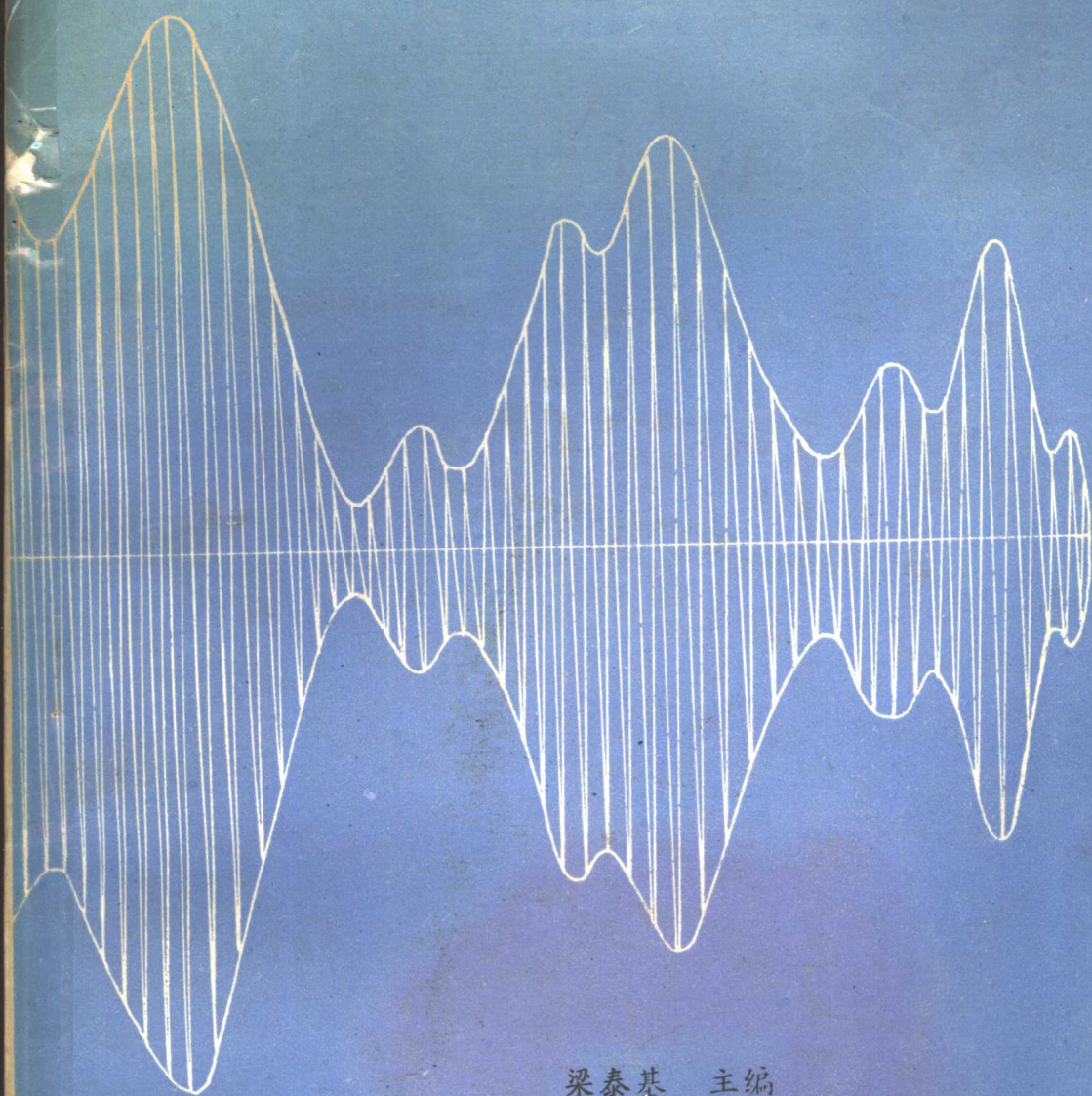




梁泰基 主编

统计无线电理论

TONGJI WUXIANDIAN LILUN

国防科技大学出版社

统计无线电理论

TONGJI WUXIANDIAN LILUN

梁泰基 刘福声

王海云 罗鹏飞

国防科技大学出版社

内 容 简 介

本书是作者为信息技术和电子系统各专业本科生编写的教材，目的是为电子工程与信息工程领域的初学者打好基础，以适应信号与信息处理的需要。全书共分六章，主要内容包括随机过程基本理论、随机过程的线性变换、非线性变换以及电子系统中常用的典型随机过程分析。本书强调清楚的物理概念，严密的基本理论和系统的分析方法，并密切结合实际工程应用；叙述中插入大量的例题和图表，以帮助读者更好地掌握本课程的内容；每章均备有丰富的习题，书末附有部分习题答案，以利于读者进行广泛的基本功训练。

