中学基础知识丛书

ZHONGXUE JICHU
ZHISHI CONGSHU

数学

SHU XUE

辽宁人民出版社

中学基础知识丛书

数　　学

《中学基础知识丛书》编写组编

辽宁人民出版社

一九八一年·沈阳

中学基础知识丛书

数 學

《中学基础知识丛书》编写组编

*

辽宁人民出版社出版
(沈阳市南京街6段1里2号)
辽宁省新华书店发行
沈阳市第一印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：18
字数：418,000 印数：417,401—465,400
1979年4月第1版 1981年4月第3次印刷

统一书号：7090·57 定价：1.20元

出　版　说　明

为了适应我省高中毕业生和广大青年复习、巩固所学的各科基础知识的需要，由辽宁教育学院组织我省部分大、中学校的有关教师，编写了一套《中学基础知识丛书》。

这套丛书是根据教育部制订的中学各科教学大纲（试行草案），并参照各科统编教材和全国高等学校招生考试复习大纲编写的。它包括：《政治》、《语文》、《数学》、《物理》、《化学》、《历史》、《地理》和《英语》、《俄语》，共九册。

《数学》是这套丛书的一个分册。参加本书编写的有：钱永耀、关成志、赵保安、邱肖、宋殿祯、朱传礼、刘国材等同志。在编写过程中，还得到有关单位领导和同志们的大力支持，在此，谨致谢意。

由于时间仓促，书中缺点、错误在所难免，希望读者批评、指正。

1978年12月

目　录

代　　数

I 实　　数

一、实数概念

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数}\end{cases}$$

数的概念的发展，克服了数的一些运算中出现的矛盾。例如，分数的引入使除法能够永远施行（除数不为零）；负数的引入使减法能够永远施行等。

数的扩充的原则是：

（1）增加了新的元素，新旧元素一起构成新的数的集合（新数集）。

（2）原来数的集合中的运算规律在新数集中仍然成立。

（一）自然数（即正整数）

1．自然数：包括单位1，质数和合数。

（1）质数：除了单位1，只能被1和自己整除的数叫做质数（素数）。如2，3，5，7，11，……。

（2）合数：不但能被1和自己整除，还能被其他的数整除的数叫做合数。如4，6，8，9，10，……。

2．性质：

（1）在自然数集合中，有最小的数“1”，而无最大的数；

（2）有序性．任意两个自然数可以比较大小；

（3）在自然数集合中，永远可以施行加法和乘法两种运算．

（二）整数

1．整数：包括正整数、零和负整数．

2．性质：

（1）在整数集合中，没有最小的数，也没有最大的数；

（2）有序性．任意两个整数可以比较大小；

（3）在整数集合中，永远可以施行加法、减法和乘法三种运算；

（4）整数的几何意义是数轴上孤立的整数点．

（三）有理数

1．有理数：包括整数和分数．

任意一个有理数都可以表示成$\frac{m}{n}$的形式．这里m和n是整数，且$n\neq 0$．

整数和可以化成十进分数的分数都可以写成有限小数的形式，如 $0=0.0$，$-3=-3.0$，$\frac{2}{5}=0.4$．不能化成十进分数的数，可以写成无限循环小数的形式，如$\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$．所以任何一个有理数也都可以化成有限小数或无限循环小数的形式．

反过来，任何一个有限小数或无限循环小数也都可以化成$\frac{m}{n}$的形式*，所以有限小数和无限循环小数都是有理数．

---

* 化无限循环小数为分数，是根据无穷递缩等比数列的求和公式．

2. 性质：

（1）在有理数集合中，没有最小的数，也没有最大的数；

（2）有序性．任意两个有理数可以比较大小；

（3）稠密性．任意两个有理数之间都存在其他有理数．如任意两个有理数 a、b 之间，就有其等差中项 $\frac{a+b}{2}$；

（4）间断性．任意两个有理数之间，还有非有理数存在．如在1.4与1.5之间有 $\sqrt{2}=1.414\cdots\cdots$；

（5）封闭性．在有理数集合中，永远可以施行加法、减法、乘法、除法和乘方五种运算（除数不能为零）．

3. 相反数：只有符号不同的两个数叫做互为相反数．如 $+7$ 和 -7 是互为相反数．

零的相反数是零．

4. 数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线，叫做数轴．

有理数的几何意义，是数轴上密集而有空隙的有理点．

（四）实数

1. 实数：包括有理数和无理数．

（1）方根：如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，记作 $x=\sqrt[n]{a}$（n 为大于1的自然数）．

