高等学校教材

线性代数

西安交通大学《线性代数》编写组

西安交通大学出版社

高等学校教材

线性代数

西安交通大学《线性代数》编写组

西安交通大学出版社

内容提要

本书是高等院校非数学专业用线性代数教材。内容包括：矩阵、行列式与逆阵、向量空间、矩阵的秩与线性方程组、矩阵的特征值与矩阵的对角化、二次型、线性变换、欧氏空间及若当标准形简介。本书体系新颖，叙述清晰，深入浅出，通俗易懂，注意启发引导；配备有校多的例题与习题，并附有习题答案与提示，便于教学。

本书可作为理工科院校各专业的教材，也可供工程技术人员和报考工科研究生的读者参考.

(陕)新登字 007 号

高等学校教材

线性代数

西安交通大学《线性代数》编写组

任编辑 叶 涛

西安交通大学出版社出版

西安市咸宁西路 28 号 邮政编码:710049)

西安理工大学印刷厂印装

陕西省新华书店经销

*

开本 787×1092 1/32 印张 12.5 字数:271 千字

1995 年 1 月第 1 版 1995 年 1 月第 1 次印刷

ISBN7-5605-0678 X/O·113 定价:7.80 元

前　言

线性代数是理工科院校重要的基础课，它的理论和方法已成为科学研究及处理工程技术各领域问题的有力工具。计算机的普及使用，为线性代数开辟了更为广阔的应用前景。反过来，应用科学的发展及后继课程起点的提高也促使高等院校线性代数课程内容在深度和广度上发生着深刻变化，要求加强这门课程的教学。另一方面，线性代数理论性较强，较抽象，而教学时数又较少，如何科学地处理教材内容也是值得研究和探索的问题。所以，当前迫切地需要一本能够适应科学技术和社会经济发展，而且在内容、体系和教学方法等方面有所创新，便于教学的线性代数教材。本书就是为上述目的而做的一次尝试。

本书内容分为两大部分，第一部分是线性代数最基本的内容，适用于 32～36 教学时数的专业，内容包括：第一章，矩阵(4)[①]；第二章，行列式与逆阵(8)；第三章中的“向量空间 F^n”、“向量组的线性相关性和向量组的秩”、“基、维数和向量的坐标”(6)；第四章，矩阵的秩与线性方程组(4)；第五章，矩阵的特征值与矩阵的对角化(6)；第六章，二次型(4)。这部分内容是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会 1993 年

① 括号内为参考讲课时数

5 月制定的《线性代数课程教学基本要求》编写的。本书的第二部分内容包括：第三章中的“一般的向量空间”、“子空间”(4)；第七章，线性变换(7)；第八章，欧氏空间(7)；附录，若当标准形简介．这部分内容及书中打 * 的内容(包括习题)供要求较高、教学时数较多的专业选学或自学之用。

本书有以下一些特点：

(1) 内容编排上尽量做到由易到难，循序渐进。例如，本书是从与中学教学紧密衔接的线性方程组的消元法讲起(方程组的理论问题在第四章讨论)，方程组的解法是具体的，并由此自然地引入了矩阵概念，然后才讲行列式，避免了因行列式定义的抽象和计算上的某些困难给学生一开始就造成的心理障碍。这样处理，也为用逆矩阵法证明克莱姆法则提供了可能。

(2) 向量空间理论无疑是现代数学的必备基础和强有力的工具，本书适当加强了这部分内容，以满足工科学生更多层次的使用要求。在讲述上由浅入深，由直观到抽象。先讲具体的向量空间 F^n，再讲抽象的向量空间。向量空间的讨论是紧密结合几何空间的例子和线性方程组问题展开的。

(3) 本书突出了矩阵方法。前六章以矩阵为线索，一开始就讲到了矩阵及其初等变换，为后面处理问题提供了有力工具。第五章先讲一般矩阵的对角化问题，再讲实对称矩阵的对角化，为解决二次型化为标准形的问题作好了准备。

(4) 对内容的处理尽量让读者易于接受，配备了较多的例题，加强了对概念、方法和理论的解释及说明，注意启发引导。例如在第八章先由几何上、再从投影定理来说明施密特正交化过程，便于读者理解。

(5) 适当地加强了应用。例如由某个经济问题引入矩阵乘法的概念，适当讨论了特征值在求解微分方程组中的应用、二次型在化二次曲面方程为标准形及多元函数极值中的应用、欧氏空间理论在求矛盾方程组最小二乘解中的应用、若当标准形在求解微分方程组中的应用等。

(6) 每章配有一定数量的习题，这些习题是经过精选的，其中不少具有新意。书末附有习题答案及大部分证明题的提示。为了开拓读者思路，有的题还给出了几种解法。

(7) 本书给了教师较多的灵活性。对于教学时数不超过 36 学时的专业，可只讲授前六章(不包括打 * 的内容)，其中有些定理和性质(例如行列式的性质和矩阵三秩相等等定理)的证明可以不讲；对于学时较多或要求较高的专业，教师可在前六章的基础上再选讲书中其它章节；如果需要讲授一般的向量空间，则既可以按书中的次序讲，也可以把 3.4 和 3.5 两节放到第六章之后讲(这不影响四、五、六章的学习)。

本书力求叙述清晰，说理详尽，语言简明，通俗易懂，深入浅出，便于教学和读者自学。

本书第一章由李传荣编写；第二章 2.1、2.2、2.3 和第三、四、八章及附录由魏战线编写；第二章 2.4、2.5 和第五、六、七章由李传荣编写。

本书在编写中，曾广泛听取了同行们的意见。从编写讲义到本书的出版，始终得到本单位各级领导及同行们的关心和支持。龚冬保、张自立、胡清徽、徐幅华、张继平、徐文雄、邓建中、潘晏仲、姜仲乾、武忠祥、宋保军、常争鸣、秦军林、李耀武等老师都对本书的编写提出了不少宝贵意见。张自立教授仔细审阅了本书的书稿并提出了许多宝贵意见．西安交大教务

