高等学校教学用书

高等数学方法指导

李安昌　张晓宁　编

$$dF(x)=f(x)dx$$

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

高等数学方法指导

李安昌　张晓宁　编

中国矿业大学出版社

(苏)新登字第010号

内容简介

这是一本结合高等数学内容，突出以数学方法为指导的选修课教材。全书共分十章。第一章对高等数学中研究问题的思路、方法和技巧作了概括的归纳总结。第二至九章是针对高等数学中几部分主要内容进行方法分析和总结。第十章主要结合考题类型对标准化试题及综合性试题进行解法分析。

本书内容丰富，通过大量例题来说明所分析归纳的方法的正确性，使读者能更好地理解和掌握高等数学的内容。它既可作为高等学校工科各专业教材，又可供广大学习高等数学的读者参考。

责任编辑 周立吾
技术设计 冀锦蓉

高等学校教学用书
高等数学方法指导
李安昌 张晓宁编

中国矿业大学出版社出版
新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷
开本850×1168毫米 1/32 印张12.375 字数310千字
1992年2月第一版 1992年2月第一次印刷
印数：1—8200册

ISBN 7-81021-567-1

O·26 定价：4.85元

前　言

科学方法是打开科学殿堂大门的钥匙，是由必然王国通向自由王国的桥梁。科学的发展都与科学方法的发展联系在一起，任何科学内容都包含着一定的科学方法，科学方法是从科学内容中提炼出来的，而科学方法的应用，又会促进科学内容的发展。

高等数学在高等工科学校的教学计划中是一门重要的基础理论课程，它的内容和方法是学生必备的重要基础。怎样才能学好它呢？应该象爬山一样，既要循序前进，步步登高；又要不断居高临下，回头展望，才能饱览无限风光。学习高等数学也是一样，既要有以内容为体系的横向学习，还要有以方法为线索的纵向归纳。只有把内容和方法结合起来学习，才能更好地掌握数学这个重要的工具。为此，我们与高等数学课相配合，编写了《高等数学方法指导》这门选修课教材。这本教材可以配合高等数学课分两学期使用，但要比高等数学上课滞后一段时间。在使用时，碰到个别未学过的内容和例子，可以越过去或作调整，对教材使用影响不大。

在编写《高等数学方法指导》这本书时，力求突出方法指导的特点，采用虚实结合的方法，既有内容概括总结，也有典型例题的分析和求解，把指导掌握数学内容和数学方法结合起来，使学生对内容的理解不仅懂得“是什么”，而且认识“为什么”；对解题不仅知道“怎样作”，而且还能“灵活作”，以达到巩固提高灵活运用高等数学知识和选择最简方法解题的能力。

全书共分十章。第一章对高等数学中研究问题的思路、方法

和技巧作了概括的归纳和总结。第二至九章主要是结合高等数学的具体内容和典型例题进行分析。在研究例题时，一般是先求解后说明，在说明中，既有解题思路分析，也有简单小结，还有带启发性的思考问题。第十章主要结合考题类型对标准化试题及综合性试题进行解法分析。

这本书既可供本科生作为任选课教材使用，也可供学生学习和复习高等数学参考，对准备应考研究生的读者，也是一本有益的复习参考资料。

本书第一、二、三、六、九章由李安昌编写，第四、五、七、八、十章由张晓宁编写，全书由李安昌负责审查定稿。在编写过程中，许志成老师一块参加讨论，并系统地审阅了各章内容，提出了许多宝贵意见，我们向他表示感谢。该书由于编写时间仓促及我们的水平有限，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1991 年 5 月

目　录

第一章　高等数学研究问题的思路、方法和技巧

高等数学是高等工科院校的重要基础理论课，要掌握好这个工具，必须在学习新知识的同时，注意总结高等数学研究问题的思路、方法和技巧，把学习数学内容和数学方法融为一体。在这一章中，将对高等数学中研究问题的思路、方法和技巧作一个概括介绍，并结合一些典型实例进行分析。

