

电力拖动控制系统数字仿真

内 容 提 要

本书联系实际,由浅入深。详细介绍了各具特色的仿真技术和方法,并从中归纳出仿真步骤和有关说明。

内容主要包括:控制系统数字仿真的各种基本方法和参数优化技术;交、直流电力拖动控制系统的数字仿真以及电力拖动控制系统的模拟计算机仿真。还有两个附录:连续系统状态方程的离散化和单纯形法仿真程序SIMPL。

本书是大专院校自动控制、工业自动化、电气自动化、船舶电气自动化、电机和电力电子技术应用专业学生的教科书,亦可供科研单位、企业工程技术人员参考。

电力拖动控制系统数字仿真

毛宗源 温钢云 编著

责任编辑 谢艳桂

华南理工大学出版社出版发行

(广州 五山)

各地新华书店经销

华南理工大学印刷厂印装

开本: 787×1092 1/16 印张: 17.50 字数: 403千

1990年8月第1版 1990年8月第1次印刷

印数1—2 000

ISBN 7—5623—0180—8/TP·15(课)

定价: 3.50元

前 言

本书是根据“1986~1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划”而编写的。

在从事电力拖动控制系统研究、设计和运行的科技人员中，“电力拖动控制系统数字仿真”已广泛用来科学地分析、研究、辅助设计电力拖动控制系统。目前高等院校工业自动化、电气自动化、船舶电气自动化、电力电子技术应用等专业的本科生和研究生，在进行电力拖动控制系统论文设计中，都必须用数字仿真这一工具进行系统的分析、研究和辅助设计，以达到最佳的电力拖动控制系统。

根据上述情况，本书试图先简要论述控制系统数字仿真的主要方法，然后结合电力拖动控制系统的特殊要求，对直流电力拖动和交流电力拖动的几种典型控制方法进行数字仿真，以达到阐明电力拖动控制系统数字仿真的方法、步骤和结果。

本书第二章介绍应用数值法仿真连续系统；第三章讲述应用离散化模型仿真连续系统；第四章论述采样控制系统的数字仿真；第五章讨论控制系统的参数优化技术；在此基础上，结合电力拖动控制系统的特殊性，在第六章、第七章分别研究直流电力拖动控制系统和交流电力拖动控制系统的计算机数字仿真的方法和步骤；最后第八章简单介绍模拟计算机仿真。

本书是以作者在华南理工大学自动控制专业及工业电气自动化专业授课时的讲义为基础编写的。第一章、第六章、第七章和第八章由毛宗源写。第二章、第三章、第四章和第五章由温钢云写。最后由毛宗源定稿。

本书由华南理工大学周其节教授和广东工学院符曦教授主审，并经中国船舶工业总公司教材编审室审查。

本书编写过程中得到周其节教授、符曦教授、吴捷教授、徐惠良教授、孙振副教授，以及中国船舶工业总公司教材编审室同志的关心、支持和提供资料；研究生肖斌、姚菁及本科生周莉军也给了帮助，我们在此一并致谢。

编 著 者

1989年9月

目 录

第一章 绪 论	(1)
§ 1-1 仿真技术的简单介绍.....	(1)
§ 1-2 仿真系统的组成及发展.....	(3)
§ 1-3 仿真技术的应用.....	(5)
第二章 应用数值积分法仿真连续系统	(7)
§ 2-1 连续系统的数学模型.....	(7)
§ 2-2 常用的数值积分法.....	(12)
2-2-1 单步法.....	(12)
2-2-2 多步法.....	(21)
2-2-3 预估-校正法.....	(22)
2-2-4 数值解稳定性的讨论.....	(24)
2-2-5 数值积分法的选择.....	(26)
§ 2-3 面向微分方程的数字仿真.....	(28)
§ 2-4 面向系统结构图的数字仿真.....	(34)
2-4-1 面向系统结构图的仿真方法之一.....	(34)
2-4-2 面向系统结构图的仿真方法之二——CSS仿真程序.....	(37)
第三章 应用离散化模型仿真连续系统	(51)
§ 3-1 连续系统离散化模型.....	(51)
§ 3-2 离散化模型的稳定性和精度问题.....	(53)
§ 3-3 用差分方程模型仿真连续系统.....	(55)
3-3-1 仿真方法.....	(56)
3-3-2 连续离散系统仿真程序CDSS.....	(57)
§ 3-4 连续系统的快速仿真方法.....	(78)
3-4-1 采用补偿器提高离散化模型精度和稳定性的方法.....	(78)
3-4-2 替换法.....	(80)
3-4-3 根匹配法.....	(82)
3-4-4 连分法积分公式.....	(83)
第四章 采样控制系统的数字仿真	(86)
§ 4-1 计算机控制系统仿真的一般方法.....	(86)
§ 4-2 数字控制器的仿真.....	(87)
§ 4-3 计算机控制系统数字仿真程序.....	(88)
§ 4-4 具有纯滞后环节的计算机控制系统的仿真.....	(92)
§ 4-5 数字控制器的设计.....	(94)
4-5-1 最小拍系统.....	(94)
4-5-2 无纹波最小拍系统.....	(96)