统计无线理论

梁泰基 主编

*

国防科技大学出版社 出版发行

湖南省新华书店经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本：787×1092 1/16 印张：14 字数：812 千字

1988年2月第1版 1988年2月第1次印刷 印数：20 000 册

ISBN 7-81024-021-8

TN·3 定价：2.40 元

统计卷一

前 言

本书是作为信息技术和电子系统各专业本科生的教材编写的，内容适应 40~60 学时需要，也可供有关工程技术人员参考。它的数学基础为《高等数学》、《概率论》和《线性代数》，先修专业基础课为《电路基本理论》、《信号与线性系统》等。

编写本书的主要目的是给信息与电子技术领域的初学者打好基础，以适应信号与信息统计处理的需要。全书共分六章。第一章概率与随机变量为复习先修课《概率论》的内容，增加了特征函数并加强了随机变量函数的分布等。第二章随机过程的基本概念和第三章随机过程的变换为该书的基础理论部分。第四章窄带随机过程、第五章正态随机过程及第六章马尔可夫过程与泊松过程都是电子技术领域中经常遇到的几种典型的随机过程或随机信号。书中内容的重点是随机信号的分析 and 变换，其中以线性变换为主。至于非线性变换，只作概括的介绍，略去了较为繁琐的部分，涉及到的具体内容，如检波器、限幅器等，也尽量使分析方法简明。在内容安排上，力求物理概念清楚、理论分析严密。书中举例内容广泛，尽量考虑联系先修课中熟悉的及有关专业中的重要实际问题。各章最后附有若干习题。实践证明，作适量的习题，对巩固和加深理解内容是十分必要和有益的。书末附有部分习题的答案，供读者作题时参考。

本书是在过去编写的教材及若干期教学实践的基础上，由国防科技大学电子技术系的梁泰基、刘福声、王海云和罗鹏飞再编而成。该书经成都电讯工程学院杨鸿铨教授等审阅，国防科技大学郭桂蓉教授也给予了大力支持和帮助，在此一并表示由衷的感谢。

