全国高等师范专科学校教材

高等代数

主编　霍元极

北京师范大学出版社

全国高等师范专科学校教材

高等代数

主编　霍元极

编者（以姓氏笔划为序）

姚家昌　郭文富

寇福来　霍元极

北京师范大学出版社

高 等 代 数

霍元极 主编

北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
北京通县电子外文印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张:14.5 字数：354 千
1989年7月第1版 1989年9月第2次印刷
印数：2 001—6 000

ISBN 7—303—00643—5/O·106
定价：3.45元

前　言

本书是受国家教育委员会的委托，根据国家教育委员会师范教育司1988年颁发的二年制师范专科学校数学专业教学计划和《高等代数》教学大纲编写的。

高等代数是师专数学专业的一门重要基础课，是中学代数的继续和提高。它也是现代代数学的基础知识，是学习掌握其它数学学科以及科学技术的基础。

这门课程大致分为三部分：多项式理论、线性代数和群、环、域简介。多项式理论是以数域上一元多项式的因式分解理论为中心；线性代数主要讲授矩阵和线性方程组理论、向量空间和线性变换；群、环、域简介主要介绍代数学中群、环、域这几个基本概念及其简单性质。

根据师范专科学校的特点，本书在编写过程中遵循以下几条原则：

1．密切联系中学教学实际，体现教材的师范性。读者在学习本课程后能居高临下地指导中学数学中有关内容的教学。

2．体系的展开循序渐进，体现由浅入深，由易到难，由特殊到一般的原则。内容的阐述主次分明，详略得当，注重启发式。概念的引入尽量有实际背景，使读者对抽象的概念有个直观的理解。定理的证明采取最捷途径。

3．传授知识的同时，注意培养学生提出问题、分析问题、解决问题的能力和语言表达能力，在基础知识的掌握和基本技能的训练方面下功夫，并注意介绍一些行之有效的、简便巧妙的处理问题的方法，例如用矩阵的初等变换一次性地判断F^n中一组向

量的线性相关性、求其极大无关组与秩、用极大无关组线性表示其余向量等。

与常见的高等代数教材或教学参考书相比，在教材体系和讲述方法上，本书具有以下特点：

1. 线性代数部分以向量空间和矩阵理论为主线。讲完行列式后就以循序渐进、螺旋上升的方式介绍向量空间的基本理论。从平面和空间中的向量出发，先抽象到由n元数列构成的向量空间F^n，详细讨论了F^n的一些基本性质，例如向量组的线性相关性、极大无关组与秩、基与坐标等；然后以公理化的形式抽象出一般向量空间的概念，并把F^n中的上述基本理论推广到一般n维向量空间中。

2. 突出矩阵在线性代数中的作用。第四章讲述了全书所需用的矩阵知识，这为后几章抽象问题的具体表示（矩阵表示）、用矩阵这一有力工具解决线性代数中一系列抽象课题作好了充分准备。

3. 线性方程组的理论一气呵成。利用向量空间和矩阵理论可以很简捷地、系统而完整地阐述线性方程组的有关理论，如线性方程组有解判别法、解的个数的确定、解的结构等。我们把这些问题的讨论集于第五章。

本书是按教学时数186学时（包括习题课）编写的。每节后的习题反映了教学的基本要求。为了便于教学和自学，书末附有习题答案与提示。

本书初稿的预篇和第一章由姚家昌执笔，第二、七、八章由郭文富执笔，第三、四、九章由寇福来执笔，第五、六章由霍元极执笔。在集体讨论的基础上，寇福来同志协助主编对全书进行了统稿、定稿。

承蒙吴品三教授审阅了全书手稿，提出了许多改进意见，王文涌、林水平同志为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动。谨此向

他们表示衷心感谢。

限于编者的水平和经验，书中定有不妥之处，诚恳地希望者批评指正。

编　者

1988年9月20

目　　录

预　篇

高等代数是高等师范院校数学专业的一门重要基础课程．从内容上看，它是中学代数里有关内容的继续和提高，其中许多理论对于加深对中学数学教材的理解有着直接的指导意义。因此，作为一个合格的中学数学教师，学好这门课程是非常必要的。

此外，高等代数的思想和方法已经渗透到数学的各个领域，在数学分析、几何、计算技术等学科有广泛的应用．所以，学好这门课程也有助于学好其它数学课程。

本篇作为预备知识，主要介绍一些最基本的概念和方法，其中包括集合、数环与数域、数学归纳法、整数的一些整除性质等，这对于今后的学习是很有必要的。

0.1　集　　合

集合（简称集）是一个不加定义的概念，通常只能用同义语来描述和解释它的一些特征。所谓**集合**就是作为整体看的一些东西或事物。例如一筐苹果，一班同学，一组整数等。