第五章 控制系统的参数优化技术	(98)
§ 5-1 目标函数与优化概念.....	(98)
§ 5-2 最速下降法.....	(100)
§ 5-3 共轭梯度法.....	(104)
§ 5-4 单纯形法.....	(105)
第六章 直流电力拖动控制系统稳定性分析、设计和仿真	(111)
§ 6-1 有源校正装置(调节器)的设计与仿真.....	(111)
6-1-1 带调节器的控制系统的工作原理及动态计算.....	(111)
6-1-2 性能指标.....	(115)
6-1-3 仿真模型的建立与修正.....	(116)
6-1-4 程序框图.....	(117)
6-1-5 设计实例.....	(118)
6-1-6 多环系统有源调节器设计程序说明及程序清单(BASIC).....	(124)
§ 6-2 闭环可控变流器直流电力拖动的稳定性分析、设计和仿真.....	(131)
§ 6-3 解耦方法和波形解耦方法在变换器系统仿真中的应用.....	(140)
第七章 交流电力拖动控制系统的稳定性分析、设计与数字仿真	(149)
§ 7-1 三相感应电动机的数字仿真.....	(149)
§ 7-2 PWM 感应电动机拖动系统的动态及静态性能的数字仿真.....	(156)
§ 7-3 感应电动机变频调速系统数字仿真实例.....	(161)
§ 7-4 感应电动机其它拖动控制系统数字仿真.....	(174)
7-4-1 交流感应电动机采用锁相技术变频调速的时域模型和数字仿真.....	(174)
7-4-2 感应电动机磁场定向控制的数字仿真.....	(183)
7-4-3 交流电动机滑动模矢量控制的数字仿真.....	(194)
§ 7-5 电流源逆变器供电的自控同步电动机的数字仿真.....	(201)
§ 7-6 电力拖动自适应控制系统的数字仿真.....	(217)
第八章 电力拖动控制系统的模拟计算机仿真	(223)
§ 8-1 用模拟计算机仿真自动控制系统的的基本步骤和方法.....	(223)
§ 8-2 结构图作为被仿真系统的原始数学描述.....	(224)
§ 8-3 原始结构图的变换.....	(225)
8-3-1 消去理想微分环节的变换.....	(226)
8-3-2 复杂传递函数环节的分解.....	(227)
8-3-3 消去不良耦合的变换.....	(228)
§ 8-4 模型结构图的组成及其参数的确定.....	(229)
8-4-1 按系统分解结构图组成模型结构图.....	(229)
8-4-2 模型结构图参数的确定.....	(232)
§ 8-5 感应电动机的模拟计算机仿真.....	(238)
附录一 连续系统状态方程的离散化	(243)
附录二 单纯形法仿真程序SIMPL	(247)
参考文献	(269)

第一章 绪 论

§ 1-1 仿真技术的简单介绍

在进行自动控制系统分析、综合、设计过程中，人们除运用理论知识对系统进行理论上的分析计算以外，常常要对系统的特性进行实验研究。这种实验研究一般有两种：一种是在实际系统上进行，另一种是在模型上进行。由于各种原因，比如安全性的考虑，经济性的考虑，以及可能性的考虑等等，在实际系统上进行实验往往不易办到，或不宜采纳。因此，在模型上进行实验很早以来就被系统工程师及研究人员所采纳。比如：要研究连轧机主传动速度响应特征，在理论分析的基础上，常常用一台同轴的直流发电机作为轧机负载的模型，然后在这套机组（轧机主传动模型）上进行实验研究。又比如：要研究电力系统的稳定性，我们可以用许多小容量的同步机、感应电动机与直流电机组成一个系统作为电网的模型，然后在这个系统上进行实验研究，这就是大家所熟知的电力系统动态模拟实验。这种用一个物理模型来仿真实际系统通常称为物理仿真。