百密必有一疏，书中难免有缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编 者

1987.6

目 录

第一章 概率与随机变量

1.1 概率

1.1.1 概率与概率空间	2
---------------------	---

1.1.2 条件概率	8
------------------	---

1.2 随机变量及其分布

1.2.1 随机变量	4
------------------	---

1.2.2 离散型随机变量的概率分布	4
--------------------------	---

1.2.3 随机变量的分布函数	6
-----------------------	---

1.2.4 概率密度	7
------------------	---

1.3 多维随机变量及其分布

1.3.1 二维随机变量	10
--------------------	----

1.3.2 条件分布	11
------------------	----

1.3.3 多维分布	13
------------------	----

1.4 随机变量的数字特征

1.4.1 数学期望	13
------------------	----

1.4.2 方差	14
----------------	----

1.4.3 协方差和相关系数	16
----------------------	----

1.4.4 矩和协方差矩阵	17
---------------------	----

1.5 随机变量的函数

1.5.1 一维随机变量函数的分析	18
-------------------------	----

1.5.2 二维随机变量函数的分析	20
-------------------------	----

1.5.3 随机变量函数的数字特征	22
-------------------------	----

1.6 随机变量的特征函数

1.6.1 一维与多维特征函数	23
-----------------------	----

1.6.2 特征函数与矩的关系	25
-----------------------	----

1.7 大数定理及中心极限定理

1.7.1 切比雪夫(Chebyshev)不等式	26
--------------------------------	----

1.7.2 切比雪夫定理	28
--------------------	----

1.7.3 贝努里(Bernoulli)定理	29
------------------------------	----

1.7.4 中心极限定理	29
--------------------	----

习 题

第二章 随机过程的基本概念

2.1 随机过程的概念和定义

2.2 随机过程的统计特性

2.2.1 随机过程的概率分布	40
-----------------------	----

2.2.2 随机过程的示性函数	43
-----------------------	----

2.2.3 随机过程的特征函数	45
2.3 平稳随机过程	
2.3.1 平稳随机过程的特点和分类	47
2.3.2 平稳随机过程相关函数的特性	49
2.3.3 平稳随机过程的相关系数和相关时间	52
2.4 各态历经过程	
2.4.1 各态历经过程的概念和定义	53
2.4.2 各态历经性条件	54
2.5 随机过程的联合分布与互相关函数	
2.5.1 两个随机过程的联合分布函数	57
2.5.2 两个随机过程的互相关函数	58
2.6 随机过程的功率谱密度	
2.6.1 功率谱密度的概念和定义	60
2.6.2 功率谱密度与相关函数的关系	62
2.6.3 各态历经过程的功率谱密度和二随机过程的互功率谱密度	68
2.6.4 功率谱密度的计算举例	67
习 题	

第三章 随机过程的变换

3.1 线性系统及其基本关系式	
3.2 随机过程的微分和积分	
3.2.1 随机过程的极限概念和连续性	80
3.2.2 随机过程的微分	82
3.2.3 随机过程的积分和积分变换	86
3.3 随机过程线性变换的微分方程法	
3.4 随机过程线性变换的冲激响应法和频谱法	
3.4.1 冲激响应法	92
3.4.2 频谱法	95
3.5 白噪声通过线性系统	
3.6 随机过程的非线性变换	
3.6.1 无惰性的时不变非线性系统	104
3.6.2 无惰性非线性变换的分析方法	108
3.6.3 包络法	107
习 题	

第四章 窄带随机过程

4.1 确知信号的复信号表示	
4.1.1 窄带确知信号的复信号表示	115
4.1.2 任意实信号的复信号表示	118
4.2 希尔伯特(Hilbert)变换	
4.2.1 定义	119
4.2.2 性质	120

4.3 复随机过程	
4.3.1 复随机变量及其统计特性	124
4.3.2 随机过程的复过程表示	125
4.4 窄带随机过程的统计特性	
4.4.1 窄带随机过程的准正弦振荡的表达式	127
4.4.2 窄带平稳过程的相关函数	128
4.4.3 窄带随机过程的低频过程 $A_C(t)$ 和 $A_S(t)$ 的相关特性	129
4.4.4 窄带随机过程的复过程表示	131
4.5 随机过程的傅立叶级数表示法	
4.5.1 随机过程的均方周期性和傅立叶级数展开式	133
4.5.2 非周期性随机过程的傅立叶级数展开式	135
4.5.3 窄带过程的傅立叶级数展开式	138
习 题	

第五章 正态随机过程

5.1 正态过程的分布特性	
5.1.1 一般正态过程	142
5.1.2 平稳正态过程	145
5.2 正态过程的线性变换	
5.2.1 正态过程通过线性系统	147
5.2.2 随机过程的正态化	148
5.3 窄带正态过程的包络和相位的分布	
5.3.1 窄带正态噪声的包络和相位的分布	151
5.3.2 窄带正态噪声加正弦信号的包络和相位的分布	154
5.3.3 窄带正态过程的包络平方的分布	156
5.4 χ^2 分布及非中心 χ^2 分布	
5.5 正态过程的非线性变换	
5.5.1 检波	162
5.5.2 限幅	166
5.6 非线性变换系统信噪比的计算	
5.6.1 同步检波器	167
5.6.2 包络检波器	169
5.6.3 平方律检波器	170
习 题	

第六章 马尔可夫过程与泊松过程

6.1 马尔可夫链	
6.1.1 马尔可夫链的一般特性	175
6.1.2 齐次马尔可夫链	176
6.2 马尔可夫过程的一般概念与连续状态的过程	
6.2.1 马尔可夫过程的一般概念	181
6.2.2 马尔可夫序列	181

6.2.3 连续的马尔可夫过程	186
6.3 泊松过程	
6.3.1 泊松过程的一般概念	189
6.3.2 泊松过程的统计特性	191
6.4 散弹噪声	
6.4.1 散弹噪声的统计特性	195
6.4.2 散弹噪声的概率密度	198
6.4.3 散弹噪声的特征函数	201