如果 $a\geqslant 0$，在实数集合中，$\sqrt[n]{a}$ 永远有意义；

如果 $a<0$，在实数集合中，n 为奇数时，$\sqrt[n]{a}$ 有意义，n 为偶数时，$\sqrt[n]{a}$ 无意义．

（2）算术根：正数的正的方根，叫做这个数的算术根．零的算术根是零． 如 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$； $\sqrt{a^2}=-a(a<0)$．

例 计算 $\sqrt{4a^2-12a+9}$．

解：$\sqrt{4a^2-12a+9}=\sqrt{(2a-3)^2}$

$$=\begin{cases}2a-3, & \left(2a-3\geqslant 0,\quad a\geqslant\frac{3}{2}\right)\\ 3-2a, & \left(2a-3<0,\quad a<\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

（3）无理数：无限不循环小数叫做无理数。

2．性质：

（1）在实数集合中，没有最小的数，也没有最大的数；

（2）有序性．任意两个实数可以比较大小；

（3）连续性．实数集合与数轴上的点建立一一对应关系；

（4）封闭性．在实数集合中，永远可以施行加法、减法、乘法、除法和乘方五种运算（除数不能为零）。

实数的几何意义是数轴上连续的实数点。

3．实数的绝对值：

$$a\text{ 为实数，}\quad |a|=\begin{cases}a, & \text{若 } a>0;\\ 0, & \text{若 } a=0;\\ -a, & \text{若 } a<0.\end{cases}$$

实数 a 的绝对值的几何意义是数轴上表示实数 a 的对应点，到原点间的距离。

二、实数的运算

（一）正负数运算法则

1．加法：

$a+b$		a 与 b 同号	a 与 b 异号
运算结果	符　号	同于原加数的符号	同于绝对值较大加数的符号
	绝对值	等于 a、b 绝对值相加	等于 a、b 绝对值相减（大减小）

特殊情况：两个相反数相加等于零；任何数与零相加仍得这个数。

2．减法：转化为加法，即

$a-b=a+(-b)$。

3．乘、除法：

$a\cdot b$（或$a\div b$）		a 与 b 同号	a 与 b 异号
运算结果	符　号	正	负
	绝对值	等于 a、b 绝对值的积（或商）	

4．乘方：

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots\cdot a}_{n\text{个}}.\quad (n\text{为自然数})$$

5．开方：开方是乘方的逆运算。

（二）实数的运算定律

1．交换律：$a+b=b+a$，$a\cdot b=b\cdot a$；

2．结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

3．分配律：$a(b+c)=ab+ac$，

$(a+b)c=ac+bc$。

（三）实数的运算顺序

先算乘方、开方，再算乘法、除法，最后算加法、减法。如果有括号，就先算括号里的数。

三、准确数和近似数

（一）准确数和近似数

在计数时，有时可以得到与实际完全符合的数。例如，统计一个班级的学生人数，数出有48人；某车间有30台车床等。这里的48和30分别是与这个班级的实际人数和这个车间的实际车床数完全符合的准确数。

而有时只需要或者只可能得到一个与实际大体符合的数。例如，我国有960万平方公里的土地；在 $2\pi R$ 中，当 $R=1$，$\pi=3.14$、3.142、3.1416、…… 时，得到 6.28，6.284，6.2832，……。这里的 960，6.28，6.284，6.2832，……都是与实际大体符合的近似数。

对近似数的选取，要以实际问题的需要为标准。最常用的选取方法是四舍五入法。

（二）有效数字

在一个由四舍五入得到的近似数中，从左边第一个非零数字起，到右边最末一位止，所有的数字，都叫做这个数的有效数字。例如，用四舍五入法得到的近似数：

0.003408有四个有效数字3，4，0，8；

2.60×10^7 有三个有效数字2，6，0。

一个数的最末一个有效数字在哪一个数位，就说这个数精确到哪一位。例如，近似数5，精确到个位（或者说，精确到1）；5.1精确到十分位（或者说，精确到0.1）；5.14精确到百分位（或者说，精确到0.01），……。

注意：0.03026四舍五入精确到0.001，得0.030，它有两个有效数字3，0。末尾的零不能去掉，它表示这个近似数精确到千分位。

例1　计算：

（1）$2.75-\left[-1\frac{1}{2}+\left(0.375-\frac{5}{6}\right)+4\frac{2}{3}\right]$；

（2）$\left(-\frac{5}{6}+1\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{7}{12}\right)+(-9)\times1\frac{1}{3}$.