飞速发展的计算技术广泛地被用来实现设计和科学研究的自动化。特别由于数字计算机引入控制系统，致使对系统进行复合控制、最优控制、自适应控制等等新的控制方法已成为可能。这些控制系统常常比较复杂，影响因素也比较多，很难用一个物理模型来进行仿真，或者说，为了研究这类复杂系统而设计制造一个模型常常要花费巨大的代价，周期也相当长，同时进行一次实验要做大量的准备工作，所以用计算机对实际系统进行仿真就日益被人们所采纳。这种仿真的特点是：首先将实际系统的运动规律用数字形式表达出来（它们通常是一组微分方程或差分方程），然后用模拟计算机或数字计算机来解这些方程。所以有时人们也称它是计算机仿真。

采用计算机仿真的方法，其好处是：用同一套仿真设备可以对物理性质截然不同的许多控制系统进行仿真研究，而且进行一次仿真研究的准备工作主要是准备模拟计算机的排题板或数字计算机的程序，这比在实际物理模型上作大量的安装、接线、调整等准备工作的工作量要小得多，周期也要短得多，所花的费用要少得多。而且在数字计算机上进行控制系统仿真时，系统参数及系统的结构改变十分方便。这样就为设计、研究控制系统的最佳方案和最佳参数提供了方便。另外，采用计算机进行控制系统的仿真，大大缩短了控制系统的现场调试时间，甚至一些现场环节调试，完全可以搬到实验室计算机上进行。

随着计算机技术的飞速发展，计算机仿真越来越多地取代了纯物理的仿真，当然有时为了某种要求还必须有一部分实物介入到计算机仿真系统中去，但仿真系统的主体是计算机，因此，我们研究的仿真是指计算机仿真。

为了使读者对计算机仿真有一个更加全面的了解，下面以一个简单的例子来加以说明。

对一个直流电力拖动系统进行仿真研究。第一步是要对这个系统进行模型化，即建立这个系统的数学模型，比如，要对其中的直流电动机（如图 1-1-1 a 所示）进行模型化，假定以传递函数来描述，则它可得图 1-1-1 b) 所示的结构图。

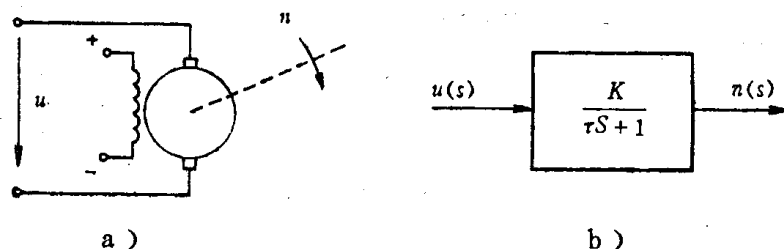


图 1-1-1 直流电动机及其传递函数

第二步是要将这个数学模型变成能在计算机上进行研究的仿真模型，比如要在数字机上进行仿真，则可以将它变成一个如图 1-1-2 所示的离散化的仿真模型。

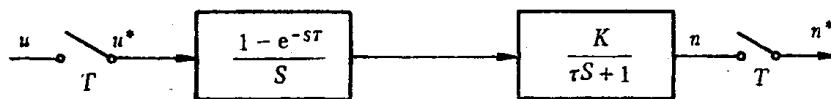


图 1-1-2 直流电动机的数字仿真模型

第三步是要将这个仿真模型编成计算机程序。

第四步是对这个仿真模型的误差进行分析，并对模型进行修改。目的是使仿真研究更加有效（比如，计算量少，但精度较高等）。

在完成上述四步之后，就可以进行这个系统的仿真研究了。

由上例可以看出，在进行仿真研究的过程中，一般需要经历四个步骤，即

1. 写出实际系统的数学模型；
2. 将它转变成能在计算机上进行运算的仿真模型；
3. 编出仿真程序；
4. 对仿真模型进行修改，校验。

这里涉及到三个具体的部分：一是实际系统；二是数学模型；三是计算机。并且共有两次模型化。第一次是将实际系统变成数学模型；第二次是将数学模型变成仿真模型，这可由图 1-1-3 来表示。