处、教材科和西安交大出版社也对本书的出版给予了极大支持．编者在此一并表示深切的谢意。

由于时间仓促和水平所限，书中一定存在不少问题，希望使用本书的师生和读者不吝赐教。

编者

1994 年 6 月于西安交大

目　　录

第一章　矩　阵

矩阵是线性代数研究的主要内容之一，它在数学的各个分支及现代科学技术中都有广泛的应用．线性方程组的解法及解的性质与它的系数矩阵和增广矩阵紧密相关，许多问题在归结为矩阵问题之后，研究起来显得更加方便和直观．

1.1　消元法与矩阵

1.1.1　线性方程组与矩阵

线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1-1}$$

这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个未知量，m 是方程的个数，a_{ij}($i = 1, 2, \cdots, m$;　$j = 1, 2, \cdots, n$) 是第 i 个方程中未知量 x_j 的系数，b_i ($i = 1, 2, \cdots, m$) 称为常数项，m 和 n 不一定相等．如果 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零，则称(1-1) 为一个非齐次线性方程组，否则称为齐次线性方程组．

我们也称方程组(1-1) 为一个 $m \times n$ 线性方程组．

所调方程组(1-1) 的一个解是指由 n 个数组成的有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，用 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 代人方程组后，

(1-1)的每个等式都变为恒等式．方程组(1-1)的所有解组成的集合称为它的解集合．求解方程组就是找出它的所有解的集合．

定义 1.1　线性方程组的所有解的集合，称为它的通解或一般解．

把线性方程组(1-1)中未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的系数按它们在方程组中的相对位置排成下面的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

若再把常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 按它们在(1-1)中的位置填写在(1-2)中的最后一列，则有下面的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

这样的矩形数表称为矩阵．

定义 1.2　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 按一定次序排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵．其中横的各排称为矩阵的行，纵的各排称为矩阵的列，数 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列元

素，或称为矩阵的(i,j)元素．

本书中矩阵的元素是实数或复数．

通常用大写字母A,B,C表示矩阵，例如上面的矩阵记为A或$A_{m\times n}$，也可记为$(a_{ij})_{m\times n}$．当$m=n$时称为n阶方阵，这时a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}所在位置称为主对角线，另一条对角线称为副对角线．当$n=1$时，此时矩阵A只有一列，称为列矩阵或列向量，表示如下

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}$$

当$m=1$时，矩阵A只有一行，称为行矩阵或行向量，记为

$$A=[a_{11}\quad a_{12}\quad\cdots\quad a_{1n}]$$

当$m=n=1$时，A为仅含一个元素的一阶方阵$[a_{11}]$，记为$A=[a_{11}]$.

例如

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$$

分别是2×3矩阵和2阶方阵．

定义1.3 矩阵(1-2)及(1-3)分别称为方程组(1-1)的系数矩阵和增广矩阵，分别记作A和$\overline{A}$.

有一个线性方程组就有相应的增广矩阵，增广矩阵完全确定相应的线性方程组．

1.1.2 消元法与矩阵的初等变换

下面通过具体例子介绍解线性方程组的消元法，并引出矩阵的初等行变换，从而得到解线性方程组的简便方法．

例 1.1 用消元法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

解 将第 1,第 2 个方程交换,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

把第 1 个方程的(−2)倍,(−3)倍分别加到第 2 个方程和第 3 个方程去,方程组变为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -5x_2 - x_3 = -13 \\ -2x_1 - 5x_3 = -19 \end{cases}$$

第 3 个方程的 5 倍减去第 2 个方程的 2 倍,方程组变为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -5x_2 - x_3 = -13 \\ -23x_3 = -69 \end{cases}$$

上面的方程组称为阶梯形方程组. 从阶梯形方程组的第 3 个方程开始逆向求解,得出方程组的最简形式为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1 \\ \qquad x_2 \qquad = 2 \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \end{cases}$$

所以,原方程组的唯一解为(1,2,3). 即 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

用消元法解线性方程组的方法可概括为:正向消元,逆向求解. 所谓正向消元,就是从第 1 个方程开始逐个消元,化为阶梯

形方程组．所谓逆向求解，就是从阶梯形方程组的最后一个方程解出未知量逐个代入前一个方程，最后完成方程组的求解．

从上述的消元法，不难看出，它是反复地对方程组进行变换，所进行的变换由以下三个基本变换组成：

(1) 交换两个方程；

(2) 用一个非零常数乘一个方程；

(3) 把一个方程的倍数加到另一个方程上去．

因而，我们给出下面定义．

定义 1.4 变换(1)，(2)，(3)称为线性方程组的初等变换．

如果两个方程组的解集合相同，则称它们是同解方程组．容易用初等方法证明，初等变换把线性方程组变成同解的方程组．

解线性方程组的基本方法是对原方程组有计划地进行一系列的初等变换，将原方程组化为具有相同解集合的同解方程组(又称等价方程组)，而后者比前者容易求解．

由于增广矩阵与线性方程组一一对应，增广矩阵的行对应着线性方程组中相应的方程．所以对方程组的初等变换对应着增广矩阵相应的初等行变换．

定义 1.5 矩阵的初等行(或列)变换是指对矩阵进行下列三种变换：

(1) 交换矩阵的两行(或两列)；

(2) 用非零的数 k 乘矩阵的某一行(或列)；

(3) 把一行(或列)的 k 倍加到另一行(或列)去．

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换．

用消元法解线性方程组，相当于用初等行变换化简它的增广矩阵．