小斯特西 著

HEFANYINGDUI

WULIXUEZHONG

DEBIANFENFA

# 核反应堆物理学中的变分法



原子能出版社

## 内 容 简 介

本书比较系统地阐述了变分方法的一般理论，综合了近十几年来广义微扰理论和变分法在核反应堆物理学中应用的新成果。内容包括对反应堆各种积分量进行精度较高的变分估算，以及中子输运问题的变分形式、综合近似方法等，并通过一些具体例子阐明了方法的应用。

本书可供从事反应堆物理与变分法研究的科技工作者及高等院校有关专业的教师及研究生参考。


WESTON M. STACEY, JR.

Variational Methods in Nuclear Reactor Physics

Academic Press 1974

**核反应堆物理学中的变分法**

小斯特西 著

杜 祥 琬 译

姚 增 华 校

原子能出版社出版

(北京 2108 信箱)

国防科委印刷厂印刷

☆

新华书店北京发行所发行 · 新华书店经售

开本 787×1092 $^{1}/_{32}$ · 印张 $7^{5}/_{8}$ · 字数 169 千字

1982年 2 月第一版 · 1982年 2 月第一次印刷

印数001—1,300 · 统一书号：15175·298

定价：0.95元

# 序

本书给出的变分法资料是过去10—15年间由许多在核反应堆物理领域内工作的人积累起来的。从正文中可以看出，他们的工作显然使作者受益不浅。这些资料中的大部分曾经在技术刊物和报告上发表过，本书的目的之一就是收集和编纂这些资料。内容的选择基于这样一种意图：包括全部有关的思想而又避免不必要的累赘，当然，根据作者在反应堆物理方面从事变分法工作的经验，选择是有所偏重的。对于在正文中没有明白阐述的工作，书中给出了广泛的参考文献。

对于掌握了正规大学的微分方程和矩阵代数知识并熟悉算子概念及其应用的人，本书的数学内容是不难理解的，虽然如此，具有一些变分演算的知识还是有帮助的。同样地，相当于大学反应堆物理专业毕业水平的堆物理知识会有助于理解各种应用的物理意义，但对于理解数学方法并不是必需的。根据需要，书中阐述了一些堆物理的内容，因此，没有这方面的预备知识也可以阅读本书。简言之，本书要求读者大致具有理工科大学毕业生应有的基础。

本书可望成为工程师和科学工作者的参考书。作者的希望和写作本书的动机，是为堆物理工作者编纂在堆物理方面发展起来的各种变分法，并使这个理论更易于为其它工程和科学方面的工作者所接受。

当作者在诺尔斯原子动力实验室（美国）和阿贡国立实验室（美国）工作时，曾有机会熟悉变分法方面的工作，作者愿对此表示感谢。最后，作者要对 Cyrilla Hytry 小姐在准备最后手稿时所作的出色工作表示真诚的赞赏。

# 目　　录

# 引　言

本书阐述那些变分起源的数学方法，这些方法对得到科学和工程中一些问题的近似解是很有用的。利用变分原理①的稳定性性质导出近似解的这些变分法（Variational Method），在某种意义上是对变分演算（Calculus of Variations）的数学内容的补充；变分演算的目的是确定具有稳定性质或极值性质的给定泛函的数学结果。变分法和变分演算之间的区别首先是着重点和目的不同。变分演算的标准课题不在本书中阐述。变分演算已有很长的历史，这方面有许多好书（例如文献[1—5]）。

变分问题使数学家们感兴趣已有几百年了。约翰·伯努利在1696年提出求一个物体在无摩擦情况下以最短的时间从一给定点下降到另一点的路径的问题。他和他的兄弟杰姆斯（James），以及莱布尼兹和牛顿求出了解，这是一个摆线路径，即所谓“最速落径”。力学中的最小作用量原理和光学中的费尔马（Fermat）最小时间原理均属于最早的变分原理。早期的工作者是这样的乐观，以至数学家欧拉曾因在1744年表达了下述看法而受到赞誉：“造物主所制作的宇宙的结构是这样的尽善尽美，以至世界上没有任何事物不显示出极大或