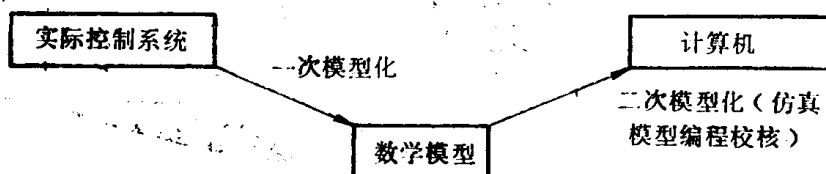


图 1-1-3 一次模型化与二次模型化

通常我们将一次模型化的技术称为系统取模及系统辨识技术，而将二次模型化，仿真模型编程，校核的技术称为系统仿真技术。两者虽然有十分密切的联系，但仍有所区别。

别。由图1-1-3可知,系统取模及系统辨识技术是研究系统与数字模型之间的关系,而系统仿真技术是研究数学模型与计算机之间的关系。

现在我们来给“仿真”下一个定义:

将一个能近似描述实际系统的数字模型进行二次模型化,变成一个仿真模型,然后将它放到计算机上进行运转的过程就称为仿真。

或者简易概括为:所谓仿真,就是用模型(物理模型或数学模型)代替实际系统进行实验和研究。

计算机仿真是一门综合性的新学科,它的应用范围很广,可用于工程系统、社会经济系统、生物系统等诸方面。在工业发达国家,仿真技术已受到普遍的重视,并得到了广泛的应用。在国际上成立了国际仿真联合会(International Association for Mathematics and Computers in Simulation-IAMCS),每年举行两次有关仿真技术的学术会议。

就控制系统的仿真而言,它是一门涉及到控制理论、计算数学和计算机技术的综合性的科学。

电力拖动控制系统的仿真,是以电力拖动控制系统为对象,进行模拟和数字仿真的实验和研究。本书就是针对这一内容进行论述的。

§ 1-2 仿真系统的组成及发展

由上可知,仿真就是模型在计算机上运转的过程。因此,用于对控制系统进行仿真的这一套硬软设备——简称仿真系统,是离不开计算机的。也就是说,不管是什么类型的仿真系统,其主体都是计算机。

仿真系统按照有无实物介入来区分,可分为实时仿真系统及非实时仿真系统。如按照计算机的类型不同来区分,则可分为用模拟计算机组成的仿真系统、用数字计算机组成的数字仿真系统、用混合模拟机组成的或用数字-模拟混合计算机组成的混合仿真系统,以及用微处理机阵列组成的全数字式仿真系统等等。

下面具体分析不同类型计算机作为仿真工具时的优缺点。

用模拟计算机来进行控制系统的仿真的优点是:在模拟机上进行的计算是“并行的”,因此运算速度快;同时,在模拟机上进行的运算是“连续”的,因此更接近实际的连续系统。这两点使得模拟机在快速、实时仿真方面至今仍保持一定的长处。它们的缺点是:①计算精度比较低,一般为千分之几;②对一些特殊环节(如纯时延或较为复杂的非线性环节)用电子线路来进行仿真不仅线路上比较复杂,而且精度上不易保证;③对于采样控制系统,以及当控制系统中有比较多的逻辑判断环节时,用模拟机来进行仿真比较困难;④仿真的自动化程度较低,比如排题板还要操作员去接线。

用数字计算机进行仿真却能十分好地解决上述困难,即使是小型的数字机,运算精度通常也可以达到6~7位有效数字,所以精度是远远高于模拟机,对于一些特殊环节,用数字机来仿真也是很容易的,至于仿真采样系统及具有逻辑判断环节的系统则更是数

字计算机的独特功能。另外，用数字计算机对控制系统进行仿真，整个“被仿真的系统”都包含在一组程序之中，所以使用起来十分方便，修改参数也很容易，即是说仿真工作的自动化程度是相当高的。但是，采用数字机进行仿真也有它的缺点，主要是，数字机的运算工作是“串行”的，所以计算速度比较低，对于一些反应较快的系统若要求进行“实时仿真”则有一些困难，也正是由于这个原因，所以用数字机来进行系统参数的寻优计算则要占用大量的时间，远不如模拟机来得快。

由于模拟计算机及数字计算机在控制系统仿真技术中各有优缺点，所以就产生了将这两种机器结合起来进行仿真的混合仿

真系统。它的基本结构有两种，一种是在模拟机的基础上增加一些数字逻辑功能，称为混合模拟机；另一种是由模拟机、数字机及混合接口三者联合起来构成一个模拟-数字混合计算机系统，如图 1-2-1 所示。