第一节　研究三基内容的基本方法

高等数学中的三基内容是指基本概念、基本理论和基本运算，掌握好三基内容是学习高等数学的基本要求。为了学好三基内容，必须了解研究三基内容的基本方法。

一、研究基本概念的方法

基本概念中最主要的问题是数学定义，数学定义是数学模型的一种。怎样建立数学模型，熟悉数学定义的一般方法，是加深对基本概念掌握的重要问题。

1．*建立数学模型*

数学模型是一种反映特定的具体实体内在规律性的数学结构。它是从客观原型中抽象概括出来的，具有形式化、符号化、简捷化的特点，而且能返回到原型中去，在理论上和应用上都有重要价值。

在高等数学中，许多基本概念都是这种数学模型。在掌握这些基本概念时，要学习它如何从实际问题中，通过抽象概括建立起来的方法，还要学习如何将它用到实际问题中去分析问题和解决问题。

例如，导数定义

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

是从研究直线运动的瞬时速度和曲线的切线斜率等问题中抽象出来的，这个数学模型描述的是函数变化率，它的数学结构是一个增量比的极限。此概念在推导导数基本公式、运算法则、证明微分中值定理，以及导数的各种应用问题中，它都起着非常重要的作用。可以说导数定义是建立一元函数微分学的基础。以后在建立微积分基本公式(即牛-莱公式)、多元函数偏导数、列微分方程等问题中，也都用到这个基本概念。

通过以上分析可以看出，导数定义是从描述有关函数变化率的实际问题中抽象出来的一个数学概念，反过来又用这个概念去研究和解决有关函数变化率的大量理论问题和实际问题。

又如，定积分定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

是从研究曲边梯形面积和变速直线运动的路程等问题中抽象出来的，它的数学结构是一个乘积和式的极限。利用这一基本概念，建立了积分学的基本理论，然后利用它讨论和研究了大量求几何方面和物理方面的非均匀结构的整体量问题。定积分定义的数学结构，也是定义重积分和线面积分的基本形式，可以说后面的一些积分概念都是定积分概念的推广。

通过以上分析可以看出，定积分定义与导数定义一样，是从研

究求非均匀结构的整体量的实际问题中抽象出来的一个数学概念。反过来又可用这一概念去研究与求非均匀整体量有关的大量理论问题和实际问题。同时定积分定义是积分学推广发展的基础。

2. 数学定义的方法

定义的作用是回答“某对象是什么”的问题，它是最基本的概念之一。从定义出发，可以建立一类问题的基本理论与基本运算公式。在高等数学中，每引进一个新的概念，都要抽象进行数学定义。掌握数学中常用的各种定义方法，对于加深理解数学概念和更好地利用它去研究新问题都是非常重要的。下面是数学中常用的定义方法的几种形式：

1）演绎型定义法

这种定义方法是从一类对象中界定某一类特殊对象。例如，用极限式 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 来定义函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，这就意味着函数 $f(x)$ 满足下列三个条件：

$f(x)$ 在点 x_0 有定义；

当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限；

在点 x_0 的极限值等于函数值 $f(x_0)$。

这里实际上是先认定了函数与极限概念，然后再用这样一个特殊的极限式来定义连续性概念。

2）归纳型定义法

这种方法定义的对象，是由若干或一族特殊对象归纳而成。例如，先定义一阶导数，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，依次再用导数的导数定义：

$y''=(y')'$，$y'''=(y'')'$，…，$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ 等等。根据这种定义方法，一般高阶导数，就可以用归纳法求出。

3）构造型定义法

这种定义本身，在原则上可以给出所定义对象的构成或求法。在高等数学中，这种定义方法很多。例如，导数定义为增量比的极限，定积分定义为乘积和式的极限。从定义出发就可以计算出导数和定积分，不过一般按定义计算都比较困难罢了。再如，微分、切线、曲率等概念的定义也是构造型的。