① 本书中“变分原理”（Variational Principle）一词与“变分泛函”（Variational Functional）同义（参见G.I.贝尔与S.格拉斯登《核反应堆理论》一书§6.4）——译者注

极小的性质。因之，毫无疑问，世界上的一切结果都可以用极大和极小方法从其终极原因及其有效原因中导出来。”

虽然在这个工作更加繁重的世纪中工作者不再指望取得这种夸大的成就，但他们的热情并未减退多少。对变分原理及其实际应用的探索在继续进行着。特别是，变分法能够应用于无极值（极大或极小）解的问题，这就大大地开拓了它们的实际应用。本书处理的是稳定变分问题，而不是较局限的极值变分问题。[在米赫林（Mikhlin）的书[ 6 ]中讨论了极值变分问题。]

核反应堆物理学是变分方法得到广泛应用和发展的一个工程学科。然而，在堆物理中发展起来的这一方法的用途却远远超出该工程分支。因此，虽然本书描述的理论与方法起初是为了反应堆物理学中的应用而发展或改造的，但它们是足够普遍的，可以用于其它的科学和工程分支。本书首先用普遍的线性算子推导这种方法，从而强调了这种普遍性，然后再去讲各种应用。

本书包含了变分法理论的完整描述，它在堆物理中发展，然而却用更普遍的语言来表达。还选择了许多应用，以便在一些特例中进一步发展理论，展示变分法在堆物理中应用的全貌，并提示一些在其它学科中类似的应用。

前两章处理的问题是，当描述物理系统的方程的近似解已知时，如何应用变分原理得到积分量的估计值。这些变分估计值准确到近似解与精确解之差的二阶量。对于那些可以表示成直接解或伴解的线性泛函，直接解与伴解的双线性泛函，或者这些泛函中任意一种的比值的积分量，给出了估计它们的值的变分原理。发展了广义微扰理论，它能估计物理

系统的任何变化对感兴趣的积分量的影响，这时既考虑物理系统的变化，又考虑它所带来的解的变化，但后者却不必实际计算出来。这些方法被应用于各种问题，包括核反应堆的中子共振吸收，中子反应率和反应性价值以及辐射的传输及屏蔽。

第三章的课题是建立这样的变分原理，它要把直接描述物理问题的控制方程、外边界条件、初始条件和内部连续条件在一个式子中体现出来。这个题目先对一般的时间相关线性物理过程推导，然后再专门用于中子动力学和中子输运理论。

第四章的主题是从第三章的变分原理导出的综合近似。这些方法本质上接近加权剩余法[7]，它们的基础是：把解用某些独立变量的已知函数展开，并得到一个关于未知展开系数的简化方程组。首先推导综合近似的一般理论，然后对中子 $P_1$ 扩散理论详细地推导空间综合近似。作为特殊情况，引进了多道综合近似和有限单元近似。对中子 $P_1$ 扩散理论推导了能谱综合近似，并对中子输运理论推导了角度综合近似。

最后一章包括了基本变分理论的统一推广。推导了变分原理的典型变换与对合变换，并说明这些变换可以给出反应堆物理的各种变分公式之间的联系。还发展了变分场论，它把变分理论与哈密顿-雅可比理论并与最大原则和动态规划的最佳化理论联系起来。

## 参 考 文 献

[1] G. A. Bliss, *Lectures on the Calculus of Variations*. Univ. of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1946.

[ 2 ] A. R. Forsyth, *Calculus of Variations*. Dover, New York, 1960.
[ 3 ] L. E. Elgolc, *Calculus of Variations*. Addison–Wesley, Reading, Massachusetts, 1962.
[ 4 ] I. M. Gelfand and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
[ 5 ] H. Rund, *The Hamilton–Jacobi Theory in the Calculus of Variations,* D. Van Nostrand Co., Ltd., London, 1966.
[ 6 ] S. G. Mikhlin, *Variational Methods in Mathematical Physics*. Macmillan, New York, 1964.
[ 7 ] B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, New York, 1972.