习 题

附录 I 随机过程的可微性条件

附录 II $Z=X/Y$ 的分布及其应用

参考文献

第一章 概率与随机变量

自然现象和社会现象虽然多种多样，但可粗略地分为确定性的和非确定性的两大类。前者是可以预知的，即在相同条件下多次试验结果相同。如同性电荷相斥，异性电荷相吸；水在一个标准大气压下加热至 100°C 必然沸腾等。非确定性的现象结果不能预知，且由此呈现出不确定性，则通常称为随机现象。如在相同条件下抛硬币，抛掷之前无法预知结果是正面或反面；用同一部雷达对某目标位置的多次测量中，每次测量结果都不相同，且不能预知；接收机输出的噪声等也有类似特点。

随机现象的每次试验虽具有不确定性，但经大量重复试验，其结果却呈现某种规律性；如多次重复抛硬币，正面与反面朝上的次数大致相等，用同一火炮射击同一目标的弹着点也有一定的分布规律，等等。这种规律性是统计大量试验结果得出的，称之为统计规律性。概率论就是研究随机现象统计规律性的数学分支。随着科学技术的发展，概率论已被应用于广泛的领域，亦已成为电子技术中不可缺少的数学工具。在这一章我们将讨论概率论的一些基本概念，这也是学习以后各章内容的一个基础。

1.1 概 率

现将概率论中常用的一些基本术语简述如下：

随机试验 如果试验具有以下三个条件，即

- (1) 在相同条件下可重复进行；
- (2) 每次试验结果不只一个，所有可能结果能事先明确；
- (3) 每次试验之前不能确定出现哪一结果。则称为随机试验，简称试验。

随机事件 在随机试验中，对一次试验可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中却具有某种规律性的事情，称为随机事件，简称事件。如抛硬币出现正面等。

基本事件 随机试验中的最简单的随机事件称为基本事件。如掷一骰子，出现 1、2、 $\dots$ 6 点都是基本事件，出现偶数点为一随机事件，但不是基本事件。

必然事件与不可能事件 随机试验中必然会发生的事情，如掷一骰子“点数不大于 6”，为必然事件；而不可能发生的事情，如“点数大于 6”，为不可能事件。

样本空间 随机试验 E 的所有基本事件组成的集合叫做 E 的样本空间 S 。如掷一骰子的样本空间为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，“出现偶数点”事件是由基本事件“2”“4”“6”组成，叫做 S 的子集。必然发生的事件叫必然事件，它对应整个样本空间 S ；不可能发生的事件叫不可能事件，它对应的是一空集，记以 ϕ 。

事件之间的关系与运算 设试验 E 的样本空间为 S ， A 和 B 是 E 的事件，则

- (1) 若事件 A 发生必然导致 B 发生，则称事件 B 包含事件 A ，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ ；

- (2) 事件 A 与事件 B 至少有一个发生, 该事件叫做 A 与 B 的和, 记为 $A \cup B$;
- (3) 事件 A 与事件 B 同时发生, 该事件叫做 A 和 B 的积, 记为 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$;
- (4) 事件 A 发生而事件 B 不发生, 该事件称为 A 与 B 的差, 记为 $A - B$;
- (5) 事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 $A \cdot B = \phi$, 则 A 与 B 为不相容事件, 基本事件是互不相容的. 如果 $A \cup B = S$, $A \cdot B = \phi$, 则称 A 与 B 互逆, 也叫对立事件, 记为 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$.

1.1.1 概率与概率空间

在一般的概型中, 首先要引入样本空间 S , 此外还须看具体情况而规定样本空间的某些子集作为事件, 事件的全体记为 $\mathcal{F}$. 称集 $\mathcal{F}$ 为 S 中的一个 σ -代数, 如果满足下列条件:

- (1) $S \in \mathcal{F}$;
- (2) 若 $A \in \mathcal{F}$; 则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$ ($\bar{A} = S - A$);
- (3) 若可列多个 $A_i \in \mathcal{F}$, $i=1, 2, \dots$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

概率反映事件发生可能性的大小, 设试验 E 的样本空间为 S , 对于 E 的每一事件 A 赋予一实数 $P(A)$, 如果它满足下列条件, 就称为事件 A 的概率.

