高等学校教学用书

电子计算机应用数学

第一册

冶金工业出版社

高等学校教学用书
电子计算机应用数学
第一册
杨篪引　马正午　孙宇等　编
*
冶金工业出版社出版
新华书店北京发行所发行
冶金工业出版社印刷厂印刷
*
787×1092 1/16　印张 28 1/4　字数 677 千字
1979年7月第一版　1979年7月第一次印刷
印数00,001～80,000册
统一书号：15062·3446　定价 **3.10** 元

前　　言

电子计算机是当前世界科学技术最重要的成就之一。随着我国四个现代化的逐步实现，电子计算机必将在国民经济和科学技术的各个方面日益得到广泛的应用。电子计算机的应用技术涉及到现代数学的许多方面，远远超出了原工科院校《高等数学》的范畴。本书主要是为电子计算机专业、自动控制专业及自动化仪表专业等的教学需要而编写的；着重介绍最基础的知识，尽可能地介绍有关领域的新成果与应用；同时编选了例题和习题。为了照顾有关专业的不同需要，对较难理解的部分用 * 号或附录编排，供教学时选择。

由于篇幅较大，本书分三册出版。第一册包括线性代数和数值分析；第二册包括复变函数、积分变换、变分法、概率论、随机过程、集合论与拓扑学引论等；第三册包括离散数学结构和数据结构等内容。

本书由杨簏引主编，第一章由马正午执笔，第二章由孙宇执笔，参加编写工作的还有王佩玲、谢克中等同志。在编写过程中，得到了李文清、戴冠中等同志的大力帮助，我们在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，时间仓促，又未经过教学实践，所以本书很不成熟，缺点和错误在所难免，请读者批评指正。

编　者

1978 年 12 月

目　　录

第一章　线性代数 …… 1

第一节　矩阵与线性方程组 …… 1

一、n阶行列式 …… 1

二、n维向量 …… 15

三、矩阵及其秩的计算 …… 23

四、线性方程组 …… 28

第二节　矩阵代数 …… 45

一、矩阵的加法和矩阵与数相乘运算 …… 45

二、矩阵的乘法运算和矩阵的幂 …… 47

三、分块矩阵 …… 54

四、逆矩阵 …… 59

五、矩阵的因式分解 …… 70

第三节　线性空间和线性变换 …… 81

一、预备知识 …… 81

二、线性空间 …… 84

三、线性变换 …… 92

四、欧氏空间 …… 104

五、U空间和U变换 …… 121

第四节　特征值与特征向量 …… 127

一、特征矩阵的概念 …… 128

二、特征多项式及其性质 …… 141

三、矩阵的Jordan标准形介绍 …… 156

第五节　二次形 …… 170

一、二次形和它的标准形 …… 170

二、惯性定律 …… 181

三、正定二次形 …… 185

第六节　矩阵分析 …… 189

一、基本概念 …… 189

二、函数矩阵的微分和积分 …… 191

三、矩阵函数 …… 201

第七节　广义逆矩阵 …… 212

一、广义逆A^-的一般概念与性质 …… 213

二、广义逆A^-在解线性方程组中的应用 …… 228

三、Moore-Penrose广义逆 …… 238

四、矩阵方程 …… 248

附录Ⅰ　矩阵函数$f(A)$的Lagrange插值多项式计算法 …… 254

附录Ⅱ　状态转移矩阵 …… 256

附录Ⅲ　用线性微分方程组解矩阵Riccati方程 …… 263

第二章　数值分析 ……269
第一节　引言 ……269
第二节　一元方程的解法 ……273
一、多项式及其零点 ……274
二、二分法 ……283
三、插值法（试位法和抛物线法） ……284
四、一点迭代法 ……286
五、加速收敛 ……289
六、高阶过程Newton法……290
第三节　数值逼近……295
一、线性插值 ……296
二、多项式插值 ……298
三、有限差分插值 ……301
四、样条函数逼近 ……306
五、最小二乘多项式逼近 ……309
第四节　数值微分和积分 ……312
一、数值微分 ……312
二、数值积分 ……315
三、Gauss-Legendre求积法……323
第五节　线性方程组的解法……326
一、主元素消去法 ……326
二、Gauss-Jordan消去法 ……335
三、消元法的误差 ……336
四、用迭代法解线性方程组 ……344
第六节　代数特征值问题 ……348
一、Jacobi 方法 ……348
*二、化实对称矩阵为三对角形 ……355
*三、对称三对角矩阵的特征值 ……358
*四、对称三对角矩阵的特征向量 ……362
*五、代数特征值问题计算过程 ……364
六、求矩阵最大与最小特征值的迭代法 ……371
第七节　常微分方程的数值解法……372
一、Euler法……373
二、预测-校正法……375
三、Runge-Kutta 法 ……377
四、稳定性 ……382
五、微分方程组和高阶方程 ……383
六、边值问题 ……385
第八节　最优化方法简介 ……388
一、一元函数的最优化 ……389
二、多元函数最优化问题 ……395
附录Ⅰ　几个基本方法的标准FORTRAN程序……403