# 第　一　章

# 变分估算和微扰理论

估计物理系统的积分性质是应用科学中经常碰到的问题。通常用一个泛函来立出某一积分性质的数学表达式，这个泛函依赖于一个或数个函数，这些函数满足该物理系统所服从的方程。如果这些方程的精确解可以求出，积分性质就可以容易地计算出来。经常出现这样的情况：求精确解要么不可能，要么不经济，而近似解却很容易得到。如果在计算从数学上定义了积分性质的泛函时，用这些近似解代替精确解，则在积分性质的值中带来的误差一般是近似解相对于精确解的误差的一阶量。

如果对于积分性质能够写出一个变分原理，则可以用近似解来计算变分原理以求得积分性质的估计值，后者可以准确到近似解误差的二阶量。在本章中，对于由非齐次和齐次方程描述的物理系统讨论了变分原理的这个性质，并利用这一性质来发展广义微扰理论。

## §1.1　源问题

考虑由方程（或方程组）

$$A(\rho)\phi(\rho)=S(\rho) \tag{1.1.1}$$

加上适当的边界条件所确定的物理系统。在(1.1.1)式中，$A$ 是一个线性算子；$\phi$ 是分布函数，将称为通量；$S$ 是一个固定源；$\rho$ 代表所有独立变量。

用于堆物理的变分原理是从 Roussopolos[1] 或 Schwinger（见 Levine 和 Schwinger[2]）的工作发展起来的，在堆物理中的首先应用属于 Selengut[3] 和 Francis[4] 等人。后来的工作者[5-10]推广并开拓了这些早期的变分原理。

**通量的线性泛函**

假设我们要估计某个可以写成通量的线性泛函的积分特性，例如物理系统的特征分布函数 $\sum$（例如反应截面①）与(1.1.1)式的解的内积②

$$G_1[\phi]=\langle\sum\phi\rangle, \qquad (1.1.2)$$

并且是用与(1.1.1)式的解差一个未知函数 $\delta\Psi\equiv\Psi-\phi$ 的函数 $\Psi$ 来估计它。显然，估计值

$$G_1[\Psi]=\langle\sum\Psi\rangle=\sum\langle\phi\rangle+\langle\sum\delta\Psi\rangle=G_1[\phi]+\langle\sum\delta\Psi\rangle$$

的误差是 $\delta\Psi$ 的一阶量。

为了用函数 $\Psi$ 得到更准确的估计值，必须对 $G_1[\phi]=\langle\sum\phi\rangle$ 建立一个变分原理。Pomraning[7] 和 Lewins[9] 提出了一种实现这一点的系统方法。在 $G_1$ 上加上一个尚未规定的函数 $\Psi^*$ 与控制方程(1.1.1)的内积

$$F_1[\Psi^*,\Psi]=G_1[\Psi]+\langle\Psi^*,(S-A\Psi)\rangle$$
$$=\langle\sum\Psi\rangle+\langle\Psi^*,(S-A\Psi)\rangle. \qquad (1.1.3)$$

$F_1$ 成为 $G_1$ 的变分原理所必须满足的要求是（1）$F_1$ 对

---

① 当 $\sum(\rho)=\delta(\rho-\rho_0)$ 时，这个形式可以用来给出解 $\phi(\rho_0)$ 的估计值。

② 内积符号＜ ＞表示对独立变量的集合 $\rho$ 中的所有离散变量求和及所有连续变量积分。

满足(1.1.1)式的函数 $\Psi_s=\phi$ 是稳定的，(2) $F_1$ 的稳定值为 $G_1[\phi]=\langle\sum\phi\rangle$。

首先研究 $F_1$ 的稳定性。对任意的 $\delta\Psi$ 和 $\delta\Psi^*$，令

$$\delta F_1\equiv\langle\sum\delta\Psi\rangle-\langle A^*\Psi^*,\delta\Psi\rangle+\langle\delta\Psi^*,(S-A\Psi)\rangle=0$$