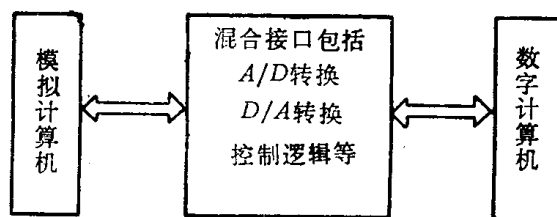


图 1-2-1 模拟-数字混合计算机系统

混合仿真一般应用于以下几种情况：

1. 要求对控制系统进行反复迭代计算时——比如：参数寻优，统计分析等。
2. 要求与实物连接进行实时仿真，同时又有一些复杂的函数需要用数字计算机来仿真时。
3. 对于一些用数字计算机控制的系统进行仿真时。

从发展情况来看，40年代出现了模拟计算机，由此仿真技术才真正成为一门独立的技术而存在，这时模拟计算机大都是用来设计飞机的专用计算机。50年代初，出现了通用的模拟计算机。

50年代，数字计算机有很大的发展，加上这一时期在微分方程数值解的理论方面又有很大进展，所以在几种高级语言（如FORTRAN，ALGOL等）出现以后，在50年代末期，数字计算机便在非实时仿真方面开始得到广泛应用。

由于这时数字计算机在速度方面还不能满足高速动态系统仿真的要求，所以1958年出现了第一台专用的模拟/数字混合计算机，它用来解决导弹轨道的计算问题。60年代初期，出现了模拟/数字混合计算机的商品。60~70年代这十几年时间中数字仿真和混合仿真在互相竞争之中都得到了迅速的发展。其标志是出现了大量的数字仿真语言，大大普及了数字仿真的应用，而同时又出现了许多种混合计算机，几乎所有的先进国家都建立了混合仿真实验基地。

到70年代后半期，由于微型机的发展，才使采用微型机阵列仿真系统成为可能。

近年来，计算机技术又有飞速的发展，数字计算机已有可能解决高速动态系统的实时仿真问题，所以模拟/数字混合计算机将被数字计算机所取代。

在计算机硬件飞速发展的同时，仿真软件也有很大的发展。在国外，早在60年代就出现了多种仿真语言。到目前为止，已形成了许多各具特色的仿真语言。常见的有DSL，CSMP，CSSL，DARE-P等。

在仿真算法方面，求解微分方程初值问题的经典数值积分法，如龙格-库塔法和

Adams 方法, 现在仍得到广泛应用。在控制系统的仿真中, 由于仿真技术和控制理论相结合, 又出现了以采样理论为基础的仿真算法, 如Z变换法和状态转移法等。为了适应快速仿真的需要, 随后又出现了许多快速仿真算法, 诸如时域矩阵法, 增广矩阵法, 替换法, 根匹配法和可调整的数值积分法等。从目前情况来看, 在精度和效率两方面都满意的算法还很少。因此, 发展一种又准又快的算法具有十分重要的意义。

1966年前, 我国主要是着眼于模拟机的仿真系统, 典型的机型是DMJ-3型(北京计算机一厂), 1966年以后停顿了一段时间, 70年开始着眼于数字仿真, 并进行了部分混合仿真的研究, 建立了HMJ-200/DJS-8, HAP₂/DJS-130等混合仿真系统, 但总的来看, 比国际上先进国家落后了相当一段距离。另外, 由于搞控制的技术人员对仿真技术的了解与掌握也较少, 影响了仿真技术在我国的发展。1979年中国自动化学会成立了仿真技术专业委员会, 并召开了第一次全国学术会议, 对于推动这项技术的发展起了一定的作用, 现在已有许多高等院校设置了仿真技术课程。随着我国计算机技术的发展, 仿真技术必将有更大的普及和发展, 并在我国四个现代化的建设中发挥更重要的作用。

§ 1-3 仿真技术的应用

仿真技术最初主要用于航空、导弹、原子能、宇航等控制系统的仿真研究方面。其目的是:

1. 新的系统的建立, 比如: 新的控制规律的研究, 新的调节器、仪表的应用, 新的控制系统的形成与调试等等。

2. 实现对控制系统的最佳设计与最佳控制问题。例如: 控制系统计算机辅助设计, 就是在仿真技术基础上发展起来的, 用来实现对控制系统的最佳设计。又如: 对一个自校正器进行在线闭环调试比较困难, 费时较多, 为了减少现场调试的困难, 缩短调试时间, 取得最佳控制, 在闭环调试之前, 进行数字仿真是很重要的。