集合常用大写拉丁字母 A，B，C，…表示。

组成一个集合的那些东西（事物）叫做该集合的**元素**，简称**元**。

集合的元素一般用小写拉丁字母 a，b，c，…表示。

如果 a 是集合 A 的元素，就记作 $a \in A$，读作 a **属于** A。

如果 b 不是集合 A 的元素，就记作 $b \notin A$，读作 b **不属于** A。

所谓集合 A 是给定的或已知的，是指我们能够确定 A 恰含哪

些元素，即哪些元素属于A哪些元素不属于A。

例如，设A是全体自然数所成的集合，那么$5\in A$，而$-5\notin A$。

如果一个集合A只含有限多个元素，则称A是一个有限集，否则称A是一个无限集。

以后在给出一个集合时，常常采用下面的两种表示方式：

1．列举元素法．即把集合中的元素一一列举出来（包括按照一定规律列出无限集）。例如

$$A=\{a, b, c, d\},$$

$$B=\{1, 2, 3, \cdots\}.$$

这里A只含a，b，c，d四个元素，而B是全体自然数的集合。

2．描述性质法。即指出集合中的元素所具有的性质、特征。如

$$A=\{x \mid x\text{是不超过}100\text{的自然数}\},$$

$$B=\{x \mid x^2+3x-4<0\}$$

等等．

对于以下的几个常用数集，我们采用特定的符号来表示它们：

$\boldsymbol{N}$表示全体自然数作成的集合，简称自然数集。

$\boldsymbol{Z}$表示全体整数作成的集合，简称整数集。

$\boldsymbol{Q}$表示全体有理数作成的集合，简称有理数集。

$\boldsymbol{R}$表示全体实数作成的集合，简称实数集。

$\boldsymbol{C}$表示全体复数作成的集合，简称复数集。

为了以后讨论问题方便，我们再引入几个符号。

命题“若P，则Q”记作“$P\Rightarrow Q$”。

命题“P成立当且仅当Q成立”记作“$P\Leftrightarrow Q$”。

例如，$x\in \boldsymbol{N}\Rightarrow x\in \boldsymbol{Z}$。两个三角形全等$\Leftrightarrow$它们的对应边相等。

如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，则称A是B的一个子集合（简称子集），或说B是A的一个扩集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，分别读作A含于B或B包含A。

由定义，

"$A\subseteq B$"$\Leftrightarrow$"$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$"。

其中符号"$\forall x$"表示对每个x或任意x。

例如，$\boldsymbol{N}\subseteq\boldsymbol{Z}\subseteq\boldsymbol{Q}\subseteq\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{C}$。

如果A不是B的子集，就记作$A\nsubseteq B$或$B\nsupseteq A$。显然，A不是B的子集当且仅当A中至少有一个元素不属于B，即

"$A\nsubseteq B$"$\Leftrightarrow$"$\exists x\in A$，但$x\notin B$"，

这里符号"$\exists x$"表示存在元素x。

如果集合A与B满足条件

$$A\subseteq B\text{且}B\subseteq A,$$

则称A与B**相**等，记作$A=B$，由定义，

"$A=B$"$\Leftrightarrow$"$\forall x, x\in A\Leftrightarrow x\in B$"。

如果$A\subseteq B$,并且$\exists y\in B$,而$y\notin A$,则称A是B的一个**真子集**，或说B是A的一个**真扩集**，记作$A\subsetneqq B$。

例如，$\boldsymbol{R}\subsetneqq C$，因为$\boldsymbol{R}\subseteq C$，并且$\exists i\in C$（$i^2=-1$），而$i\notin\boldsymbol{R}$。

不难看出，集合的包含关系具有以下性质：

1）**反身性**：$A\subseteq A$；

2）**反对称性**：$A\subseteq B$且$B\subseteq A\Rightarrow A=B$；

3）**传递性**：$A\subseteq B$，$B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$。

下面我们规定集合的几种运算。

设A，B是两个集合，由A的一切元素和B的一切元素所成的集合称为A与B的**并集**（简称并），记作$A\cup B$，即

"$x\in A\cup B$"$\Leftrightarrow$"$x\in A$或$x\in B$"。

例如，设$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$。那么

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$。

显然，$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$。

由集合A与B的所有公共元素作成的集合称为A与B的**交集**（简称交），记作$A\cap B$，即

$$“x\in A\cap B” \Leftrightarrow “x\in A \text{且} x\in B”.$$

例如，对于$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$，我们有

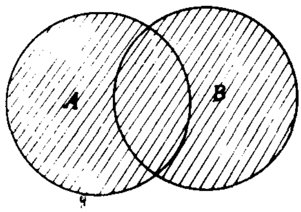

图 0.1

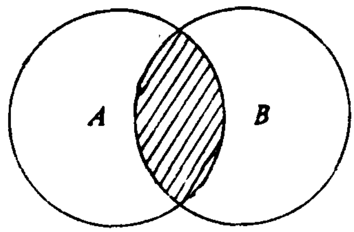

图 0.2

$$A\cap B=\{1, 3\}$$

显然，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

集合A与B的并与交可用前面的图来示意，图0.1的阴影部分表示$A\cup B$，图0.2的阴影部分表示$A\cap B$.