- (1) 对于每一事件 A 有 $0 \leq P(A) \leq 1$;
- (2) $P(S) = 1$;
- (3) 对于两两互不相容的事件 $A_k (k=1, 2, \dots)$ 有

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

在本章最后将会证明, 在相当广泛的条件下试验次数 $n \rightarrow \infty$ 时, ν/n 接近于 $P(A)$, 其中 ν 为事件 A 发生的次数.

由概率的定义可以推出它的一些性质:

性质 1 设 $\bar{A}$ 是 A 的对立事件, 则

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad (1.1.2)$$

性质 2 $P(\phi) = 0$

性质 3 设 A, B 为二事件, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (1.1.3)$$

性质 4 设 A, B 为二事件, 若 $A \subset B$,

$$\text{则 } P(A) \leq P(B) \quad (1.1.4)$$

等可能概型 设试验 E 的样本空间为 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 如果每一基本事件的概率相等, 即 $P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n)$, 则称为等可能概型. 等可能概型在概率论发展的初期为主要研究对象, 所以也叫古典概型.

对于等可能概型, 因

$$P(S) = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = nP(e_i) = 1, \text{ 可得}$$

$$P(e_i) = \frac{1}{n}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

若事件 A 包含 k 个基本事件, 则事件 A 的概率计算公式为

$$P(A) = \frac{k}{n} \quad (1.1.5)$$

概率空间 样本空间 S 、 S 中的一个 σ -代数 $\mathcal{F}$ 和概率 P 的三元总体 $(S, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间, 也叫概率场。

1.1.2 条件概率

定义 设 A, B 为试验 E 的两个事件, 在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的概率叫做条件概率, 记以 $P(B/A)$ 。

概率的乘法定理 两个事件乘积的概率等于其中一个事件的概率乘以另一事件在此事件发生的条件下的条件概率, 即

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) \quad (1.1.6)$$

统计独立性 设 A, B 为二事件, 若满足

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1.1.7)$$

则称 A, B 为统计独立的事件。

上面两个事件独立性的概念还可推广到 n 个相互独立事件的情况。下面我们把独立性的概念推广到三个事件的情况。

定义 设 A, B, C 是三个事件, 若满足等式

$$\left. \begin{aligned} P(A \cdot B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(B \cdot C) &= P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cdot C) &= P(A) \cdot P(C) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.8)$$

$$\text{和} \quad P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \quad (1.1.9)$$

则称 A, B, C 为相互独立的事件。若只满足式 (1.1.8) 时, 则称三事件 A, B, C 两两相互独立。

全概率公式 设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 E 的一组事件, 如有

$$(1) B_i \cdot B_k = \phi \quad (i \neq k)$$

$$(2) B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$$

则称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分。反之, 若 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 则作一次试验 E , 事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 中必有一个且仅有一个发生。

设 A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 则全概率公式为

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A/B_n) \cdot P(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \cdot P(B_i) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

贝叶斯 (Bayes) 公式 设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分, 对于任一事件 A , 由条件概率的定义有

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(A/B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$$

将全概率公式 (1.1.10) 式代入上式, 则得

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A/B_j) \cdot P(B_j)} \quad (1.1.11)$$

上式称为贝叶斯公式。设事件 A 可以在不同条件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 下实现，由以往的数据分析可得 $P(B_j)$ ，称为先验概率，按某些理由也可知道条件概率 $P(A/B_j)$ ，当观察到 A 出现后，按贝叶斯公式算得的条件概率 $P(B_i/A)$ 称为后验概率。

全概率公式和贝叶斯公式有着密切的关系，前者用于在许多情况 $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ 下都可能发生事件 A ，求发生 A 的全概率；后者则用于当 A 已发生的情况下，求发生事件 A 的各种原因的条件概率。

1.2 随机变量及其分布

1.2.1 随机变量

概率论中一个很重要的概念就是随机变量，它是表示随机试验的结果中能取得不同数值的量。例如，掷一骰子可能出现的点数；对靶射击可能命中的环数；一批产品中的次品数；车床加工的零件尺寸与规定尺寸的偏差等等。这些随机试验的各种可能的结果都与某一数值相联系。另有些随机试验，虽然其可能的各种结果和数值间没有直接的联系，例如，抛一硬币可能出现正面或反面；雷达探测目标可能发现目标或未发现目标等等，但我们可以规定一些数值来表示它的各种可能结果。如抛一硬币，可规定“1”表示出现正面，“0”表示出现反面；而对雷达探测目标，可规定“1”表示发现目标，“0”表示未发现目标。这样，我们总可以用一个变量来定量表示随机试验的结果，尽管具体内容是各种各样的，但从数学观点来看，它们表现了同一种情况，即每个变量都可以随机地取不同的数值，而在试验之前却不能确定这个变量取什么数值，这样一个变量就称为随机变量。下面给出随机变量的定义：