3. 操作人员的训练。在一些发达国家中, 对于飞机驾驶员、舰船驾驶员、宇航员等等的训练, 相当一部分时间从实地训练转移到仿真的模拟实验室中训练。这种训练, 往往有些实地训练难以达到的场合, 它都能完满地完成。

由于这些系统比较复杂, 成本又极其昂贵, 加上安全性的考虑, 所以采用仿真技术后, 收益是十分明显的。随着仿真技术的发展, 它在化工系统、冶金系统、电力系统等工程系统中也逐步得到了广泛的应用。可以肯定地说, 控制系统的仿真技术是对控制系统进行研究、设计、调试不可缺少的一项重要技术。

电力拖动控制系统是控制系统的重要部分之一。要想既经济又迅速地研究、设计、调试一个理想的、最佳的电力拖动控制系统, 也离不开对系统的仿真研究与设计。

除此之外, 近年来仿真技术在对非工程系统的研究方面正起着越来越大的作用, 比如: 医学方面——研究人对药物的反应、疾病的成因、生物医学工程等, 人口系统, 市场系统, 电话系统, 农业系统, 交通系统等离散事件系统。

本书主要讲述控制系统数字仿真的一般方法，在此基础上，重点讲述电力拖动控制系统的计算机仿真，这种系统的主要特点是：它是一个动态系统。用计算机仿真研究电力拖动控制系统，特别是分析系统的方案是很方便的。模拟计算机和数字计算机分析与综合电力拖动系统是有效、很有前途的方法。

第二章 应用数值积分法仿真连续系统

本章虽不涉及如何依被仿真的实际系统抽取其相应数学模型的理论,但必须讨论连续系统的一般数学模型。因为若要应用数值积分法来仿真连续系统,就首先必须将连续系统的数学模型变换为微分方程,再应用数值积分法将它变换为数字计算机上能运行的离散化的数学模型。本章首先介绍连续系统的一般数学模型及其将它变换为微分方程的方法,然后讨论通常使用的主要数值积分法,最后讨论它的仿真实现。

§ 2-1 连续系统的数学模型

一个控制系统常用的数学模型有:微分方程、传递函数和状态空间表示法。下面,仅就这些数学模型作简单介绍,以便在建立仿真程序时,依需要而选用合适的数学模型。

一、微分方程

对单输入单输出的系统,其数学模型可以表示如式(2-1-1)所示的高阶微分方程:

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \\ &= c_1 \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + c_2 \frac{d^{n-2} u(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + c_{n-1} \frac{du(t)}{dt} + c_n u(t) \end{aligned} \quad (2-1-1)$$

式中:

$y(t)$ ——系统的输出量;

$u(t)$ ——系统的输入量。

若引进微分算子 $P = \frac{d}{dt}$, 则式(2-1-1)可表示为:

$$\begin{aligned} & P^n y(t) + a_1 P^{n-1} y(t) + \cdots + a_{n-1} P y(t) + a_n y(t) \\ &= c_1 P^{n-1} u(t) + c_2 P^{n-2} u(t) + \cdots + c_{n-1} P u(t) + c_n u(t) \end{aligned} \quad (2-1-2)$$

或

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} P^j y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-i} P^i u(t) \quad (2-1-3)$$

式中, $a_0 = 1$ 。上式又可写成:

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} c_{n-i} P^i}{\sum_{j=0}^n a_{n-j} P^j} \quad (2-1-4)$$

二、传递函数

对式(2-1-1)两边取拉氏变换,并设 $y(t)$ 、 $u(t)$ 的各阶导数的初值均为零,则得下式:

$$(S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots + a_{n-1} S + a_n) y(S) = (c_1 S^{n-1} + c_2 S^{n-2} + \cdots + c_n) u(S) \quad (2-1-5)$$

式中:

$y(S)$ ——输出量 $y(t)$ 的拉氏变换;

$u(S)$ ——输入量 $u(t)$ 的拉氏变换。

即单输入单输出系统的传递函数为:

$$G(S) = \frac{y(S)}{u(S)} = \frac{c_1 S^{n-1} + c_2 S^{n-2} + \cdots + c_n}{S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots + a_{n-1} S + a_n} \quad (2-1-6)$$

显然,式(2-1-6)与式(2-1-4)一一对应。

三、状态空间描述

常见的实用线性定常系统,可用式(2-1-7)的状态方程和式(2-1-8)的输出方程来描述:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2-1-7)$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (2-1-8)$$

式中:

