拓扑学的几何导引

〔英〕C. T. C. Wall 著

季文铎
张增喜 合译

高等教育出版社

本书是根据C. T. C. Wall著《A Geometric Introduction to Topology》（1972）一书译出的．此书是一本代数拓扑学的初等教程，它以欧氏空间中的点集为基础，避免使用单纯形，力图使预备知识减少到最低限度．

全书共有15章，主要内容有：空间和连续映射，Abel群，连通性，同伦，圆的研究，提升和扩张，计算群H′的例子，Eilenberg分离性判别准则，对偶映射，对偶定理的证明，Jordan曲线定理，进一步的对偶性质，几何的积分理论等．各章最后都有本章内容的进一步发展的介绍和文献，并挑选了一些练习和问题．

本书可供数学专业以及其他有关专业作教学用书和参考用书．

拓扑学的几何导引

［英］C.T.C.Wall 著

季文铎　张增喜　合译

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

开本850×1168　1/32　印张6.375　字数153 000
1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷
印数 00 001—3 010
ISBN 7-04-000331-7/O·92
定价 2.20 元

序　言

本书的目的是要提供一本的确适用于对大学生讲授代数拓扑的初等教程.尽管力图把必要的预备知识减少到最小限度,但在三年级前设置这门课程未必合适.

我摆脱了这门学科现有的许多处理方法，主要有两个方面：一是我没有以一般拓扑学教程为前提，而只是在Euclid空间中的点集上来阐述. 其好处是无需许多定义即可举出解说性的例子，而且所用的点集的很多特殊性质（可度量性；特别是正规性和Hausdorff 性质）就不必分别讨论了. 二是避免使用单纯形. 我确信. 采用单纯复合形的同调论的通常定义会写成一本不够理想的引论教程，因为在能够证明拓扑不变性之前，必须有一个冗长的发展过程. 我只采用了那些不证自明的拓扑不变性概念；并且有效地运用了H^0和H^1的Čech定义以及H_0的奇异定义.

摆脱单纯复合形使我们回到研究一般点集的老传统. 处理方法是双重的：首先引进几何观念，然后利用代数学逐步把它造成一种机构. 虽然本书不是把范畴和函子形式地定义出来，但在每一阶段都强调了函子的性质.

本书的高峰，是平面上的 Alexander对偶定理的证明，它把Jordan曲线定理作为特殊情况包括在内. 整个第一部分对此并非都是必要的. 特别是我们虽然用了第7章中的一些结果，而其证明（比书中大部分内容都更难些）在初读时可以略去. 后面的一些章节基本上尽力强调拓朴观念与纯数学的其它分支的关系.

在符合提供一个充实但又不过分快的叙述，而且至少获得一个真正有价值的结果前提下，我把本书的篇幅尽可能地缩短. 正

是这个缘故，本书完全不写基本群。它应该是本书一个姐妹篇的合适的主题，但这个题材是如此之大，以致本身就需要写成一整本书，才能使学生真正有机会学到这方面若干有价值的东西。

各章之末都有简短的一节说明本章的内容如何可以进一步发展，并附有对此发展的参考文献。还挑选了一些练习和问题。那些打星号的要用到本书未曾包括的内容。

本书出自作者在剑桥和利物浦于1963—1967年的教学讲义。感谢 Frank Adams对本书的评论，它实际上改善了第Ⅰ和第Ⅱ部分的叙述方式。

英格兰，利物浦

1972．1．

C. T. C. Wall

目　录

第0部分

预备知识

第0章　记号和前提

数

我们假定（读者）熟悉全体实数R的标准性质；特别是R的每个有界子集X有一个最小上界，或上确界$\sup X$，和一个最大下界，或下确界$\inf X$．Euclid空间R^n以n个实数的序列：$x=(x_1, \cdots, x_n)$作为它的点．例如原点是$0=(0, \cdots, 0)$．x_i称为点x的坐标．两个这样的点之间的距离由（Pythagoras）公式

$$d(x,x')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+\cdots+(x_n-x_n')^2}$$

确定．它满足"三角不等式"

$$d(x,x')+d(x',x'')\geqslant d(x,x'').$$ ——易读会

全体复数C可看作在R^2中赋予了补充的乘法结构

$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=(x_1y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1).$$

