XULIE KONGJIAN FANGFA

序列空间方法

刘郁强　吴博儿　李秉彝　著

广东科技出版社

序列空间方法

刘郁强 吴博儿 李秉彝 著

广东科技出版社

图书在版编目(CIP)数据

序列空间方法/刘郁强等著. —广州:广东科技出版社,1996. 7.

ISBN7-5359-1713-5

Ⅰ. 序…

Ⅱ. 刘…

Ⅲ. 泛函空间

Ⅳ. O177

出版发行:广东科技出版社

(广州市环市东路水荫路 11 号　邮码:510075)

经　　销:广东省新华书店

印　　刷:华南师范大学印刷厂

地　　址:广州市天河区石牌华南师范大学　　邮编:510631

规　　格:850×1168 1/32　印张 13　　字数 350 千

版　　次:1996 年 7 月第 1 版

1996 年 7 月第 1 次印刷

印　　数:0001-1000

ISBN　7-5359-1713-5

分类类号:O. 76

定　　价:20 元

新书信息电话:16826202

如发现因印装质量问题影响阅读,请与承印厂联系调换。

内容简介

本书论述序列空间的理论和方法，综合阐述有关这些理论和方法的最新研究成果. 全书分九章. 第一章介绍 Banach 空间的基本知识，第二章至第五章讨论几大类型的序列空间；第六章至第八章分别讨论序列空间上的无穷矩阵变换，正交可加泛函和迭加算子；第九章讨论矢值序列空间.

本书以逐步深入的方式展开对问题的讨论和研究，自成系统，便于阅读，可作为大学研究生或高年级学生选修教材，也可作为数学工作者的参考书.

序

如所周知，序列空间及其算子的研究，对泛函分析的许多分支的产生，形成与发展有重要影响，并且对求和法，复函数论等方面也都有广泛应用，同时它本身也已成为泛函分析的一个独立分支. 目前国际上已出版了不少关于序列空间的专著，可参见书末所附的文献，然而，迄今为止，国内尚未见有这方面的著作出现. 因此，本书的问世，无疑将推动我国对这一领域的研究的进一步展开.

特别是书中的下述特点，对广大读者尤其有益：第一，书中包含了三位著者的最新研究成果和系统工作；第二，以专章分别介绍序列空间上的正交可加泛函和迭加算子，还将对 Cesaro 序列空间的讨论贯穿到各章之中等都是本书有别于国外同类书籍的特色；第三，全书自成体系，无需查阅其它书刊，就连所要用到的 Banach 空间基础知识也都单列了一章；第四，为便于读者，本书尽量避免涉及拓扑线性空间方面的内容.

从 50 年代末开始，我也曾从事过序列空间，主要是对 Kothe 意义下的完备(perfect)序列空间的研究(如完备空间与完备矩阵环 I—III，科学记录，3(1959)，75～80，81～83，数学学报，14(1964)，319～327；序列空间上的有界变差函数，中国科学，13(1964)，1359～1380；核完备空间的几个问题，22(1979)，653～666 等). 因之，多年来始终盼望有一天国内也能有一本这方面的著作，今天，这个愿望终于实现了. 我个人深信随着本书的出版将会有更多的读者参加到对序列空间研究的行列.

吴从炘

1993 年春节于哈尔滨

前　言

序列空间理论是数学中泛函分析学科的一个分支.

早期关于序列的书中,Knopp K. 著的《无穷级数的理论和应用》(1964 年),其中一章涉及发散级数.以后,Hardy G. H. 将此章扩充成《发散级数》整本书(1949 年),至今仍然是一本重要的参考书.另一本是 Cooke R. G. 著的《无穷级数和序列空间》(1950 年),这本书最后一章讲到共鸣定理的应用,采用的是泛函分析方法.

Zeller. K. 著的《极限收敛理论》第一版出版于 1956 年,与 Beekmann W. 合著的第二版出版于 1970 年,此书的方法完全是现代方法.