4）描述型定义法

这种定义方法是指出定义对象所应满足的条件，从而给出确定它的方法，但有时还不能根据定义去直接判断在某一场合所讨论的对象是否存在。例如，函数和极限的定义，方程解的定义等等，皆属描述型定义法。

在数学中某些概念的定义，往往依适当的顺序构成一个逻辑链条，前后紧密关联。例如，用极限定义导数，用导数定义偏导数，用偏导数定义梯度等等。这种逻辑链条的顺序有时可以改变，但多数是不能改变的。在掌握这种概念之间的逻辑关系时，要特别注意防止发生“循环定义”，即定义概念A时用到概念B，而定义概念B时又用到概念A。例如，“无穷小量是某一过程下极限等于零的变量；当 $n\to\infty$ 时，$\alpha_n-\alpha$ 是无穷小量，称 α_n 的极限等于 α”，这样就是用极限定义无穷小，反过来又用无穷小定义极限。这种“循环定义法”是不能允许的。

在数学中某些概念的定义是互相否定的，其中一个概念被定义，另一个就直接作为反面也被定义。例如，连续与间断；收敛与发散等就是这样。但需注意，是否为互相否定的概念，不能只从字面上去看，要看它们的实际含义。例如，增函数与减函数；偶函数与奇函数；无穷小量与无穷大量等都不是互相否定的概念。也就是说：非增函数并不一定是减函数；非偶函数也不一定是奇函数；非无穷小量多数都不是无穷大量。实际情况就是这样。

二、研究基本理论的方法

高等数学中的基本理论，主要包括一些重要定理和公式。它

们的表述多以命题形式出现。怎样分析和证明这些命题是学习高等数学的难点之一。为此我们必须掌握研究基本理论的基本方法。

1. 数学命题的形式

对数学对象作出的某种判断(无论真与假)称为**数学命题**。要肯定一个命题为真,应当给出证明。要说一个命题是假,通常的办法是举出反例。只有已经被证明正确的重要的命题才能作为定理。

1) 命题的四种形式及关系

设 A、B 表示陈述语句,$\overline{A}$ 表示 A 的否定,$\overline{B}$ 表示 B 的否定,则由于条件与结论的不同,总共可以构成四种不同形式的命题:

原命题:“若 A,则 B”;

逆命题:“若 B,则 A”;

否命题:“若 $\overline{A}$,则 $\overline{B}$”;

逆否命题:“若 $\overline{B}$,则 $\overline{A}$”.

以上四种命题,其中一个是真的,未必其它都真;一个是假的,也未必其它都假。但是它们之间还是有关系的。其关系是:互为逆否的命题(即原命题与逆否命题;逆命题与否命题)必然同真同假。也就是说,它们是等价命题。其论证如下:

事实上,设“若 A,则 B”真,即“有 A 必有 B”,那么“没有 B 就没有 A”,所以“若 $\overline{B}$,,则 $\overline{A}$”真;反过来,设“若 $\overline{B}$,则 $\overline{A}$”真,由前面所证得知,“若 $\overline{\overline{A}}$,则 $\overline{\overline{B}}$”也真,但 $\overline{\overline{A}}$ 就是 A,$\overline{\overline{B}}$ 就是 B,所以“若 A,则 B”真。从而原命题与逆否命题等价。

同理,可以论证逆命题与否命题也等价,请读者自证。

例如,原命题:“连续函数是可导函数”,命题为假;

逆命题:“可导函数是连续函数”,命题为真;

否命题:“非连续函数是不可导函数”,命题为真;

逆否命题:“不可导函数是不连续函数”,命题为假。

又如，原命题："单调有界序列必有极限"，命题为真；

逆命题："有极限必为单调有界序列"，命题为假；

否命题："非单调有界序列必无极限"，命题为假；

逆否命题："没有极限必非单调有界序列"，命题为真。

2) 充分条件与必要条件

如果命题A成立，必然得出命题B成立。简单地说，就是"有A必有B"，称A是B的充分条件，B是A的必要条件。记成 $A \Rightarrow B$.