附录Ⅱ　线性规划的解法 ……417
附录Ⅲ　Gauss-Jordan法求矩阵的逆矩阵 ……427
附录Ⅳ　偏微分方程的数值解法 ……433
习题解答 ……438
参考文献 ……444

第一章 线 性 代 数

随着近代科学技术的飞速发展，在解决近代工程问题中，矩阵理论越来越被广泛应用，尤其在电子计算机、自动控制等方面，线性代数理论已经成为不可缺少的数学工具之一。本章就是以矩阵理论为重点讲述线性代数的基本知识及其在工程实际中的应用。

第一节 矩阵与线性方程组

我们知道，具有下面形式的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

称为线性方程组。其中 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 代表 n 个未知量；m 是方程的个数；a_{ij}（$i=1,2,\cdots m$；$j=1,2,\cdots n$）称为方程组的系数；b_i（$i=1,2,\cdots m$）称为常数项。

工程实际中的许许多多问题常常归结到一个线性方程组的求解问题。所以，线性方程组的理论在数学中具有基本的重要性。为了便于研究和求解线性方程组，我们往往只把方程组中的未知量的系数取出来列成表：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

此表数学上称之为矩阵。显然，表中的每一元素确定后，线性方程组也就唯一确定了。对表（即矩阵）的研究也就相当于对线性方程组的研究，以后我们将会清楚地看到：矩阵这一数学工具，对于研究工程中的问题既简洁又方便。本节主要是围绕矩阵概念，对行列式理论，n 维向量以及线性方程组的求解等问题进行讨论。

一、n 阶行列式

由初等代数，我们已经熟知，二阶、三阶行列式是指：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

严格地说，上面等式左边称之为行列式，行列式表示的是一个数，这个数由等式右边的代数式给出，等式右边这个代数式，称为行列式的展开式。

现在我们以三阶行列式为例，分析一下展开式的规律。容易看出，展开式中每一项都

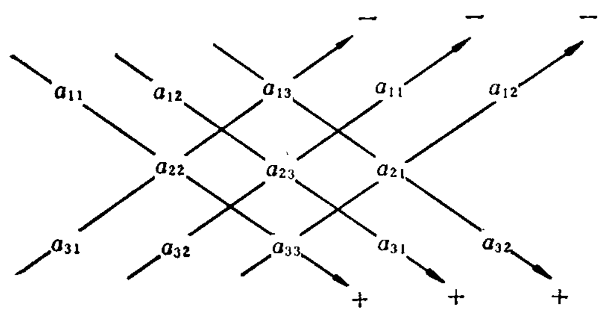

图 1-1

是三个既位于不同的行，也位于不同的列的元素乘积，并且满足这样规律的乘积项（只能有六项），也都在行列式中出现了。但是每一项乘积正负号的规律，却不易观察出来。图 1-1 是帮助我们记忆三阶行列式展开式的一种方法。

为了弄清楚三阶以上行列式的展开式各乘积项的正负号的规律性，我们将每项乘积元素的两个下标，按如下规律重排。由于每行都取一个元素，故可将 n 个乘积元素的第一个下标（行下标）按自然数顺序排列。这样排列好后，第二个下标(列下标)跟着便形成了一种顺序，将两个下标排列在如下的括号内：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\cdots n \\ p_1 & p_2 & p_3\cdots p_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

（1）式中 p_1，p_2，…，p_n 均表示 n 个不相同的自然数。显然 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 则表示了 n 个不相同自然数的某种排列。（1）式以后我们称之为一个置换。

如果还是以三阶展开式为例，则可以写出如下六种不同的置换

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{2}$$

而且（2）式中的后五个置换均可以利用第一个置换改变第二行自然数的顺序而得到。例如，置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