今天,关于序列空间理论的研究是很活跃的.一些专著已于近期出版.其中 Maddox I. J. 著的《算子的无穷矩阵》(1980 年),Kamtham P. K. 著的《序列空间和级数》(1981 年),Wilansky A. 著的《通过泛函分析讨论可和性》(1984 年)都是重要的数学文献.

新加坡大学李秉彝先生对序列空间理论进行了深入的研究,发表了很多有关的论文和研究报告.他在《Cesaro 序列空间》(1984 年)一文中确定了绝对型 Cesaro 序列空间的 α-对偶和非绝对型序列空间的 β-对偶,并提出了关于序列空间的 8 个问题.不久他在《Cesaro 序列空间上的附加问题》(1987 年)一文中又补充提出了关于序列空间的 8 个新问题,并涉及到截模序列空间.对这些问题的提出和研究,促进了序列空间理论的发展.

自 1986 年起,华南师范大学吴博儿,刘郁强等承担了国家自然科学基金资助的科研项目:Banach 序列空间,进行序列空间理论的研究,并对非绝对型序列空间的对偶和无穷矩阵变换有关问题寻求解答。1990 年后,刘郁强继续这方面的工作,对于序列空间围绕着对偶,无穷矩阵变换和正交可加泛函等规律进行探索,并且增加了对迭加算子和矢值序列空间的理论研究。

本书论述序列空间的理论和方法,并综合阐述绍有关这些理论

和方法的最新研究成果. 在写作上，本书以逐步深入的方式展开对问题的讨论和研究，并且自成系统，读者一般不用查阅其它有关文献就可以顺利地阅读. 特别在第一章中介绍了 Banach 空间的基本理论，凡具有大学高年级数学水平的人均可阅读本书. 我们希望本书能激发更多读者对序列空间理论研究的热情，投入这项工作. 因此，本书可作大学研究生或高年级学生选修教材，也可作为数学工作者的参考书.

在本书即将出版的时候，笔者衷心感谢哈尔滨工业大学吴从炘先生，哈尔滨科学技术大学王延辅先生，西北师范大学丁传松先生，和华东师范大学余鑫泰先生，他们对本书的写作与出版给予很大的支持，特别是吴从炘先生在百忙中审阅了书稿并提出了宝贵的意见，而且还为本书撰写序言.

本书由刘郁强完成，并由吴博儿和李秉彝审阅和提出修改建议. 由于笔者学识水平所限，书中难免有许多缺点和错误，诚恳地期待读者提出宝贵的意见.

著者

1993 年 1 月

目　录

第一章　Banach 空间

Banach 空间理论是泛函分析最重要的组成部分. 目前,Banach 空间理论已发展了多种分枝,其内容十分丰富. 由于本书专述序列空间的理论和方法,在这一章仅介绍 Banach 空间理论的一些最基本的内容. 为了在各章逐步深入研究和讨论序列空间,我们仅就序列空间情况给出有关的例子. 然而,本章论述的 Banach 空间的一般理论,不仅适用于序列空间,而且适用于其它类型的空间,如函数空间,等等.

1.1　赋范线性空间

这一节中,我们简述赋范线性空间的定义和基本特性,讨论赋范序列空间的简单性质并介绍 9 个经典序列空间.

1.1.1　赋范线性空间的基本特性

A.　设 $\boldsymbol{X}$ 为某些元素的集合,P 为一个数域. 称 $\boldsymbol{X}$ 为数域 P 上的线性空间,若它满足:

(a) $\boldsymbol{X}$ 构成一个加法群,即在 $\boldsymbol{X}$ 内定义了一种加法运算"+",对任 $x,y\in\boldsymbol{X}$,有 $x+y\in\boldsymbol{X}$,且此加法运算具有性质:

(1)$x+y=y+x$(交换性);

(2)$x+(y+z)=(x+y)+z$(结合性);

(3)存在元素 $\theta\in\boldsymbol{X}$,使得对每 $x\in\boldsymbol{X}$,有 $x+\theta=x$(θ 称为零元);

(4)对每 $x\in\boldsymbol{X}$,存在 $-x\in\boldsymbol{X}$,使得 $x+(-x)=\theta$($-x$ 称为 x 的逆元).