定义 设随机试验 E 的样本空间 $S = \{e\}$ ，如果对于每一个 $e \in S$ 有一个实数 $X(e)$ 和它对应，这样就得到一个定义在 S 上的单值实函数 $X(e)$ ，称 $X(e)$ 为随机变量。一般简记为 X 。

引入随机变量的概念，使我们有可能利用数学分析的方法来研究随机试验，因而它是研究随机试验的有效工具。

根据随机变量可能取值的不同，一般可把它分为两种基本类型，即离散型随机变量和连续型随机变量。

1.2.2 离散型随机变量的概率分布

离散型随机变量是指随机变量的全部可能取值为有限个或是可列无限多个。如射击时中靶的环数；某电话交换台一分钟内的呼唤次数等都是离散型随机变量。

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_k (k=1, 2, \dots)$ ，其概率为：

$$P\{X=x_k\}=p_k \quad k=1, 2, \dots \quad (1.2.1)$$

则称 (1.2.1) 式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律，并可用表格的形式来表示。

$$\begin{array}{c|cccc}
 X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\
 \hline
 p_k & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots
 \end{array}
 \quad (1.2.2)$$

下面介绍三种重要的离散型随机变量的概率分布.

1. (0-1) 分布

设随机变量 X 只可能取 0 和 1 两个值, 其概率分布是

$$P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p \quad (0 < p < 1)$$

则称 X 服从 (0-1) 分布.

对于一个随机试验 E , 若它的样本空间 S 只包含两个元素, 即 $S=\{e_1, e_2\}$, 则总能在 S 上定义一个具有 (0-1) 分布的随机变量

$$X = X(e) = \begin{cases} 1 & \text{当 } e=e_1 \\ 0 & \text{当 } e=e_2 \end{cases}$$

并用 X 描述 E 的结果. 例如, 产品的质量是否合格, 工厂的能源消耗是否过量, 抛硬币等都可利用 (0-1) 分布的随机变量来描述. 因此, 它是经常遇到的一种分布.

2. 二项式分布

设试验 E 只有两个可能的结果 A 及 $\bar{A}$, 且 $P(A)=p$, $P(\bar{A})=1-p=q$, 将 E 独立地重复 n 次, 则称该试验为贝努里 (Bernoulli) 试验. 它是一种很重要的数学模型并有广泛的应用.

现在分析贝努里试验中, 事件 A 发生 m ($0 \leq m \leq n$) 次的概率. 已知在 n 次试验中, 事件 A 发生 m 次的情况可能出现 C_n^m 个, 并且

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (1.2.3)$$

而出现每个情况的概率都是 $p^m q^{n-m}$, 所以事件 A 发生 m 次的概率为

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (0 \leq m \leq n)$$

令 X 表示贝努里试验中事件 A 发生的次数, 则 X 为一随机变量, 它的可能取值为 0, 1, $\dots$, n , 且有:

$$P\{X=m\} = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, m=0, 1, \dots, n \quad (1.2.4)$$

显然

$$\sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$$

由于 $C_n^m p^m q^{n-m}$ 恰好是二项式 $(p+q)^n$ 展开式的第 $m+1$ 项, 故称二项式分布.

3. 泊松 (Poisson) 分布

设随机变量 X 的可能取值为 0, 1, 2, $\dots$, 而各个值的概率为

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0, 1, 2, \dots \quad (1.2.5)$$

式中 $\lambda > 0$ 为常数, 则称 X 服从泊松分布, 且有

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

服从泊松分布的随机变量常用于在一定时间间隔内统计随机事件出现的个数,如电话交换台每秒钟内的呼唤次数;在一时间间隔内放射性物质发出的粒子数;每秒钟通过某交叉路口的车辆数等等.因此也是广泛应用的一种重要分布.

1.2.3 随机变量的分布函数

对于连续型随机变量 X , 由于不能一一列举其可能的取值, 因而就不能用分布律来描述它. 这时任一指定的取值的概率趋近于 0, 所以使我们转而去研究取值落在一个区间的概率 $P\{x_1 < X \leq x_2\}$.