通常我们将$(0,1)$记作i，将(x_1,x_2)记作x_1+ix_2，并常用z表示复数．$z=x_1+ix_2$的一些标准函数是

实部　$\mathrm{Re}\, z=x_1$，

虚部　$\mathrm{Im}\, z=x_2$，

模　$|z|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=d(z,0)$，

幅角 $\arg z=\theta$，以

$$0\leqslant\theta<2\pi,\ \sin\theta=x_2/|z|,\ \cos\theta=x_1/|z|$$

表示 θ 的特性。

全体整数的集合——正的、负的和零——用 $\boldsymbol{Z}$ 表示。

集合

通常用一个大写字母，例如 X，表示集合。把 X 的成员 x，记作 $x\in X$。如果 X 是由具有性质 $P(x)$ 的“事物” x 所确定的集合，记作

$$X=\{x:P(x)\}。$$

我们沿用习惯的集合论符号（假定读者已熟悉它们），即

$X\cup Y=\{x:x\in X$ 或 $x\in Y$ 或同时属于二者$\}$，称为 X 和 Y 的并，

$X\cap Y=\{x:x\in X$ ~~和~~ 且 $x\in Y\}$，称为 X 和 Y 的交，

$X\setminus Y=\{x\in X:x$ 不属于 $Y\}$，称为 Y 在 X 中的余集，以及

$Y\subset X$，如果 Y 的所有成员都属于 X，即 Y 包含在 X 内。

X 和 Y 称为不相交的，如果它们的交是空集 $\varnothing$，即其中没有元素。当 X 是不言自明时，我们简单地把 $X-Y$ 叫做 Y 的余集（对于子集 $Y\subset X$）。

对于某些特殊的集合，有标准的记号。对于实数的区间，如果 $a<b$，我们记

$$[a,b]=\{x\in\boldsymbol{R}:a\leqslant x\leqslant b\},$$

$$]a,b[=\{x\in\boldsymbol{R}:a<x<b\},$$

$$[a,b[=\{x\in\boldsymbol{R}:a\leqslant x<b\}，等等。$$

特别地，把标准单位区间记作 $\boldsymbol{I}=[0,1]$，

$$\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{R}-\{0\}=\{x\in\boldsymbol{R}:x\neq0\},$$

$$\boldsymbol{R}_+=[0,\infty[=\{x\in\boldsymbol{R}:x\geqslant0\},$$

$$R_+^* =]0,\infty[= R^* \cap R_+.$$

在高维的情况，记

$D^n = \{x \in R^n : d(x,0) \leqslant 1\}$，称为单位圆盘（或实心球）；

$S^{n-1} = \{x \in R^n : d(x,0) = 1\}$，称为单位球面，以及，对于任意$x \in R^n, r \in R_+^*$，记

$$U(x,r) = \{y \in R^n : d(x,y) < r\}.$$

一般，R^n的一个子集称为有界的，如果它可以包含在某个$U(x,r)$中。

最后，对于任意两个集合X和Y，有(Descartes)乘积

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}.$$

不要把这个记号同$\{x, y\}$混淆起来，后者表示由两个元素x和y构成的集合。

映射

给定两个集合X和Y，从X到Y的一个映射f，使得X的每个元素x与一个完全确定的元素$f(x) \in Y$相对应。我们用$f: X \to Y$表示f是从X到Y的映射。我们并不坚持任何特殊的逻辑体系，仅仅强调一点，即使Y是Z的子集，也不认为f是从X到Z的映射（尽管它也确定一个映射）：映射的概念把集合X和Y包括进来作为其构成部分。X称为f的定义域，Y称为取值范围。如果f是用x的某个式子$f(x)$定义的，可把它记作

$$x \longmapsto f(x):$$

$f(x)$称为x在f下的象。

如果$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$，合成映射

$$g \circ f \text{（或简写作} gf\text{）}: X \to Z$$

的定义为

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

如果 $A\subset X$ 是一个子集，包含映射 $i:A\to X$的定义为：对于所有的$a\in A$，$i(a)=a$。i 与 $f:X\to Y$的合成表示为

$$f|A:A\to Y,$$

并称它为 f 在 A 上的限制；而 f 称为$f|A$ 的扩张。包含映射的一个极明显的例子是恒同映射$1_X:X\to X$；在不会发生混淆的时候，简单地用 1 表示。$f:X\to Y$的另一个极简单的例子是，选定$y_0\in Y$，对于所有 $x\in X$，定义 $f(x)=y_0$。这样的映射称为常值映射；它也可定义为（唯一的）映射 $X\to\{y_0\}$ 和包含映射 $\{y_0\}\to Y$ 的合成。用（对于任意X,Y）

$$p_1:X\times Y\to X,\quad p_2:X\times Y\to Y$$

表示投影映射，其定义分别为$p_1(x,y)=x$，$p_2(x,y)=y$。

映射 $f:X\to Y$是内射[1]，如果X的不相同的元素有不相同的象，即如果

$$f(x)=f(x')\text{蕴涵}\quad x=x'.$$

映射 $f:X\to Y$是到上映射[2]，如果对于每个$y\in Y$，存在 $x\in X$使得 $f(x)=y$；既是内射又是到上映射的映射称为双射。

如果$f:X\to Y$和$g:Y\to X$使得$g\circ f=1_X$，则 f 是内射，g 是到上映射。相反，所谓选择公理是说，如果 g 是到上映射，则存在映射 f 使得$g\circ f=1_X$。而且 g 是双射当且仅当 f 是双射；这等价于 $f\circ g=1_Y$。注意，如果 $g\circ f$是到上映射，则 g 也是到上映射；如果$g\circ f$是内射，则 f 也是内射。