(b)数域 P 和集合 $\boldsymbol{X}$ 之间,定义了一种数乘运算"·",对任 $\lambda\in P$,$x\in\boldsymbol{X}$,有 $\lambda\cdot x\in\boldsymbol{X}$,且此数乘运算具有性质:

(1) $1\cdot x=x$;

(2) $\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x$ （结合性）;

(3) $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$;

(4) $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$ （两种分配律）.

在本书中，恒以 R 表示实数域，并恒设所述及的线性空间均指实数域上的线性空间. 为了方便，线性空间内的数乘运算符号“·”省略不写，即 $\alpha x=\alpha\cdot x$，并且，线性空间的零元 θ 也用“0”表示. 一般称空间的元为“点”.

B. 设 X 为线性空间，$A\subset X$，$B\subset X$，$\alpha\in R$. 关于集合的加法和数乘运算定义为：

$A+B=\{x+y;\ x\in A,\ y\in B\}$,

$\alpha A=\{\alpha x;\ x\in A\}$.

特别，$x+A=\{x\}+A$，$-A=(-1)A$，等等.

C. 称 X 为赋范线性空间，若 X 为线性空间且存在 X 上的实函数 $\|\cdot\|:X\to R$ 满足下列条件：对任 $x,y\in X$ 和 $\alpha\in R$，有

(a) $\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;

(b) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$（三角不等式）;

(c) $\|\alpha x\|=\|\alpha\|\ \|x\|$ （绝对齐性）.

并称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数(即 Banach 范数或 B 范数).

若将条件(a)改为

(a′) $\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0$ 当 $x=0$，

则称 $\|\cdot\|$ 为拟范数或半范数，相应地，X 称为赋拟范(半范)线性空间.

又若将条件(c)改为

(c′) $\|\alpha x\|=\|\alpha\|^{p}\|x\|$，某固定的 $p>0$，

则称 $\|\cdot\|$ 为 p 范数，相应地，X 称为赋 p 范线性空间.

线性空间 X 称为赋准范(或 F 范)线性空间，若存在 X 上的实函数 $\|\cdot\|:X\to R$ 满足下列条件：对任 $x,y\in X$，有

(a) $\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;

(b) $\|-x\|=\|x\|$;

(c) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$;

(d) 对任$\{\alpha_n\}\subset \boldsymbol{R},\alpha\in\boldsymbol{R}$和$\{x_n\}\subset X,x\in X$,若$\|\alpha_n-\alpha\|\to 0$和$\|x_n-x\|\to 0$,则$\|\alpha_n x_n-\alpha x\|\to 0$.

D. 例

恒以$\boldsymbol{Z}^+$表示全体自然数的集合,并常用符号"$\forall$"表示"对每一个".

(a)以$\boldsymbol{R}^n$表示n维实空间,即

$$\boldsymbol{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n);x_k\in\boldsymbol{R},1\leqslant k\leqslant n\},$$

其加法运算和数乘运算定义为:设$x=(x_1,x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n,\alpha\in\boldsymbol{R}$,则

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n);$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n).$$

定义$\|\cdot\|:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$为:

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^n|x_k|^2)^{\frac{1}{2}},\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$$

则$\boldsymbol{R}^n$为赋范线性空间,通常称为Euclid空间,并称$\|\cdot\|$为Euclid范数.