解：（1）原式 $=2.75-\left[-1\frac{1}{2}+0.375-\frac{5}{6}+4\frac{2}{3}\right]$

$$=2.75+1\frac{1}{2}-0.375+\frac{5}{6}-4\frac{2}{3}$$

$$=2.375+1\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-4\frac{2}{3}$$

$$=2\frac{3}{8}+1\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-4\frac{2}{3}$$

$$=2\frac{9}{24}+1\frac{12}{24}+\frac{20}{24}-4\frac{16}{24}$$

$$=3\frac{41}{24}-4\frac{16}{24}=4\frac{17}{24}-4\frac{16}{24}=\frac{1}{24};$$

（2）原式 $=\left(-\frac{5}{6}+1\frac{4}{6}\right)\times\left(-\frac{12}{7}\right)-9\times\frac{4}{3}$

$$=\frac{5}{6}\times\left(-\frac{12}{7}\right)-12=-13\frac{3}{7}.$$

注意：①带分数的加减法，一般的整数部分和整数部分相加减，分数部分和分数部分相加减；

②带分数的乘除运算，要化带分数为假分数；

③分数运算的结果要化成最简分数。

例2　化简 $|3-a|-|2a+1|+\sqrt{a^2+6a+9}$。$(a\leqslant-3)$

这是一个化简绝对值和算术根的问题。化简这类问题，常

常是要在保持等量关系的前提下，脱去绝对值的符号和根号。“脱去”的依据是绝对值的定义和算术根的定义。

解：当 $a=-3$ 时，

原式 $=|3-(-3)|-|2\times(-3)+1|+\sqrt{[(-3)+3]^2}$

$=|6|-|-5|+0=6-5=1$；

当 $a<-3$ 时，

原式 $=3-a-[-(2a+1)]+[-(a+3)]$

$=3-a+2a+1-a-3=1$。

例 3 证明：任意四个连续自然数的积与 1 的和，为一平方数。

证明：设四个连续自然数为 n，$(n+1)$，$(n+2)$，$(n+3)$。

则 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$

$=n(n+3)(n+1)(n+2)+1$

$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

$=(n^2+3n)[(n^2+3n)+2]+1$

$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$

$=(n^2+3n+1)^2$。

例 4 已知 a、b、c、d 都是有理数，$\sqrt{b}$、$\sqrt{d}$ 是无理数，且 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$。求证：$a=c$，$b=d$。

证明：假定 $a\neq c$，设 $a=c+m$（m 是有理数，且不为零），

则 $c+m+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$。即 $m+\sqrt{b}=\sqrt{d}$。

两边平方得 $m^2+2m\sqrt{b}+b=d$。

所以 $\sqrt{b}=\dfrac{d-b-m^2}{2m}$ 这是不可能的。

因此 $a=c$，从而 $b=d$。

例 5 证明：三个连续整数的积能被 6 整除。

证明：设三个连续整数为 n，$n+1$，$n+2$，它们的积为

$n(n+1)(n+2)$。

当 k 为整数时，若 $n=3k$，则n 能被 3 整除；

若 $n=3k+1$，则$n+2$ 能被 3 整除；若$n=3k+2$，则$(n+1)$能被 3 整除。于是 $n(n+1)(n+2)$ 能被 3 整除。又$n(n+1)$能被 2 整除，2 与 3 互质，

∴ $n(n+1)(n+2)$能被 $2\times3=6$ 整除。

例 6 试证明 $\log_2 5$ 是无理数。

证明：假若 $\log_2 5$是有理数，则 $\log_2 5=\frac{p}{q}$（q, p是正整数，且互质）。由对数定义可得到 $2^{\frac{p}{q}}=5$。即 $2^p=5^q$，而 2 与 5 是互质的，所以对任意值 p 和 q，2^p 与 5^q 互质。这就是说，等式 $2^p=5^q$ 绝不会成立。

因此，$\log_2 5$ 是无理数。

练 习 一 A

1．下列各数，哪些是有理数？哪些是无理数？为什么？

（1）$\sqrt{\frac{2318}{9}}$；　　（2）$\lg \operatorname{tg}(-840°)$；

（3）$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\frac{5\pi}{12}$；　　（4）$10^{2\lg\sqrt{\lg 5}}$；

（5）$\lg(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})$。

2．计算：

（1）$(-3)^2-\left(-1\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{2}{9}-6\div\left|-\frac{2}{3}\right|$；

（2）$0.25\times(-2)^2-4\div(\sqrt{5}-1)^0-\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$；