不同的集合间的映射图称为交换图，如果图中任意给定的一对集合间的合成映射都是相等的——例如，对于图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & B \arrow[d, "s"] \arrow[dl, "r"'] \\ C \arrow[r, "t"] & D \end{tikzcd}$$

(1) 内射亦称单映射——译者注。(2) 到上映射亦称满映射—译者注。

就意味着$r\circ p=q, t\circ r=s$，以及(因而) $s\circ p=t\circ q$。

最后是两个记号，它们并不（象上面所有的那样）十分标准。给定集合X和Y，把$X\to Y$的所有映射的集合记作$\mathrm{Map}(X, Y)$（它是一个集合，这是集合论的公理）。其次，给定映射f：$X\to Y$和Y的子集B，定义

$$f^{\dashv}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}.$$

通常把它写作$f^{-1}(B)$，但这个记号给自身带来混乱：我们的记号是按Porteous的意见(Topological Geometry, North Holland)而采用的。如果A是X的子集，与通常一样，记

$$f(A)=\{f(a): a\in A\}.$$

等价关系

我们经常需要描述集合X的一个分解，即把X分成一系列子集$\{X_\alpha\}$，其中任何两个子集都没有公共的元素，即它们是分离子集。两个元素x，x'称为等价的，如果它们同属于一个子集X_α，并把这记作$x\sim x'$。则$\sim$有三条性质：

自反的　$x\sim x$（这就是说每个$x\in X$都在某个X_α中）。

对称的　$x\sim y$蕴涵$y\sim x$。

传递的　$x\sim y$和$y\sim z$蕴涵$x\sim z$。

反之，如果$\sim$有这些性质，它就称为一个等价关系，而上述X所分解成的分离子集称为等价类。

第1章　空间和连续映射

导言

在这一章内，我们尽可能以朴实的观点给出本书其他部分所需要的分析拓扑的内容．因而只讨论 R^n 的子空间，虽然许多读者可能已经接触过较一般的“拓扑空间”的定义．

连续性

拓扑学是从几何上研究连续性．当然，这可以公理化地进行，不过最重要和最有趣的问题是从对 Euclid 空间 R^n 的子集的研究而引起的．我们将简略地用空间一词表示某个Euclid 空间的一个子集．

如果 X 和 Y 是空间，$f:X\to Y$ 是函数，回忆一下分析中所说，所谓 f 在点 $x\in X$ 连续，是指如果给定任意正实数 ε，可以选取正实数 δ，使得若 $x'\in X$ 和 $d(x,x')<\delta$，则 $d(f(x),f(x'))<\varepsilon$．如果 f 在 X 的每个点处都连续，则称 f 为连续映射．

这个定义用起来实际上有点麻烦，而用下面所给的连续性的一些性质去进行论证，通常更方便些．第一条性质从定义就可以立刻得到．

C 1　设 $f:X\to Y$ 连续；又设 $X'\subset X$ 和 $Y'\subset Y$ 满足 $f(X')\subset Y'$；用 $f':X'\to Y'$ 表示 f 的限制，则 f' 是连续的．■

下一条性质更重要．

C 2　如果 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 都连续，则 $g\circ f:X\to Z$ 连续．

证明　设 $x\in X$．我们要证明 $g\circ f$ 在 x 处连续．设 $\varepsilon>0$，因为

g 在 $f(x)$ 处连续，故可以找到$\eta>0$使得对于$y\in Y$ 和 $d(y,f(x))<\eta$，有

$$d(g(y),\ g(f(x)))<\varepsilon.$$

又因为 f 在 x 处连续，故又可以找到 $\delta>0$，使得对于 $x\in X$ 和 $d(x,x')<\delta$，有

$$d(f(x'),f(x))<\eta.$$

因而，由上述（命$y=f(x')$），

$$d(g(f(x')),\quad g(f(x)))<\varepsilon.$$

C 3　如果$X\subset Y$，则包含映射$X\to Y$是连续的。

这是显然的；取$\delta=\varepsilon$。■

由此，取值范围与映射是否连续的问题无关：如果 $f:X\to Y'$，且$Y'\subset Y$（用包含映射 i），则根据C1，$i\circ f$连续蕴涵 f 连续，而根据C 2 和C 3，f 连续蕴涵$i\circ f$连续。所以如果$Y\subset R^m$，只要查明 f 是否确定从X到R^m的连续映射就足够了。

设$f:X\to R^m$。则由

$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x))\qquad (x\in X).$$

定义了分量映射$f_i:X\to R(1\leqslant i\leqslant m)$。

C 4　对于$f:X\to R^m$，f 连续当且仅当所有分量映射$f_i:X\to R$都连续。

证明　如果 f 连续，则对于给定的$x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，如定义中那样选取 δ。今

$$d(f(x),\quad f(x'))=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}d(f_i(x),f_i(x'))^2}$$

$$\geqslant d(f_i(x),\ f_i(x')),$$

故如果$d(x,x')<\delta$，则

$$d(f_i(x),\ f_i(x'))<\varepsilon.$$

反之，如果每个f_i都连续，选取$\delta_i>0$，使得若$d(x,x')<\delta_i$，就有