事实上,由于$\sum_{k=1}^n(x_k+ty_k)^2\geqslant 0$,利用二次函数的判别式即可得到Cauchy不等式:

$$(\sum_{k=1}^n x_ky_k)^2\leqslant(\sum_{k=1}^n x_k^2)\ (\sum_{k=1}^n y_k^2).$$

记$a_k=x_k+y_k$, $1\leqslant k\leqslant n$. 由Cauchy不等式推得:

$$\sum_{k=1}^n(x_k+y_k)^2=\sum_{k=1}^n a_kx_k+\sum_{k=1}^n a_ky_k$$
$$\leqslant(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2}[\sum_{k=1}^n(x_k^2)^{1/2}+\sum_{k=1}^n(y_k^2)^{1/2}]$$

两端除以$(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2}$,即得

$$(\sum_{k=1}^n(x_k+y_k)^2)^{1/2}\leqslant(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^n(y_k^2)^{1/2}$$

于是三角不等式 $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ 成立. 范数的另外两个条件显然也满足.

(b) 我们以 $\{x_k\}$ 或 $\{x_k\}_{k\geqslant 1}$ 表示实序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$, 称 x_k 为此序列的第 k 个坐标, 并常常简单地以 x, y 分别表示 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$, 等等. 序列的加法运算和数乘运算定义为: 设, $x=\{x_k\}$, $y=\{y_k\}$ 为两序列, $\alpha\in \boldsymbol{R}$, 则

$$x+y=\{x_k+y_k\}, \qquad \alpha x=\{\alpha x_k\}$$

以 $\boldsymbol{c}$ 表示全体收敛实序列所成的空间, 定义 $\|\cdot\|: \boldsymbol{c}\to \boldsymbol{R}$ 为:

$$\|x\|=\sup_k \|x_k\|, \qquad x=\{x_k\}\in \boldsymbol{c}$$

容易验证 $\boldsymbol{c}$ 为赋范线性空间.

(c) 以 $\boldsymbol{l}_1$ 表示全体可和序列组成的空间, 即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty$ 当 $x\in \boldsymbol{l}_1$. 定义 $\|\cdot\|: \boldsymbol{l}_1\to \boldsymbol{R}$ 为:

$$\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|, \qquad x=\{x_k\}\in \boldsymbol{l}_1$$

容易验证 $\boldsymbol{l}_1$ 为赋范线性空间.

(d) 以 $\boldsymbol{\omega}$ 表示全体实序列所成的空间, 定义 $\|\cdot\|: \boldsymbol{\omega}\to \boldsymbol{R}$ 为

$$\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x_k|}{1+|x_k|}, \qquad x=\{x_k\}\in \boldsymbol{\omega},$$

则 $\|\cdot\|$ 是准范数, $\boldsymbol{\omega}$ 为赋准范线性空间. 事实上, 我们注意到, 函数 $g(t)=t/(1+t)$ 是 $(0,\infty)$ 上的严格增的连续函数, 且 $g(0)=0$, 因而 $g(t)\to 0$ 当且仅当 $t\to 0$. 由此易得三角不等式 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. 显然 $\|x\|\geqslant 0$, $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$, 又 $\|-x\|=\|x\|$.

设 $\{\alpha_n\}\subset \boldsymbol{R}$, $\alpha\in \boldsymbol{R}$ 和 $\{x^{(n)}\}\subseteq \boldsymbol{\omega}$, $x\in \boldsymbol{\omega}$ 且 $\|\alpha_n-\alpha\|\to 0$, $\|x^{(n)}-x\|\to 0$, $n\to\infty$, 由不等式

$$\frac{|x_k^{(n)}-x_k|}{1+|x_k^{(n)}-x_k|}\leqslant 2^k|x^{(n)}-x|\to 0, \quad n\to\infty$$

推出 $|x_k^{(n)}-x_k|\to 0$ 当 $n\to\infty$, $\forall\, k\in \boldsymbol{Z}^+$. 对任 $n\in Z^+$,

$$\|\alpha_n x^{(n)}-\alpha x\|\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\alpha_n x_k^{(n)}-\alpha x_k|}{1+|\alpha_n x_k^{(n)}-\alpha x_k|}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}.$$

先令 $n\to\infty$，再令 $N\to\infty$，可得 $\|\alpha_n x^{(n)}-\alpha x\|\to 0$ 当 $n\to\infty$.