如果A,B互为充分必要条件，又常叙述为"当且仅当A成立时B成立"，或"A是B的充要条件"，或"B是A的充要条件"，或"A等价于B"，或"A相当于B"。记成 $A \Longleftrightarrow B$.

例如：$x=y=0 \Longleftrightarrow x^2+y^2=0$；

$x=\sin\theta, y=\cos\theta \Longleftrightarrow x^2+y^2=1$；

$|x-x_0|<\delta \Longleftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta$；

$f(x)$可导$\Longleftrightarrow f(x)$可微。

3) 两个逻辑量词

为了书写简单起见，再介绍两个逻辑量词。

符号 $\forall$ 叫全称量词，表示"对每一个……"，或"对任意的……"，或"对所有的……"；

符号$\exists$叫存在量词，表示"存在……，使得……"。

其中，$\forall$是Any(每一个，任何)或All(所有的)的字头A的倒写；$\exists$是Exist(存在)的字头E的反写。

例如，"存在正实数x，使得$x^2-3x+2>0$"，可以表示成：

$$\exists x>0, x^2-3x+2>0.$$

又如，"对任意给定的正数$\varepsilon>0$，存在正数$N>0$，使得当$n>N$时，有$|u_n-A|<\varepsilon$"，可以表示成：

$$\forall \varepsilon>0, \exists N>0, \text{当 } n>N \text{ 时}, |u_n-A|<\varepsilon.$$

使用这两个逻辑量词时，应当注意下列两点：

(1) 所考虑的对象应当写在$\forall$或$\exists$的右边，而不能写在左

边，即不能写 $x\forall$ 或 $x\exists$.

（2）在同一个命题中，如同时使用 $\forall$、$\exists$，它们的次序不能随便交换. “$\forall x, \exists y, \cdots$”表示“对于每一个 x，都存在 y，使得……”；“$\exists y, \forall x, \cdots$”表示“存在 y，使得对每一个 x，都……”。如设 $x, y \in \mathbf{R}$（实数集），则有

$$“\forall x, \exists y, x<y”\text{真；}$$

$$“\exists y, \forall x, x<y”\text{假。}$$

2. 常用的几种证题方法

高等数学中研究基本理论的主要方法是证明问题，证明问题的方法没有固定的程序，证题的技巧又灵活多样，因而和一般计算题比较，难度较高，不易掌握。下面介绍几种常用的证题方法，以便在寻求基本思路和探索规律方面起到一定的引导作用，尽可能地减少盲目性，提高自觉性。

1）综合法

这种方法的基本思路是顺着想。由已知条件出发，运用已有的定义、定理、公式、性质推导出所要求的结论。即由条件推可知，再推可知，…，直到结论。这种“由因导果”的方法，叫做**综合法**。

运用综合法证明问题最广泛，但在使用这种方法时，必须注意充分与必要的关系，每一步都要明确是由什么命题推证什么命题，依据是什么，这种特点充分表现了数学的严密性和逻辑性。

例如，设 $f_n(x)=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{层}}x, x\in\mathbf{R}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

事实上，由已知条件可知序列有递推关系式：

$$f_n(x)=\sin f_{n-1}(x)$$

当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 时，因有

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n-1}(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

所以 $\{f_n(x)\}$ 为递减有界序列，故

$$\exists A, \lim_{n\to\infty}f_n(x)=A$$

再对递推关系式关于 n 取极限，得 $A=\sin A$，解出 $A=0$；

当$(2k-1)\pi<x<2k\pi$ 时，令 $y=x+\pi$，则 $2k\pi<y<(2k+1)\pi$，而

$$f_n(x)=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{层}}(y-\pi)=-\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{层}}y=-f_n(y)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=-\lim_{n\to\infty}f_n(y)=0$$