定义 设 X 为一随机变量, x 是任意实数, 函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

称为 X 的分布函数.

对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 有

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X \leq x_2\} &= P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} \\ &= F(x_2) - F(x_1) \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

分布函数为一普通的函数, 通过它将来能用数学分析的方法研究随机变量.

分布函数具有以下的基本性质:

(1) $F(x)$ 为一不减函数

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0 \quad (x_2 > x_1)$$

(2) $0 \leq F(x) \leq 1$

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

例 1 (0-1) 分布律的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

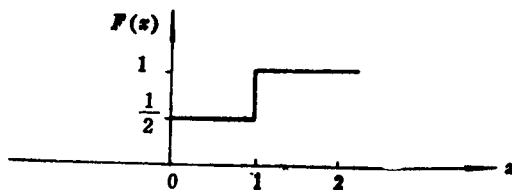


图 1.1 (0-1) 分布律的分布函数

图 1.1 示出 (0-1) 分布的图形曲线.

例 2 一靶子是半径为 2 米的圆盘, 设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成比例, 射击都能中靶. 以 X 表示弹着点与圆心的距离, 试求 X 的分布函数.

解 按题意, 若 $x < 0$, 则 $\{X \leq x\}$ 为一不可能事件, 所以

$$F(0) = P\{X \leq 0\} = 0$$

若 $0 < x \leq 2$, 则 $P\{0 < X \leq 2\} = kx^2$, k 为某一常数. 已知 $P\{0 < X \leq 2\} = k2^2 = 1$,

故得 $k = \frac{1}{4}$, 即

$$P\{0 < X \leq x\} = \frac{x^2}{4}$$

及

$$F(2) = P\{X \leq 2\} = 1$$

于是 X 的分布函数可写为:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$F(x)$ 的图形为一连续的曲线, 如图1.2所示.

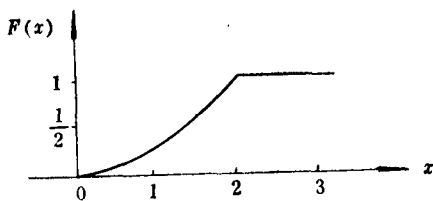


图 1.2 连续分布函数曲线

1.2.4 概率密度

为了描述连续型随机变量各个取值的概率的大小, 最常用的是概率密度. 设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 连续可微, 则定义 $F(x)$ 的导数为 X 的概率分布密度, 简称概率密度或分布密度, 记为

$$f(x) = F'(x) \quad (1.2.7)$$

$f(x)$ 的原始形式为

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x} \quad (1.2.8)$$

由上式可以看出, $f(x)$ 是 x 处 $F(x)$ 的变化率, 与物理学中的线密度的定义类似.

按定义可知概率密度 $f(x)$ 具有以下性质:

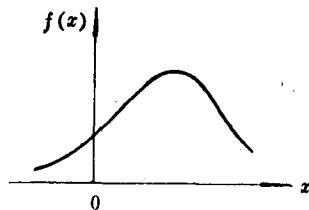


图 1.3 概率密度曲线举例

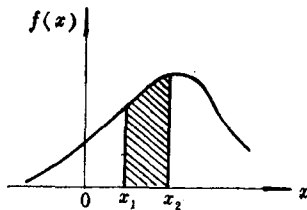


图 1.4 X 落在 (x_1, x_2) 区间的概率

$$(1) f(x) \geq 0$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$(3) P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$(4) \text{若 } F(x) \text{ 在 } x \text{ 处连续, 则有 } F'(x) = f(x)$$

由性质(2)可知, 概率密度曲线与 ox 轴间的面积为 1 (图 1.3), 由性质(3)可知 X 落在 (x_1, x_2) 区间的概率等于图 1.4 中阴影区的面积.

对于离散型随机变量, 它的分布函数可表示为

$$F(x) = \sum_i p_i U(x - x_i) \quad (1.2.9)$$

其中, $U(x)$ 为单位阶跃函数, 即:

$$U(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

一般情况下, 离散型随机变量的分布函数是不可微的; 但如果利用 δ 函数的某些特性, 就能把概率密度的概念推广到离散随机变量的情况, 此时的概率密度为

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\sum_i p_i U(x - x_i) \right] = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \quad (1.2.10)$$

在一般情况下, 随机变量的分布函数可能是混合型的, 即既包括连续部分, 同时还包括离散部分. 利用式 (1.2.8) 和式 (1.2.10) 就可表示出混合型随机变量的概率密度的形式.