E. 从定义看出，范数必是准范数、拟范数，p 范数必是准范数. 但准范数和拟范数未必是范数或 p 范数. 反例如下：

(a) 在例 D(d)中的 $\|\cdot\|$ 仅是 ω 上的准范数，但它不满足绝对齐性条件，因而它不是范数.

(b) 设 $X=\{x;\lim\limits_{k\to\infty}(x_k-x_{k+1})=0\}$，则 X 为线性空间. 令

$$\|x\|=\sup_k\|x_k-x_{k+1}\|,\qquad x=\{x_k\}\in X.$$

容易验证 $\|\cdot\|$ 是 X 上的拟范数，但 $\|x\|=0$ 时 x 不一定为 0，$\|\cdot\|$ 不是范数.

我们应该注意到，若将"具有差序列为常序列"的两个序列视为"同一个"元素，即若 $x,y\in X$ 满足条件 $x_k-y_k=\beta,\forall\, k\in Z^+$

其中 β 为某一常数，就将 x 与 y"等同"看待，则 $\|\cdot\|$ 转化为 X 上的范数. 这就是"商空间"的方法.

F. 设 X 为赋(准)范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，$x\in X$. 我们称元列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，并记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 或 $x_n\to x$.

G. **定理** 在赋(准)范线性空间中，下面的映射是连续的：

(a) $(x,y)\to x+y$，即 $x+y$ 是二元连续函数：若 $x_n\to x$，$y_n\to y$，则 $x_n+y_n\to x+y$.

(b) $x\to\|x\|$，即 $\|\cdot\|$ 是 x 的连续函数：若 $x_n\to x$，则 $\|x_n\|\to\|x\|$.

证明 性质(a)由三角不等式推得：

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0.$$

又由三角不等式推得

$$|\,\|x_n\|-\|x\|\,|\leqslant\|x_n-x\|\to 0.$$

即性质(b) 成立.

H. 设 X 为赋(准)范线性空间，$A\subset X$. x_0 称为 A 的内点. 若存在某一开球 $\{x;\|x-x_0\|<\rho\}\subset A$，其中 $\rho>0$，若 x_0 为 A 的内点，则称 A 为 x_0 的邻域. 集 A 称为开集，若 A 的每一点都是 A 的内点；集 A 称为闭集，若 $X\backslash A$ 为 X 的开集.

集 A 为闭集当且仅当对任意 $\{x_n\}\subset A$, $x_n\to x$, 则 $x\in A$. 显然, X 和空集 $\varnothing$ 都是开集,又都是闭集.

赋(准)范线性空间在一般拓扑学意义下构成拓扑线性空间,其它有关的一些拓扑概念和特性,我们在此不再一一复述,但要注意到,全体开球 $\{x;\|x\|<\rho\}$ (或闭球 $\{x;\|x\|\leqslant\rho\}$) 为 0 点的拓扑邻域基,其中 $\rho>0$. 下面,我们特别介绍紧性和有界性的概念.

I. 赋(准)范线性空间 X 中的集合 A 称为紧的,若有无穷多个球复盖 A,则其中必存在有限个球复盖 A;集 A 称为相对紧的,若其闭包 $\overline{A}$(包含 A 的最小闭集,即全体包含 A 的闭集的交)是紧的.

集 A 称为序列紧的,若 A 中的任意序列必含有一个子序列收敛于 A 中的一个元;集 A 称为相对序列紧的,若其闭包 $\overline{A}$ 是序列紧的.

在赋(准)范线性空间中,集合的紧性和序列紧性是等价的;相对紧性和相对序列紧性是等价的.