又如，若函数 $f(x)$对任意实数 x_1,x_2 有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$$

且 $f'(0)=1$，证明 $f'(x)=f(x)$。

事实上，由已知条件：当 $x_1=0$，x_2 为任意 $x\in\mathbf{R}$ 时，有

$$f(0+x)=f(0)f(x)$$

因 $f'(0)=1$，所以 $f(x)$不会恒为零，由上式可得 $f(0)=1$. 因此就有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)f(0)}{\Delta x}\\&=f(x)\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\\&=f(x)f'(0)\\&=f(x)\end{aligned}$$

2）分析法

这种方法基本思路是逆着想。先假设结论正确，运用已有的定义、定理、公式、性质，从后向前一步一步地分析，直至推出已知条件，即由结论找需知，再找需知，…，直至已知. 这种“执果溯因”的方法，叫做**分析法**。

分析法是探求证题途径的重要方法之一。它的优点在于思考过程比较自然，目的明确，较为容易找到证题的思路，但缺点是分析的过程叙述起来往往比较繁琐，因而分析过程多在草稿纸上进行，不正式写出。在实际解题时，特别对一些较难的问题，常常先用分析法寻找解题的途径，然后再用综合法叙述解题过程，这种方法也可叫做**分析综合法**。

例如，设 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时连续，且 $f(0=0$；而在 $x>0$ 时有单调递增导数 $f'(x)$，试证 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $x>0$ 时是单调递增的。

事实上，欲证 $g(x)$ 为单调递增，只需证明 $g'(x)\geqslant 0$ 就行了，而由于

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

因此就归结为证明 $f(x)\leqslant xf'(x)$。利用拉格朗日中值定理及已知条件，有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x)-f(0)\\&=f'(\xi)(x-0)\\&\leqslant xf'(x)\quad(\because \xi\in(0,x),f'(x)\text{单调递增})\end{aligned}$$

因此 $g(x)$ 在 $x>0$ 时是单调递增的。

又如，用极限定义证明一数列或函数有已知极限时，多采用分析综合法证明。比如证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+2n}=1$，其方法如下：

$\forall\varepsilon>0$，欲使不等式

$$\left|\frac{n^2}{n^2+2n}-1\right|<\varepsilon$$

成立，由

$$\left|\frac{n^2}{n^2+2n}-1\right|=\left|\frac{-2n}{n^2+2n}\right|<\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}$$

所以只需$\frac{2}{n}<\varepsilon$，即$n>\frac{2}{\varepsilon}$成立。取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，于是当$n>N$时，就有$n>\frac{2}{\varepsilon}$，从而保证了希望的不等式成立。

综合以上分析，就有

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，$\left|\frac{n^2}{n^2+2n}-1\right|<\varepsilon$，根据极限定义，有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n}=1$.

3）反证法

这种证法是从反面考虑问题。先假设在已知条件成立的情况下，要证的结论不成立，而后从已知条件出发，运用基本概念和基本定理，通过逻辑推理导出矛盾（或与已知条件矛盾；或与某一已知概念、公式、公理、定理等矛盾；或自相矛盾等），这样则否定假设，从而肯定原结论正确。

例如，证明$\sin x$不是x的多项式。

事实上，利用反证法，设$\sin x$是x的多项式，不妨记此多项式为n次多项式$P_n(x)$，即$\sin x=P_n(x)$，则有

$$P_n(k\pi)=\sin k\pi=0\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$$

于是n次多项式$P_n(x)$有无穷多个不同实根，这与n次多项式最多只有n个不同实根相矛盾，由此证明了$\sin x$不是x的多项式。

又如，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$不存在　（$n$为自然数）。

事实上，利用反证法，假设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$存在，且设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=A$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sin(n+1)=A$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin(n-1)=A$$

又因为