导致下列要求①：

$$A\Psi_s=S \tag{1.1.4}$$

和

$$A^*\Psi_s^*=\sum=G_1'[\Psi_s], \tag{1.1.5}$$

式中 $G_1'$ 表示 $G_1$ 对自变量函数 $\Psi$ 的函数导数。

显然，$\Psi_s=\phi$。(1.1.5) 式规定了伴函数 $\Psi_s^*$，就源 $S$ 对泛函 $G_1[\phi]=\langle\Sigma\phi\rangle$ 的值的影响而言它是一个价值函数。利用(1.1.4)和(1.1.5)式，有

$$F_1[\Psi_s^*,\Psi_s]=\langle\sum\phi\rangle=\langle\sum\Psi_s\rangle=\langle\Psi_s^*S\rangle. \tag{1.1.6}$$

因此，$F_1$ 是$\langle\sum\phi\rangle$的变分原理。

其次，证明 $F_1[\Psi^*,\Psi]$ 给出的 $\langle\sum\phi\rangle$ 的估计值准确到 $\delta\Psi\equiv\Psi-\Psi_s$ 和 $\delta\Psi^*=\Psi^*-\Psi_s^*$ 的二阶量。$\delta F_1=0$ 已隐含了这个结论，不过将明确地证明。

$$\begin{aligned}F_1[\Psi^*,\Psi]&=\langle\sum\Psi_s\rangle+\langle\sum\delta\Psi\rangle+\langle(\Psi_s^*+\delta\Psi^*),(S\\&\quad-A(\Psi_s+\delta\Psi))\rangle\\&=\langle\sum\Psi_s\rangle+\langle(\sum-A^*\Psi_s^*),\delta\Psi\rangle+\langle\Psi^*,(S\\&\quad-A\Psi_s)\rangle-\langle\delta\Psi^*,A\delta\Psi\rangle.\end{aligned}$$

根据(1.1.4)和(1.1.5)式，第二项和第三项为零。于是，

$$F_1[\Psi^*,\Psi]=G_1[\Psi_s]-\langle\delta\Psi^*,A\delta\Psi\rangle=\langle\sum\Psi_s\rangle$$

① 只有当双线性伴随式(Concomitant)等于零时，$\langle\Psi^*,A\delta\Psi\rangle=\langle A^*\Psi^*,\delta\Psi\rangle$ 才满足，这就确定了函数 $\Psi^*$ 的适当的边界条件。总是假定双线性伴随式等于零。价值函数 $\Psi^*$ 的物理意义的讨论见 Lewins[11]。

$$-\langle\delta\Psi^*, A\delta\Psi\rangle. \qquad (1.1.7)$$

(1.1.3) 式的变分原理 $F_1$ 给出的估计值对试探函数 $\Psi^*$ 和 $\Psi$ 的幅度是敏感的，对它们随各独立变量的分布也是敏感的。$F_1$ 的稳定性可用来选择这些试探函数的"最佳"规范化。现写出两个新的试探函数，它们是任意幅度 $C^*$ 和 $C$ 分别与 $\Psi^*$ 和 $\Psi$ 的乘积，即 $\chi^*=C^*\Psi^*$ 和 $\chi=C\Psi$。要求 $F_1[\chi^*,\chi]$ 对 $C^*$ 和 $C$ 的任意变化是稳定的，导致规范化

$$C^*=\langle\sum\Psi\rangle/\langle\Psi^*, A\Psi\rangle, C=\langle\Psi^*S\rangle/\langle\Psi^*, A\Psi\rangle.$$

这些幅度函数既可以用来规范试探函数 $\Psi^*$ 和 $\Psi$，也可以直接放到变分原理中去：

$$F_1[C^*\Psi^* . C\Psi]=\langle\sum\Psi\rangle\langle\Psi^*S\rangle/\langle\Psi^*, A\Psi\rangle$$
$$\equiv J_1[\Psi^*, \Psi]. \qquad (1.1.8)$$

(1.1.3) 式给出的变分原理的 $F_1$ 形式称为拉格朗日 (Lagrangian) 型。(1.1.8) 式的 $J_1$ 形式是所谓的史温格 (Schwinger) 型。这两种形式在下述意义上等价：对于 (1.1.4) 和 (1.1.5) 式给出的同一函数 $\Psi_s^*$ 和 $\Psi$，它们是稳定的，并有同样的稳定值 $\langle\sum\phi\rangle=\langle\Psi_s^*S\rangle$。史温格型对试探函数的规范化不敏感，因此使用起来更方便。