J. 赋(准)范线性空间 X 中的集合 A 称为有界的,若对 0 点的任意邻域 V,存在 $\lambda>0$ 使 $\lambda A\subset V$.

在赋准范线性空间中,闭球族 $\{x;\|x\|\leqslant\rho\}$, $\rho>0$, 为 X 的 0 点的邻域基,从而 X 中的集合 A 是有界的当且仅当对任 $\rho>0$, 存在 $\lambda>0$ 使 $\|\lambda x\|\leqslant\rho$, $\forall\ x\in A$, 即 $\sup\{\|\lambda x\|;\ x\in A\}\leqslant\rho$.

若 X 为赋(P)范线性空间,其准范数具有 p 阶绝对齐性:

$$\|\alpha x\|=\|\alpha\|^{p}\|x\|,\qquad x\in\boldsymbol{X},\ \alpha\in\boldsymbol{R}.$$

则 X 中的集合 A 是有界的当且仅当存在某 $\beta>0$ 使 $\|x\|\leqslant\beta$, $\forall\ x\in A$. 即 $\sup\{\|x\|;\ x\in A\}<\infty$.

事实上,若 A 有界,则存在 $\lambda>0$ 使 $\|\lambda x\|\leqslant 1$, $\forall\ x\in A$, 即 $\|x\|\leqslant\|\lambda\|^{-p}$, $\forall\ x\in A$. 反之,若 $\|x\|\leqslant\beta$, $\forall\ x\in A$, $(\beta>0)$, 取 $\lambda=(\rho/\beta)^{1/p}$, 则 $\|\lambda x\|\leqslant\rho$, $\forall\ x\in A$.

K. **定理** 设 X 为赋(准)范线性空间, $A\subset X$. 则 A 为有界集当且仅当对于任意序列 $\{x_n\}\subset X$ 及实数序列 $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n\to 0$, 可得 $\alpha_n x_n\to 0$, 即当 $\alpha\to 0$ 时 $\alpha x\to 0$ 对 $x\in A$ 一致.

证明 必要性. 对任 $\varepsilon>0$, 由准范数的性质, $\|ax\|$ 是 (a,x) 的二元连续函数,故存在 $\delta>0$, 使 $\|ax\|<\varepsilon$ 当 $|a|<\delta$, $\|x\|<\delta$.

设 A 为有界集. 存在 $\lambda>0$ 使 $\|\lambda x\|<\delta, \forall x\in A$. 因 $\alpha_n\to 0$, 存在 $N\in \mathbf{Z}^+$, 当 $n\geqslant N$, $\|\alpha_n/\lambda\|<\delta$. 从而

$$\|\alpha_n x_n\|=\left\|\frac{\alpha_n}{\lambda}\cdot\lambda x_n\right\|<\varepsilon,\ 当\ n\geqslant N,$$

即 $\alpha_n x_n\to 0$.

充分性　若在定理的条件下 A 不是有界集, 则存在某 $\rho>0$, 对任 $n\in\mathbf{Z}^+$, $\sup\{\|x/n\|; x\in A\}>\rho$, 故存在 $\{x_n\}\subset A$, 使 $\|x_n/n\|\geqslant\rho, \forall n\in\mathbf{Z}^+$. 这样, 我们有实序列 $\{1/n\}$, $1/n\to 0$ 但 $x_n/n\not\to 0$, 这与假设矛盾.

L.　**推论**　赋(准)范线性空间中的收敛序列是有界的.

证明　设 $x_n\to x$ 于 X, $\alpha_n\to 0$ 于 $\mathbf{R}$, 则 $\alpha_n x_n\to 0$, 根据定理 K, 序列 $\{x_n\}$ 是有界的.

M.　设 X 为线性空间, $Y\subset X$, 如果对任 $x,y\in Y$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, 都有 $\alpha x+\beta y\in Y$, 则称 Y 为 X 的一个线性子空间, 当 $Y\neq X$ 时称 Y 为 X 的真子空间; 若 X 还是赋(准)范线性空间, 且 Y 是 X 的闭集, 则称 Y 为 X 的闭线性子空间.