相当于将

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

中第二行自然数 1，3 互换得到。再如，置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

是经过下面的两次自然数互换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

而得到的。

这样我们又可把（2）式的全部置换分成两类：能通过自然数奇次互换得到的，称为奇置换，如（2）中的后三个置换。能通过自然数偶次互换得到的，称为偶置换，如(2)中的前三个置换。又由三阶行列式展开式发现，偶置换的对应乘积项恰取正号；奇置换的对应乘积项恰取负号。如果将上述分析推广到一般，我们就可以给出 n 阶行列式的定义。

1．n阶行列式的定义与性质

定义1　用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

表示的n阶行列式指的是这样的$n!$项的代数和：这些项是一切可能的取自（6）的不同的行与不同的列的n个元素的乘积，每一项的符号决定于这一项乘积的元素之下标置换次数的奇偶性，偶数取正，奇数取负。

为了理论上研究的方便，我们也常把（6）式缩写成如下形式

$$|a_{ij}|\ (i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

或用和号表示成

$$|a_{ij}|=\Sigma\varepsilon(p_1p_2\cdots\cdots p_n)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n}$$

其中
$$\varepsilon(p_1p_2\cdots\cdots p_n)=\begin{cases} 1 & 当(p_1p_2\cdots\cdots p_n)为偶次置换 \\ -1 & 当(p_1p_2\cdots\cdots p_n)为奇次置换 \end{cases}$$

现在我们来研究n阶行列式的性质。

性质1　行列式的行与列互换，其值不变。即设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots\cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$D=D^T$$

（今后我们称D^T为D的转置行列式）

证　由行列式定义，有

$$D=|a_{ij}|=\Sigma\varepsilon(p_1p_2\cdots\cdots p_n)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n} \tag{7}$$

$$D^T=|a_{ji}|=\Sigma\varepsilon(p_1p_2\cdots\cdots p_n)a_{p_11}a_{p_22}\cdots\cdots a_{p_nn} \tag{8}$$

分析（7）和（8）两式可知：D和D^T是由完全相同的项组成，并且下标排列（$p_1p_2\cdots\cdots p_n$）的奇偶性相同，所不同的只是元素的第一、第二下标进行了互换（即元素行与列互换），故有$D=D^T$。

性质2　交换行列式的两行（或列），行列式改变符号。即

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
(i)\\
\\
(j)\\
\\
\\
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{i1} & a_{i2} \cdots\cdots a_{in} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{j1} & a_{j2} \cdots\cdots a_{jn} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{j1} & a_{j2} \cdots\cdots a_{jn} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{i1} & a_{i2} \cdots\cdots a_{in} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{c}
\\
\\
(i)\\
\\
(j)\\
\\
\\
\end{array}
\tag{9}
$$

证 由行列式的定义可知，等式左边展开式的每一项均可写成为

$$a_{1p_1}\ a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n}$$

符号由元素第二下标的排列顺序的奇偶性来决定，即由置换

$$\begin{pmatrix} 1 \cdots\cdots i \cdots\cdots j \cdots\cdots n \\ p_1 \cdots\cdots p_i \cdots\cdots p_j \cdots\cdots p_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

来决定。

等式（9）的右边与左边所不同的仅仅是第 i 行元素变成第 j 行元素，第 j 行元素变成第 i 行元素；而列的次序未变。所以，等式（9）右边展开式每一项的符号应该由置换

$$\begin{pmatrix} 1 \cdots\cdots i \cdots\cdots j \cdots\cdots n \\ p_1 \cdots\cdots p_j \cdots\cdots p_i \cdots\cdots p_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

来决定。由于p_i和p_j互换，所以置换（10）和（11）的奇偶性显然相反。故等式（9）两边相差一个负号。

性质3 某一行（或列）各元素如有公因子，则可将公因子提出行列式记号之外。即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
ka_{i1} & ka_{i2} \cdots\cdots & ka_{in} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= k
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{i1} & a_{i2} \cdots\cdots a_{in} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{12}
$$

证 根据行列式的定义，等式（12）的左边有

$$\sum\varepsilon(p_1p_2\cdots\cdots p_n)a_{1p_1}\cdots\cdots(ka_{ip_i})\cdots\cdots a_{np_n}=k\sum\varepsilon(p_1p_2\cdots\cdots p_n)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n}$$

因此等式（12）左右两边完全相等。

性质4 某一行（或列）的各元素如果是两个数的和，则可以把这行列式化为两个行列式之和。即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} \cdots\cdots a_{in}+a'_{in} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{i1} & a_{i2} \cdots\cdots a_{in} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a'_{i1} & a'_{i2} \cdots\cdots a'_{in} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{13}
$$