**伴函数的线性泛函**

(1.1.6) 式表明反应率类型的积分参数可以由两种不同的数学形式等价地描述，一种包含有 (1.1.1) 式的通量解 $\phi$ 的线性泛函，另一种包含有 (1.1.5) 式的伴解 $\phi^*$ 的线性泛函。因此，研究形如

$$G_2[\phi^*]=\langle\phi^*S\rangle \qquad (1.1.9)$$

的线性泛函的估算问题是有某种动机的，$\phi^*$ 为方程

$$A^*(\rho)\phi^*(\rho)=\sum(\rho) \qquad (1.1.10)$$

的伴解。

按照上述方法，在 $G_2$ 上加上（1.1.10）式与待定函数 $\Psi$ 的内积即可建立 $G_2[\phi^*]$的变分原理：

$$F_2[\Psi^*,\Psi]=G_2[\Psi^*]+\langle(\Sigma-A^*\Psi^*),\Psi\rangle=\langle\Psi^*S\rangle$$
$$+\langle(\Sigma-A^*\Psi^*),\Psi\rangle \qquad (1.1.11)$$

与(1.1.3)式比较可见，$F_1$ 和 $F_2$ 是相同的，因此，对 $F_1$ 导出的稳定性质对 $F_2$ 也可以得到。这个结果正如所期望的那样，给定 $\phi^*$ 和 $\phi$ 的对偶空间关系，只要重新排列(1.1.3)式的各项就可以立刻写出来。当然，$F_2$ 的史温格型与(1.1.8)式的 $J_1$ 相同。

**通量的线性泛函之比**

在许多实际应用中(这些应用的例子将在第二章给出)，反应率比，或更一般些，(1.1.1) 式的通量解 $\phi$ 的线性泛函之比是个感兴趣的量。这个比本身也是一个泛函。例如，考虑

$$G_3[\phi]=\langle\Sigma_i\phi\rangle/\langle\Sigma_j\phi\rangle, \qquad (1.1.12)$$

式中 $\Sigma_i$ 和 $\Sigma_j$ 是表示系统的不同物理性质的分布函数（室如反应截面)。

如果用试探函数 $\Psi$ 来估计 $G_3[\Psi]$，则误差是 $\delta\Psi=\Psi-\phi$ 的一阶量。

按照上述方法，在 $G_3$ 上加上待定函数 $\theta^*$ 与(1.1.1) 式的内积即可建立 $G_3$ 的变分原理：

$$F_3[\theta^*,\Psi]=G_3[\Psi]+\langle\theta^*,(S-A\Psi)\rangle$$
$$=\frac{\langle\Sigma_i\Psi\rangle}{\langle\Sigma_j\Psi\rangle}+\langle\theta^*,(S-A\Psi)\rangle. \qquad (1.1.13)$$

使 $F_3$ 稳定的函数 $\Psi_s$ 和 $\theta_s^*$ 由下述要求确定：

$$\delta F_3 = 0,$$

对任意的变分 $\delta\theta^*$ 和 $\delta\Psi$，此式给出

$$A\Psi_s = S \tag{1.1.14}$$

和

$$A^*\theta_s^* = \frac{\sum_i}{\langle\sum_j\Psi_s\rangle} - G_3[\Psi_s]\frac{\sum_j}{\langle\sum_j\Psi_s\rangle} = G_3'[\Psi_s]. \tag{1.1.15}$$

由 (1.1.14) 和 (1.1.15) 式可见，$F_3$ 的稳定值为

$$F_3[\theta_s^*, \Psi_s] = \frac{\langle\sum_i\Psi_s\rangle}{\langle\sum_j\Psi_s\rangle} \equiv \frac{\langle\sum_i\phi\rangle}{\langle\sum_j\phi\rangle} \equiv G_3[\phi]. \tag{1.1.16}$$