$X(t)$ —— $n \times 1$ 的状态向量;

$U(t)$ —— $m \times 1$ 的控制向量,对单输入单输出系统,

$U(t)$ ——标量 $u(t)$;

$Y(t)$ —— $l \times 1$ 的输出向量,对单输入单输出系统,

$Y(t)$ ——标量 $y(t)$;

A —— $n \times n$ 的状态矩阵;

B —— $n \times m$ 的控制矩阵;

C —— $l \times n$ 的输出矩阵;

n ——系统的阶数;

m ——输入个数;

l ——输出个数。

应该指出的是,式(2-1-7)、(2-1-8)中的系数矩阵 A 、 B 、 C 的具体形式,即使对同一个系统,亦有多种不同的表示形式。下面将逐一简介之。

1. 若一个连续系统描述如下:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = u(t) \quad (2-1-9)$$

则引入 n 个状态变量:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$\vdots$

$$x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}$$

和 $\dot{x}_n(t) = -a_1 x_n(t) - a_2 x_{n-1}(t) - \dots - a_{n-1} x_2(t) - a_n x_1(t) + u(t)$

将上述 n 个一阶微分方程写成式 (2-1-7)、(2-1-8) 的形式, 得系数矩阵 A 、 B 、 C 如下:

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ C &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \end{aligned} \right\} \quad (2-1-10)$$

显然, 由式 (2-1-10) 描述的式 (2-1-7)、(2-1-8) 中, $Y(t)$ 、 $U(t)$ 皆是标量。我们将这种形式表示的状态方程、输出方程称为可控标准型。

2. 可控标准型的一般形式

将式 (2-1-6) 改写为:

$$\begin{aligned} G(S) &= \frac{y(S)}{u(S)} = \frac{z(S)}{u(S)} \cdot \frac{y(S)}{z(S)} \\ &= \frac{1}{S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n} (c_1 S^{n-1} + c_2 S^{n-2} + \dots + c_{n-1} S + c_n) \end{aligned}$$

对上式取拉氏反变换, 可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} z(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z(t) + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} z(t) + a_n z(t) &= u(t) \\ y(t) &= c_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z(t) + c_2 \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} z(t) + \dots + c_{n-1} \frac{d}{dt} z(t) + c_n z(t) \end{aligned} \right\} \quad (2-1-11)$$

同时引入一组状态变量:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= z(t) \\ x_2(t) &= \dot{z}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= z^{(n-1)}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2-1-12)$$

如此, 使得可控标准型的系数矩阵为:

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C &= [c_n \ c_{n-1} \ \cdots \ c_1] \end{aligned} \right\} \quad (2-1-13)$$

在推导系数矩阵 A 、 B 、 C 时, 虽则是引入中间变量 $z(t)$ 来实现的, 但这种可控标准型对于给定初值 $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\cdots$, $x_n(0)$ 时, 显然是合理的描述。

3. 可观标准型的一般形式

首先将式(2-1-6)化为高阶微分方程

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} y(t) + a_n y(t) \\ &= c_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) + c_2 \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} u(t) + \cdots + c_{n-1} \frac{d}{dt} u(t) + c_n u(t) \end{aligned} \quad (2-1-14)$$

考虑到非零初始条件的拉氏变换

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n} y(t)\right] = S^n y(0) - S^{n-1} \dot{y}(0) - S^{n-2} \ddot{y}(0) - \cdots - S y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \quad (2-1-15)$$

取式(2-1-14)非零初始条件的拉氏变换, 并将 S 同次项合并整理, 得:

$$\begin{aligned} y(S) &= \frac{c_1 S^{n-1} + c_2 S^{n-2} + \cdots + c_{n-1} S + c_n}{S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots + a_{n-1} S + a_n} u(S) \\ &+ \frac{1}{S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots + a_{n-1} S + a_n} \{ y(0) S^{n-1} + [\dot{y}(0) + a_1 y(0) - c_1 u(0)] S^{n-2} \\ &+ [\ddot{y}(0) + a_1 \dot{y}(0) + a_2 y(0) - c_1 \dot{u}(0) - c_2 u(0)] S^{n-3} + \cdots + [y^{(n-1)}(0) \\ &+ a_1 y^{(n-2)}(0) + \cdots + a_{n-1} y(0) - c_1 u^{(n-2)}(0) - c_2 u^{(n-3)}(0) - \cdots - c_{n-1} u(0)] \} \end{aligned} \quad (2-1-16)$$