N.　**注**:　(a) 赋(准)范线性空间 X 的任何子空间 Y(除非是 $\{0\}$), 都不是 X 的有界集.

实际上, 任取 $x\in Y$, $x\neq 0$, 则序列 $\{nx\}\subset Y$, $\{1/n\}\subset\mathbf{R}$, $1/n\to 0$, 但 $\frac{1}{n}\cdot nx=x\not\to 0$

(b) 对于一般赋准范线性空间, 若 $A\subset X$ 且

$$\sup\{\|x\|; x\in A\}<\infty,$$

集 A 不一定是有界的. 例如, 取 $X=A=\omega$, 则 ω 不是有界集.

1.1.2　等价范数

在同一线性空间上, 常常可以赋予不同的范数或准范数. 下面, 我们讨论线性空间上两个拟范数或准范数等价的条件.

A.　设 X 为线性空间, $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 均为 X 上的拟范数或准范数. 我们称 $\|\cdot\|_1$, 比 $\|\cdot\|_2$ 强, 是指 $\|x_n\|_2\to 0$ 当 $\|x\|_1\to 0$, $n\to\infty$. 称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价, 是指

$$\|x_n\|_2\to 0 \text{ 当且仅当 } \|x\|_1\to 0, n\to\infty.$$

例如，在 R^n 上赋予以下两种范数：

$$\|x_n\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|, \|x\|_\infty=\max\{|x_k|\};|1\leqslant k\leqslant n\},$$

其中 $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. 容易看出：

$$\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_1\leqslant n\|x\|_\infty, \forall x\in R^n:$$

$\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 是等价的. 其实，在 R^n 上的范数都是等价的（见 1.1.4E）.

B. 设 X 为线性空间，且

$$\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\|x\|_k}{1+\|x\|_k}, \quad \forall x\in X,$$

其中 $\{\|\cdot\|_k;k\geqslant 1\}$ 为 X 上的拟范数序列，则称 $\|\cdot\|$ 为 B_0 型准范数.

例如，1.1.1D 中空间 ω 上的准范数是 B_0 型准范数.

C. **定理** 设 $\|\cdot\|$ 为上述 B_0 型准范数，则 $\|x_n\|\to 0$ 当且仅当 $\|x_n\|_k\to 0, \forall k\in Z^+, n\to\infty$.

定理 C 的证明是简单的（参阅 1.1.1.D(d)），于此省略.

D. **定理** 为了使上述 B_0 型准范数 $\|\cdot\|$ 比拟范数 $\|\cdot\|'$ 强，必须且只须存在 $k\in Z^+$ 和 $C>0$，使

$$\|x\|'\leqslant C\|x\|_k, \forall x\in X.$$

证明 不妨设 $\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\cdots\leqslant\|x\|_k\leqslant\cdots$ 否则，令

$$\|x\|_{\tilde{k}}=\sup\{\|x\|_j;1\leqslant j\leqslant k\}, \forall k\in Z^+.$$

由 $\{\|\cdot\|_{\tilde{k}};k\geqslant 1\}$ 确定的 B_0 型准范数与 $\|\cdot\|$ 等价.

若上述 k 和 C 不存在，则对任 $k\in Z^+$，必有一元 $x_k\in X$，使

$\|x_k\|'>k\|x_k\|_k$. 令 $y_n=\dfrac{x_n}{\sqrt{n}\|x_n\|_n}, \forall n\in Z^+$. 当 $n\geqslant k$，

$$\|y_n\|_k=\frac{\|x_n\|_k}{\sqrt{n}\|x_n\|_n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0, \forall k\in Z^+.$$

由定理 C，$\|y_n\|\to 0$ 当 $n\to\infty$. 但

$$\|y_n\|'=\frac{\|x_n\|'}{\sqrt{n}\|x_n\|_n}>\sqrt{n}\not\to 0, n\to\infty.$$