证 由行列式定义，等式（13）左边有

$$\sum\varepsilon(p_1p_2\cdots\cdots p_n)a_{1p_1}\cdots\cdots(a_{ip_i}+a'_{ip_i})\cdots\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum\varepsilon(p_1p_2\cdots p_n)a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum\varepsilon(p_1p_2\cdots p_n)a_{1p_1}\cdots a'_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

这样就证明了等式（13）。

性质5 如果行列式中有两行（或两列）的对应元素成比例，则行列式的值等于零。即

$$\begin{array}{r}\\ \\(i)\\ \\(j)\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots & a_{in}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ ka_{i1} & ka_{i2}\cdots\cdots & ka_{in}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=0 \tag{14}$$

证 记等式（14）左边的值为D，利用性质3，则有

$$D=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots & a_{in}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots & a_{in}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=kD_1$$

显然，行列式D_1中的第i行与第j行元素是相同的，交换这两行，行列式的值变号，即$D_1=-D_1$，移项得$2D_1=0$，从而$D_1=0$，于是有$D=0$。

特别是，若行列式中有两行（或两列）的对应元素相同，则行列式等于零。

性质6 如果一行（或一列）中每个元素加上另一行（或另一列）对应元素的k倍，行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{i1}+ka_{j1} & & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots\cdots & a_{in}+ka_{jn}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots & a_{in}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \tag{15}$$

证 由行列式定义，有

$$\sum\varepsilon(p_1p_2\cdots p_n)a_{1p_1}\cdots(a_{ip_i}+ka_{jp_j})\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum\varepsilon(p_1p_2\cdots\cdots p_n)a_{1p_1}\cdots\cdots a_{ip_i}\cdots\cdots a_{jp_j}\cdots\cdots a_{np_n}+k\sum\varepsilon(p_1p_2\cdots\cdots p_n)a_{1p_1}$$

$$\cdots\cdots a_{jp_j}\cdots\cdots a_{jp_j}\cdots\cdots a_{np_n}$$

上式等号右边第二个和式是具有两行相同的行列式，由性质5知其值为0。于是性质6得证。

2．*n*阶行列式的计算

定义2 n $(n>1)$阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1j}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdots\cdots a_{ij}\cdots\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nj}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

的某一元素a_{ij}的余子式M_{ij}指的是在D中划去a_{ij}所在的行和列后，所余下的（$n-1$）阶余子式。即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1j}, & \cdots, & a_{1n} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, \\ \cancel{a_{i1}}, & \cancel{\cdots}, & \cancel{a_{ij}}, & \cancel{\cdots}, & \cancel{a_{in}} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nj}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1,j-1}, & a_{1,j+1}, & \cdots, & a_{1n} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ a_{i-1,1}, & \cdots, & a_{i-1,j-1}, & a_{i-1,j+1}, & \cdots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & \cdots, & a_{i+1,j-1}, & a_{i+1,j+1}, & \cdots, & a_{i+1,n} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{n,j-1}, & a_{n,j+1}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 1　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

则元素a_{23}的余子式M_{23}为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

定义 3　n阶行列式D的元素a_{ij}的余子式M_{ij}附以符号$(-1)^{i+j}$后，叫做元素a_{ij}的代数余子式，用记号A_{ij}表示。即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

譬如例 1 中的四阶行列式，元素a_{23}的代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

一个四阶的行列式，它的各元素的代数余子式的符号，我们可以通过下面的表来记忆

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

对于n阶行列式的各元素代数余子式的符号规律，可以根据上表依此类推得到。

下面我们来研究n阶行列式的计算问题。为此，我们先介绍关于行列式降阶的定理。

定理 1　设有一个n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\ \cdots a_{ij}\cdots\ 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

此行列式的特点是第 i 行元素除a_{ij}以外，其余都是0；对于这样的行列式则有

$$D=a_{ij}A_{ij}$$

证 此定理我们不给出一般情况的证明，仅利用三阶行列式来加以说明。

例如，根据行列式定义，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}$$

又如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}=-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{21}a_{32}=-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})$$

$$=-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{32}(-1)^{3+2}M_{32}=a_{32}A_{32}$$

推广到一般，即可说明此定理的正确性。

定理2 行列式D等于它的任意一行（或列）的所有元素与它们的对应代数余子式的乘积之和。

换句话说，对于行列式D有下列等式成立：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots\cdots+a_{in}A_{in}$$
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots\cdots+a_{nj}A_{nj}$$
$$(\text{其中}\,i,j=1,2,\cdots\cdots n)$$