若按下述方式取一组状态变量:

$$\left. \begin{aligned}
 x_n(t) &= y(t) \\
 x_{n-1}(t) &= \dot{y}(t) + a_1 y(t) - c_1 u(t) = \dot{x}_n(t) + a_1 x_n(t) - c_1 u(t) \\
 x_{n-2}(t) &= \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) - c_1 \dot{u}(t) - c_2 u(t) \\
 &= \dot{x}_{n-1}(t) + a_2 x_n(t) - c_2 u(t) \\
 &\vdots \\
 x_1(t) &= y^{(n-1)}(t) + a_1 y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} y(t) - c_1 u^{(n-2)}(t) \\
 &\quad - c_2 u^{(n-3)}(t) - \cdots - c_{n-1} u(t) = \dot{x}_2(t) + a_{n-1} x_n(t) - c_{n-1} u(t)
 \end{aligned} \right\} \quad (2-1-17)$$

然后, 对式 (2-1-17) 中的 $x_i(t)$ 表达式求 t 的一阶导数, 便可得到可观标准型描述的系数矩阵 A 、 B 、 C 如下:

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} \\
 C &= [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]
 \end{aligned} \right\} \quad (2-1-18)$$

当输入、输出量的各阶导数初值 $u(0)$ 、 $\dot{u}(0)$ 、 $\cdots$ 、 $u^{(n-2)}(0)$ 和 $y(0)$ 、 $\dot{y}(0)$ 、 $\cdots$ 、 $y^{(n-1)}(0)$ 已给定时, 选用可观标准型描述系统是合理的, 因为 n 个状态变量的初值 $X(0)$ 可由式 (2-1-17) 导出的矩阵方程来求得:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ \vdots \\ x_{n-1}(0) \\ x_n(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(0) \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -c_{n-1} & -c_{n-2} & \cdots & -c_2 & -c_1 \\ -c_{n-2} & -c_{n-3} & \cdots & -c_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \\ \ddot{u}(0) \\ \vdots \\ u^{(n-3)}(0) \\ u^{(n-2)}(0) \end{bmatrix} \quad (2-1-19)
 \end{aligned}$$

4. 对角标准型

当式 (2-1-6) 的特征方程

$$S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots + a_{n-1} S + a_n = 0 \quad (2-1-20)$$

有 n 个互质特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 时, 则式 (2-1-6) 可以展开成部分分式:

$$G(S) = \frac{r_1}{S - \lambda_1} + \frac{r_2}{S - \lambda_2} + \cdots + \frac{r_n}{S - \lambda_n} \quad (2-1-21)$$

式中:

$$r_i = \lim_{S \rightarrow \lambda_i} (S - \lambda_i) G(S) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-1-22)$$

若引入下述一组方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1(S)}{u_1(S)} &= \frac{1}{S - \lambda_1} \\ &\vdots \\ \frac{x_n(S)}{u_n(S)} &= \frac{1}{S - \lambda_n} \end{aligned} \right\} \quad (2-1-23)$$

则对式(2-1-23)取拉氏反变换, 并取 $x_1, \dots, x_n$ 为一组状态变量, 可得对角标准型描述的系数矩阵为:

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n] \end{aligned} \right\} \quad (2-1-24)$$

由上述介绍可看出: 对同一系统, 只要引入不同的一组状态变量, 便有一组不同的系数矩阵 A 、 B 、 C ; 给定不同的系统初值, 为方便求取状态变量的初值, 亦有相应的系数矩阵 A 、 B 、 C 。因此, 在仿真实现时, 就必须依具体条件和仿真要求来合理选择系统的状态空间描述形式。

§ 2-2 常用的数值积分法

由上节知, 连续系统的数学模型一般可用一阶微分方程组或状态方程来描述。因此, 为了在计算机上仿真连续系统, 首先要确定采用何种求解常微分方程的数值积分算法。

所谓数值积分法, 是指在求解一阶微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f[t, x(t)] \quad a \leq t \leq b \\ x(a) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-2-1)$$

的初值问题时, 逐个求出区间 $[a, b]$ 内若干个离散点 $a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$ 处的近似值 $x(t_1)$ 、 $x(t_2)$, $\dots$, $x(t_n)$ 。

常用的数值积分法基本上有三类, 即单步法、多步法和预估-校正法。下面, 将逐一加以说明。

2-2-1 单步法

解初值问题的数值积分法的共同特点是步进式, 即每一步都根据最初一点 x_r , 或最