(3) $|-5|-|-7^2|+|\frac{1}{3}|-|5\div(-6)|$；

(4) $|2-5|-\sqrt{(-3)^2}+|\lg 0.01|$。

3．回答下列问题：

(1) 在有理数范围里，下列方程哪些有解？哪些无解？

① $5x+3=0$；② $x^2-2=0$；③ $x^2-6x+9=0$。

(2) 两个数中，绝对值较大的数就是较大的数。这句话对吗？

(3) 如果m是负数，那么$-m$和$|m|$各表示什么数？如果m是零呢？

(4) 有没有一个数的平方反而比这个数小？什么时候？

(5) 什么时候 a 的相反数比 a 大？比 a 小？与 a 相等？

(6) 什么时候 a 的倒数比 a 大？比 a 小？与 a 相等？

(7) $+5$与-5的关系和$+a$与$-a$的关系有什么不同？

(8) 正数的平方根是算术平方根。这句话对吗？为什么？

(9) 确定 m 和 n 的符号：

① $mn>0$；② $\frac{m}{2n}<0$。

(10) 何时 $-(a+b)$，大于零？小于零？等于零？

(11) y 是什么数时，$x+y<x-y$？

4．化简：

(1) $\frac{\sqrt{4-4a+a^2}}{2-a}(a>2)$；(2) $1+|x-4|$；

(3) $|a|-|b|$；(4) $a-\sqrt{a^2-2ab+b^2}$。

5．下列计算有何错误？应怎样改正？

（1） $-2\sqrt{3}=\sqrt{(-2)^2\cdot 3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$；

（2） $1-3\times 5^2=(1-3)\times 5^2=-2\times 5^2=-50$；

（3） $(1-3)\times 5^2=1-3\times 5^2=1-3\times 25=-2\times 25=-50$；

（4） $|xy|=xy$；

（5） $-|a^2|=|-a|^2=|(-a)^2|=[-|a|]^2=-|a|^2$。

6．解方程：

（1） $\frac{1}{5}\left\{5-\frac{1}{5}\left[5-\frac{1}{5}(5-x)\right]\right\}=0$；

（2） $|x-4|=5$。

7．（1）已知两数-0.3与-0.31。试写出一数，使它小于这二数中最小者；大于这二数中最大者；介于这二数中间。

（2）两个无理数的和、差、积、商一定是无理数吗？

8．计算：$\left(\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right)^2$与$\sqrt{\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2}$。

9．下列各式在 a 是什么数时成立？

（1） $|a|=a$；（2） $|a|=-a$；（3） $-|a|=a$；

（4） $a=-a$；（5） $\sqrt{a^2}=-a$。

10．用几何法，在数轴上作出表示$\sqrt{2}$的点；并用代数方法证明$\sqrt{2}$是无理数。

11．n 为自然数，试证：$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}<\frac{1}{2}$。

练 习 一 B

1．在数3427□里的□位置上应填上哪些数字，就能使这个数成为：

（1） 2 的倍数；（2） 3 的倍数；（3） 4 的倍数；

（4） 5的倍数；（5） 8的倍数；（6） 9的倍数；
（7）10的倍数；（8）11的倍数；（9）25的倍数.

2. 有学生3933人，分成人数相等的小组参加劳动. 每组人数限定在10人以上，20人以下，求每组人数及可分组数.

3. （1）一切真分数的平方，一定在什么整数之间？
（2）391是质数还是合数？
（3）分数$\frac{1}{1+n^2}$的最大值是什么？这个分数能不能是负值？

4. 化简：

（1）$\frac{\sqrt{a^2}}{a}$；（2）$-\left[-\frac{|x^2-1|}{(1+x)(x-1)}\right]$；（$|x|<1$）

（3）$(m-1)\sqrt{\frac{m+1}{(m-1)^2}}$；

（4）$\sqrt{(1-x)^2}-\sqrt{(3+x)^2}$.

5. 利用无理数将质数11写成积的形式.

6. 设 a 为实数，求证 $|a|=|-a|$.

7. 已知 a 是无理数，b 是有理数，求证 $a+b$ 是无理数.

8. 求 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 的算术平方根.

9. 化简下式，再求它的近似值（精确到0.01）：

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3\sqrt{3}}-4^{-\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}.$$

10. 若 a_1，a_2，a_3，a_4 都是正的实数，且 $a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4=4a_1a_2a_3a_4$，问以 a_1, a_2, a_3, a_4 为边的凸四边形是怎样的四边形？