证 我们先把行列式D写成以下形式，并应用行列式性质4，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\ 0\ \cdots\ 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\ a_{i2}\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\ \ 0\cdots\ a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

再由定理 1，可得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

同理对行列式D的行进行上述运算，可得

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,2\cdots,n)$$

通常我们也称定理 2 为行列式的降阶定理。

例 2 计算下列四阶行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

解 利用定理 2 对此行列式进行降阶。(下面我们依第三行展开)，得

$$D=2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&3&-4\\-5&3&-3\end{vmatrix}+1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&1&2\\5&1&-4\\1&-5&-3\end{vmatrix}$$

$$+(-1)\times(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}3&1&-1\\-5&1&3\\1&-5&3\end{vmatrix}=2\times16-40+48=40$$

为了求解此行列式的值，我们还可以先不利用定理 2，而是通过行列式性质 6，把所求行列式中的一些元素变成零，然后再利用定理 1 来进行降阶。(这种方法叫做先“造零”，后降阶)，具体作法如下，例如，我们可以选择行列式的第三行来“造零”：

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}\underset{\substack{3\text{列加到}\\4\text{列上}}}{=}\begin{vmatrix}3&1&-1&1\\-5&1&3&-1\\2&0&1&0\\1&-5&3&0\end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{3\text{列}\times(-2)\\\text{加到 1 列上}}}{=}\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}$$

这时再利用定理 1，得

$$D=1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}\underset{\substack{1\text{行加到}\\2\text{行上}}}{=}\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}=30+10=40$$

例 3 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0\cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}$$

证 反复利用定理 1 对上述等式左边行列式进行降阶，可得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0\cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0\cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots\cdots = a_{11}\,a_{22}\cdots\cdots\,a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

说明：（1）符号“$\prod$”表示连乘积的意思，$\prod\limits_{i=1} a_{ii}$即为

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}$$

（2）同例 3 我们显然可以证得：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n} \\ & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

（行列式中空白处表示元素为 0，以下同）

特殊地，显然有

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

（3）以后我们常把行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

② 分别称为下三角行列式和上三角行列式。例 3 的结论，可以启发我们一个计算较高阶行列式的数值的方法：先利用行列式的性质（即对行列式进行“造 0 ”）化成上（或下）三角

行列式的形状，然后再将主对角线上元素乘起来，就是所求行列式的值。利用这样的方法来计算较高阶行列式的值，既快又简便。

例 4 计算下列 n 阶 Vandermonde 行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1\cdots\cdots 1 \\ a_1 & a_2\cdots\cdots a_n \\ a_1^2 & a_2^2\cdots\cdots a_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1}\cdots\cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解 由行列式的最后一行开始，每一行减去它的相邻的前一行乘以 a_1，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (a_2-a_1) & (a_3-a_1) & \cdots & (a_n-a_1) \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

根据定理 1，有

$$D_n=\begin{vmatrix} (a_2-a_1) & (a_3-a_1) & \cdots\cdots & (a_n-a_1) \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots\cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots\cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot D_{n-1}$$

D_{n-1} 称（$n-1$）阶 Vandermonde 行列式，若对 D_{n-1} 施以同样的运算，得

$$D_{n-1}=(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\ D_{n-2}$$

$$D_{n-2}=(a_4-a_3)(a_5-a_3)\cdots(a_n-a_3)\ D_{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

所以，最后得到

$$\begin{aligned} D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)& \\ (a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)& \\ \cdots\cdots& \\ (a_n-a_{n-1})& \end{aligned}$$

如果采用连乘积的符号，Vandermonde 行列式的值可以有下列简洁的表达式：

$$D_n=\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j)$$

定理 3 行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的某一行（或列）的元素与另外一行（或列）的对应元素的代数余子式的乘积之和等于0。换句话说，有等式

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$$

证 设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

D_1的第 i 行与第 j 行元素完全相同，根据行列式性质5，则有$D_1=0$；另一方面，D_1与D仅有第 j 行元素不同，因此，D_1的第 j 行的元素的代数余子式与D的第 j 行的对应元素的代数余子式相同，把D_1依第 j 行展开，得

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

因而有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$$

3．线性方程组的解法——Cramer规则

设给定了一个含有 n 个未知量的 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{16}$$

根据方程组（16）的未知量系数可以构成一个 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

现在给出用行列式解线性方程组（16）的一般方法。

定理 4 一个含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组（16），当它的行列式$D\neq 0$时，有且仅有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots\cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D} \tag{17}$$