下面介绍两种重要的连续型随机变量的分布.

1. 均匀分布

设连续型随机变量 X 在有限区间 (a, b) 内取值, 且其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1.2.11)$$

则称 X 在区间 (a, b) 上服从均匀分布.

例 3 余弦信号 $\cos(\omega_0 t + \Phi)$ 的初始相位 Φ 为一随机变量, 其概率密度为

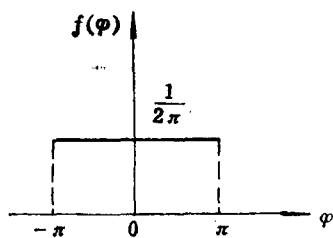


图 1.5 $f(\varphi)$ 曲线

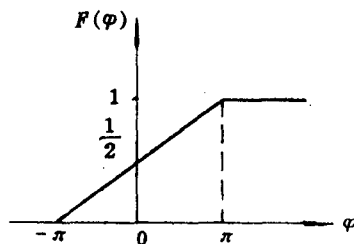


图 1.6 $F(\varphi)$ 曲线

$$f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi < \varphi < \pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

即 Φ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上服从均匀分布. Φ 的概率密度和分布函数分别如图 1.5 及 1.6 所示.

2. 正态分布

设连续随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad -\infty < x < \infty \quad (1.2.12)$$

其中 a 与 σ 为常数, 则称 X 服从参数 a 和 σ 的正态分布或高斯 (Gauss) 分布, 记为 $N(a, \sigma^2)$, 曲线图形示于图 1.7.

正态分布具有以下性质:

(1) 曲线关于 $x=a$ 对称, 见图 1.7.

(2) 当 $x=a$ 时取到最大值 $f(a) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}$. 离 a 越远, $f(x)$ 值越小, 说明 X 落在该区间上的概率越小. 在 $x=a \pm \sigma$ 处曲线有拐点, 曲线以 x 轴为渐近线. σ 值越小,

$f(x)$ 的最大值越大, 并且 $f(x)$ 随 x 的降落越陡. 因此可以把 σ 看作是 x 的散布性指标.

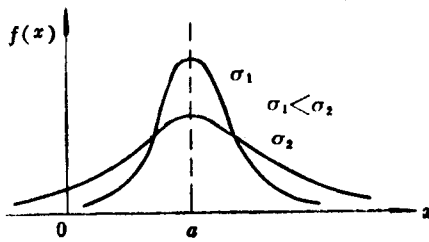


图 1.7 正态分布的 $f(x)$ 曲线

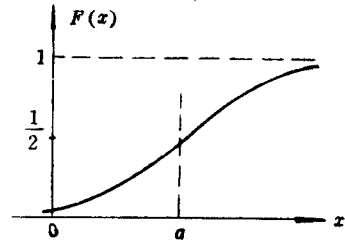


图 1.8 正态分布的 $F(x)$ 曲线

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

由(1.2.12)式得 X 的分布函数为:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (1.2.13)$$

$F(x)$ 曲线如图 1.8 所示, $x=a$ 时, $F(x)=0.5$.

令归一化正态随机变量的取值为 $u = \frac{x-a}{\sigma}$, 则(1.2.13)式变为:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \quad (1.2.13a)$$

其中 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$, 称为积分函数, 有积分数值表可查.

若令 $u = \frac{x-a}{\sqrt{2\sigma^2}}$, 则有

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

称为误差函数, 它和积分函数的关系为:

$$\text{erf}(x) = \Phi(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2}$$

由(1.2.13a)式可知, X 落在区间 (x_1, x_2) 上的概率为

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right) \quad (1.2.14)$$

正态分布应用范围最广, 是随机变量中最重要的一种分布.

1.3 多维随机变量及其分布

在许多实际问题中, 随机实验的结果常需用多个随机变量来描述. 如信号可由振幅和相位两个随机变量描述, 对空中目标射击的弹着点要用三个随机变量描述等等. 由多个随机变量构成的矢量或整体叫作多维随机变量. 本节重点讨论二维随机变量, 其结果可推广到多维随机变量.