因此，$F_3$ 是 $G_3$ 的变分原理，并提供一个 $G_3$ 的估计值，这个估计值准确到 $\delta\Psi \equiv \Psi - \Psi_s \equiv \phi - \Psi_s$ 和 $\delta\theta^* \equiv \theta^* - \theta_s^*$ 的二阶量，其中 $\Psi$ 和 $\theta^*$ 是用来计算 $F_3$ 的试探函数。后者的证明隐涵在 $\delta F_3 = 0$ [在得到 (1.1.14) 和 (1.1.15) 式时曾借助此式] 的要求中，并可通过直接代入 (1.1.13) 式容易地验证。

广义伴函数 $\theta_s^*$ 可解释为一个价值函数，它表示剩余量 $(S - A\Psi)$ 对比值 $G_3$ 的影响。可是，一旦(1.1.5)式的 $\Psi_s^*$ 与 $S$ 的内积等于泛函 $G_1$ 的准确值，$\theta_s^*$ 与源的内积就恒等于零。后者可以由 (1.1.14) 和 (1.1.15) 式得出：

$$\langle\theta_s^*, S\rangle = \langle\theta_s^*, A\Psi_s\rangle = \langle A^*\theta_s^*, \Psi_s\rangle$$

$$= \frac{\langle\sum_i\Psi_s\rangle}{\langle\sum_j\Psi_s\rangle} - G_3[\Psi_s]\frac{\langle\sum_j\Psi_s\rangle}{\langle\sum_j\Psi_s\rangle} \equiv 0. \tag{1.1.17}$$

只要在计算 $\theta^*$ 时 (1.1.15) 式的右端用 $\Psi$，则变分原理 $F_3$ 对试探函数 $\Psi$ 和 $\theta^*$ 的幅度不敏感。

**伴函数的线性泛函之比**

在某些应用中，会对方程（1.1.10）的解的线性泛函之比感兴趣，例如

$$G_4[\phi^*]=\langle\phi^* S_i\rangle/\langle\phi^* S_j\rangle, \qquad (1.1.18)$$

这里，$S_i$ 和 $S_j$ 代表不同的源分布。

若用试探函数 $\Psi^*$ 计算 $G_4$，产生的误差是 $\delta\Psi^*\equiv\Psi^*-\phi^*$ 的一阶量。

在 $G_4$ 上加上（1.1.10）式与待定函数 $\theta$ 的内积即可建立 $G_4$ 的变分原理：

$$F_4[\Psi^*,\theta]=G_4[\Psi^*]+\langle(\sum-A^*\Psi^*),\theta\rangle$$
$$=\frac{\langle\Psi^* S_i\rangle}{\langle\Psi^* S_j\rangle}+\langle(\sum-A^*\Psi^*).\theta\rangle. \qquad (1.1.19)$$

使 $F_4$ 稳定的函数 $\Psi_s^*$ 和 $\theta_s$ 由下列要求得到：

$$\delta F_4=0.$$

对任意的变分 $\delta\Psi^*$ 和 $\delta\theta$，它给出

$$A^*\Psi_s^*=\sum \qquad (1.1.20)$$

和

$$A\theta_s=\frac{S_i}{\langle\Psi_s^* S_j\rangle}-G_4[\Psi_s^*]\frac{S_j}{\langle\Psi_s^* S_j\rangle}=G_4'[\Psi_s^*]. \qquad (1.1.21)$$

于是，$\Psi_s^*\equiv\phi^*$ 且 $F_4$ 的稳定值为

$$F_4[\Psi_s^*,\theta_s]=\frac{\langle\Psi_s^* S_i\rangle}{\langle\Psi_s^* S_j\rangle}=\frac{\langle\phi^* S_i\rangle}{\langle\phi^* S_j\rangle}\equiv G_4[\phi^*]. \qquad (1.1.22)$$

因此，$F_4$ 是一个变分原理，它提供一个 $G_4$ 的估计值，准确到 $\delta\Psi^*\equiv\Psi^*-\phi^*$ 和 $\delta\theta\equiv\theta-\theta_s$ 的二阶量，其中 $\Psi^*$ 和 $\theta$ 是