169)
(三) 圆锥形管道中的轴对称流动 .....	(172)
(四) 圆管的入口流动 .....	(173)
3.3 三维 Stokes 流动 .....	(174)
(一) 有对称平面的三维无界流动 .....	(174)
(二) 一般的三维无界流动 .....	(179)
(三) 三维有界流动 .....	(183)
3.4 具有复杂边界形状时的匹配技巧 .....	(186)
(一) 球入圆孔的轴对称运动 .....	(187)
(二) 流经有限长圆孔的轴对称流动 .....	(190)
(三) 涉及半无穷长圆孔或大圆盘的轴对称流 .....	(194)
3.5 很低雷诺数下的非定常问题 .....	(194)
(一) 低雷诺数流中的非定常力 .....	(195)
(二) 低雷诺数流中粒子的非定常运动方程 .....	(200)
(三) 粒子沉降问题的计算实例 .....	(203)

参考文献 .....	(206)
<b>第四章 边界积分方程法</b> .....	<b>(212)</b>
4.1 流体动力学势理论 .....	(213)
(一) Stokes 流的 Green 公式 .....	(213)
(二) 用单层势和双层势表示流场 .....	(216)
(三) 只用单层势表示流场 .....	(220)
4.2 无界 Stokes 流动 .....	(223)
(一) 任意形状刚体的绕流 .....	(224)
(二) 液滴或气泡在流动中的变形 .....	(231)
4.3 有界 Stokes 流动——边界积分方程法的直接应用 .....	(236)
(一) 粒子或液滴垂直于可变形无穷大界面的运动 .....	(236)
(二) 有污染的气泡沿圆孔轴线上升 .....	(243)
(三) 无穷长圆管中粒子或液滴的运动 .....	(249)
4.4 有界 Stokes 流动——与多极子配点法的联合运用 .....	(249)
4.5 有界 Stokes 流动——Green 函数法 .....	(257)
(一) Green 函数法的基本思想 .....	(257)
(二) 无穷大平壁附近的 Green 函数 .....	(261)
(三) 无限薄圆孔附近的 Green 函数 .....	(266)
(四) 其他 Green 函数 .....	(269)
4.6 采用第 2 类积分方程的方法 .....	(271)
(一) 概述 .....	(271)
(二) PMKK 方法 .....	(274)
(三) LB 方法 .....	(275)
4.7 二维 Stokes 流的边界积分方程法 .....	(276)
(一) 基本思想和数学提法 .....	(276)
(二) 算例和应用 .....	(279)
4.8 边界积分方程法小结 .....	(280)
(一) 边界积分方程法的优点 .....	(280)

(二) 边界积分方程法的缺点 .....	(282)
(三) 如何提高边界积分方程法的精度 .....	(283)
(四) 如何节省边界积分方程法的计算时间 .....	(283)
参考文献 .....	(284)
<b>第五章 体内奇点分布法</b> .....	<b>(291)</b>
5.1 由体内奇点分布构造的一类精确解 .....	(292)
(一) 长回转体绕对称轴旋转所引起的 Stokes 流 .....	(292)
(二) 长球在不同来流中的 Stokes 流 .....	(297)
(三) 用体内奇点法构造 Stokes 流精确解的一些经验法则 .....	(303)
5.2 细长体理论 .....	(305)
(一) 直细长体理论 .....	(306)
(二) 细长回转体的匹配渐近展开解 .....	(311)
(三) 细长体理论的其他工作 .....	(313)
5.3 采用低阶奇点的体内奇点分布法 .....	(315)
(一) 基本思想 .....	(315)
(二) 算例 .....	(317)
(三) 小结 .....	(320)
5.4 采用 Sampson 奇点的体内奇点分布法 .....	(321)
(一) 长回转体的轴对称绕流 .....	(321)
(二) 前后对称之扁回转体的轴对称绕流 .....	(330)
(三) 长回转体绕对称轴旋转引起的 Stokes 流 .....	(332)
(四) 三维 Stokes 流问题 .....	(335)
(五) 液滴在 Stokes 流中的变形 .....	(337)
(六) 小结 .....	(340)
参考文献 .....	(342)
<b>第六章 多极子矩法</b> .....	<b>(347)</b>
6.1 迁移率矩阵和阻力矩阵 .....	(348)
(一) 定义和基本性质 .....	(348)

(二) 用多极子配点法求迁移率矩阵和阻力矩阵 .....	(351)
(三) 用二体作用两两相加的方法近似求迁移率矩阵 .....	(353)
(四) 由迁移率矩阵求逆得到阻力矩阵的一个重要性质 .....	(355)
6.2 无界流动中的多极子矩法 .....	(358)
(一) Faxen 定律的应用 .....	(359)
(二) 速度场的多极子矩展开式 .....	(360)
(三) 润滑修正 .....	(363)
(四) 无界流中多极子矩法的实施步骤 .....	(365)
(五) 算例 .....	(368)
(六) 小结 .....	(372)
6.3 有界流动中的多极子矩法 .....	(373)
(一) 基本思想 .....	(374)
(二) 有界流中多极子矩法的实施步骤 .....	(376)
(三) 算例 .....	(382)
6.4 四种强干扰理论比较 .....	(389)
参考文献 .....	(391)

## **第七章 Oseen 流动和低雷诺数流的高阶近似 .....**

7.1 Stokes 流动近似的局限性 .....	(397)
(一) Stokes 流理论的适用范围 .....	(397)
(二) Stokes 佯谬 .....	(400)
(三) Whitehead 佯谬 .....	(402)
(四) Stokes 流动解的非一致性 .....	(403)
7.2 Oseen 流动近似 .....	(404)
(一) Oseen 方程组 .....	(404)
(二) 定常 Oseen 流动解的结构 .....	(406)
(三) 圆球的定常 Oseen 绕流解 .....	(406)
(四) 圆柱的定常 Oseen 绕流解 .....	(411)
(五) 任意形状物体的 Oseen 阻力估计 .....	(412)

7.3	低雷诺数流的逐级近似解法	(413)
	(一) 圆球低雷诺数绕流问题的逐级近似解	(413)
	(二) 柱体低雷诺数绕流问题的逐级近似解	(416)
7.4	低雷诺数流的匹配渐近展开法	(417)
	(一) 圆球的无界均匀绕流	(418)
	(二) 圆球在单向流动中的侧向漂移	(424)
	(三) 圆柱绕流问题	(426)
	(四) 长球的侧向绕流	(428)
7.5	非零低雷诺数流动的奇点分布法	(429)
	(一) 吴望一等的方法	(430)
	(二) Yano 和 Kieda 的方法	(433)
	(三) Lee 和 Leal 的方法	(436)
	参考文献	(437)

## 第八章 低雷诺数流理论的若干应用

8.1	微水动力学的特点	(443)
	(一) 对于粒子外形和流体性质的简化	(443)
	(二) 描述不同浓度悬浮液性质的各种力学模型	(445)
	(三) 微水动力学中常见的物理化学效应	(447)
8.2	悬浮液的粘度	(448)
	(一) Brenner 的理论	(449)
	(二) Batchelor 的理论	(454)
	(三) Stokes 动力学的结果	(457)
	(四) 需要进一步考虑的因素	(461)
8.3	多孔介质中的流动和悬浮液中粒子的沉淀	(462)
	(一) 多孔介质中的流动	(462)
	(二) 固定床中的流动	(465)
	(三) 悬浮液中粒子的沉淀	(467)
	(四) 落球式粘度计	(474)

8.4	对流,扩散,粒子的捕获和跨膜渗透 .....	(476)
	(一) 布朗扩散和 Fick 定律 .....	(476)
	(二) 流体动力干扰对于对流和扩散的影响 .....	(480)
	(三) Jeffery 轨道 .....	(482)
	(四) 粒子捕获 .....	(484)
	(五) 跨膜渗透 .....	(488)
8.5	圆管中悬浮液流动和生物力学中低雷诺数流问题 .....	(492)
	(一) 悬浮液在圆管中的流动 .....	(492)
	(二) 毛细血流的数学模型 .....	(496)
	(三) 血浆撇取和细胞筛滤 .....	(499)
	(四) 生物力学中的其他低雷诺数流问题 .....	(503)
8.6	低雷诺数流中的动电现象和表面张力效应 .....	(505)
	(一) 双电层和动电现象 .....	(506)
	(二) 电泳 .....	(511)
	(三) 电渗 .....	(516)
	(四) 与表面张力有关的流动 .....	(519)
	(五) 胶体的稳定性 .....	(522)
	参考文献 .....	(524)

## 附录..... (534)

附录 A	矢量与张量运算提要 .....	(534)
	(一) Hamilton(哈密顿)算子 .....	(534)
	(二) 张量下标表示法 .....	(535)
	(三) 张量的基本运算 .....	(536)
	参考文献 .....	(537)
附录 B	一些特殊函数 .....	(538)
	(一) Gegenbauer 函数 .....	(538)
	(二) 椭圆积分 .....	(541)
	参考文献 .....	(543)

附录 C 特殊曲线坐标系 .....	(544)
(一) 回转正交曲线坐标系 .....	(544)
(二) 扁球坐标系 .....	(545)
(三) 长球坐标系 .....	(547)
(四) 双球坐标系 .....	(548)
(五) 球环坐标系 .....	(550)
(六) 切球坐标系 .....	(552)
参考文献 .....	(553)



## 引 论

在化工、环境工程、采矿、物理化学、生物力学、地球物理和气象学中,常常需要讨论微小粒子、液滴或气泡在粘性流体中的缓慢运动.这些运动的特点是流体的惯性力与粘性力相比可以忽略不计或只占次要地位.这种流动叫做低雷诺数流动.尽管早在 1851 年,英国力学家 Stokes(斯托克斯)就导出了圆球在无界粘性流体中做缓慢运动的精确解,可是在以后的一百年间,能够求解的低雷诺数流问题的数目是相当有限的.只是在最近三十年间,低雷诺数流体力学才取得了引人注目的飞速进展.本书的目的就是系统地阐述低雷诺数流动的基本原理和处理方法,重点放在总结近年来低雷诺数流理论的最新进展.

在这一引论中,我们将首先简要地介绍流体的粘性和粘性流体所满足的方程,然后着重讲清楚什么是低雷诺数流动,接着概述低雷诺数流理论的发展过程,最后说明一下本书各章的内容以及读者需要具备哪些预备知识.

在本书中,我们限于讨论均质不可压缩牛顿流体.所谓牛顿流体,是指流体中的应力张量  $\mathbf{\Pi}$  与变形速率张量  $\mathbf{E}$  之间满足广义牛顿粘性定律<sup>[1,7]</sup>,即

$$\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \quad (0.1)$$

式中  $p$  是流体的压强,  $\mathbf{I}$  是单位张量,  $\mu$  是流体的粘度.这里假设流体的第二粘度(体积粘度)为零.变形速度张量  $\mathbf{E}$  与流体速度矢量  $\mathbf{v}$  之间的关系是

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^c], \quad (0.2)$$

式中  $\nabla \equiv i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$  是 Hamilton 算子,上标  $c$  表示共轭张