对于两个集合A和B来说，它们完全可能没有公共元素．例如，对于$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{4, 5, 6\}$，$A\cap B$不含任何元素．为了说话方便，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作$\varnothing$．又如

$$\{x \mid x\in R, x^2+2=0\}=\varnothing$$

我们约定，空集$\varnothing$是任何集合的子集合.

集合的并与交满足以下运算律：

1）**交换律**：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

2）**结合律**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

3）**分配律**：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

特别地，$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$。

下面我们只给出$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$的证明，其余的留给读者作为练习。

设$x\in A\cup(B\cap C)$。那么$x\in A$或$x\in B\cap C$，易见，不论$x\in A$还是$x\in B\cap C$，都有$x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$，因而$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，所以$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

反之，若$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则$x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$，如果$x\in A$，那么$x\in A\cup(B\cap C)$；如果$x\notin A$，那么$x\in B$且$x\in C$，即$x\in B\cap C$，从而$x\in A\cup(B\cap C)$。因此，$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$。

所以，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

两个集合的并与交的概念可以推广到任意有限个集合上去。设A_1，A_2，…，A_n都是集合。由A_1，A_2，…，A_n的所有元素作成的集合称为$A_1,A_2,\cdots,A_n$的**并**，记作$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$。由$A_1,A_2,\cdots,A_n$的所有公共元素作成的集合称为$A_1,A_2,\cdots,A_n$的**交**，记作$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$。

由定义，

$x\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\Leftrightarrow x\in$某个$A_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$，

$x\in A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\Leftrightarrow x\in A_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

现在，设A，B是两个集合。由属于A而不属于B的元素作成的集合称为A与B的**差集**（简称差），记作$A-B$，即

$$x\in A-B\Leftrightarrow x\in A\text{而}x\notin B.$$

特别地，当$B\subseteq A$时，$A-B$称为B在A中的**余集**。

例如，$\boldsymbol{Q}$在$\boldsymbol{R}$中的余集是全体无理数的集合。

最后，我们介绍集合的积的概念。

设A，B是两个集合。集合

$$A\times B=\{(a,\ b)\mid a\in A,b\in B\}$$

称为 A 与 B 的积。

两个集合的积并不是什么新东西．例如，取定一个直角坐标系后，平面上每个点的坐标是一对实数（x，y），平面上全体点的坐标的集合就是 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}$ 的积。

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in\mathbf{R}\}$$

习 题 0.1

1．设 a 是集合 A 的一个元素．记号 $\{a\}$ 表示什么？写法 $\{a\}\in A$ 对不对？

2．写出集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 的所有子集。

3．设集合 A 含有 n 个元素。A 的含有 k（$1\leqslant k\leqslant n$）个元素的子集共有多少个？A 总共有多少个子集？

4．设

$$A=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ -1\leqslant x\leqslant 2\},$$
$$B=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x<0\},$$
$$C=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ -2\leqslant x<3\}.$$

写出 $A\cap(B\cup C)$，$A\cup(B\cap C)$。

5．下列论断哪个是对的？哪个是错的？如果是对的，给出其证明；如果是错的，试举出反例，并把错误修正过来。

（1）$x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$；

（2）$x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A\cap B$；

（3）$x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$；

（4）$x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\Rightarrow x\in B$；

6．证明下列等式：

（1）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

（2）$A\cup(B\cap A)=A$；

（3）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

0.2 数环和数域

在这一节，我们主要讨论数的集合。

许多数学问题不仅与涉及到的数的范围有关，也与所允许使用的运算有关。一般说来，在不同的数的范围内，所允许使用的运算是不同的. 例如，在自然数范围内，可以进行加法和乘法两种运算. 然而两个自然数的差或商却不一定是自然数；在整数范围内，可以进行加法、减法、乘法三种运算，而两个整数的商却未必是整数；在有理数、实数或复数范围内，不仅可以施行加法、减法、乘法三种运算，而且可施行除法运算（只要除数不为零）。为了从运算的角度上把这些数集区别开来，我们给出以下

定义0.1 设R是复数集C的一个非空子集。如果对$\forall a,b\in R$，都有$a+b$，$a-b$，$ab\in R$，则称R是一个数环。

例如，Z，Q，R，C都是数环，而N不是数环。

例0.1 设

$$R=\{a+bi \mid a,\ b\in Z,\ i^2=-1\}.$$

因为$0=0+0i\in R$，所以$R\neq\varnothing$。又若$a+bi$，$c+di\in R$，那么

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i\in R,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\in R.$$

所以R是一个数环。

单独由一个数0作成的集合$\{0\}$是一个数环，因为$0\pm0=0$，$0\times0=0$。这个数环叫做零环。

容易看出，零环是最小的数环，即所有的数环都包含零环。

定义0.2 设F是一个数环，如果

（i）F含有一个不等于零的数；

（ii）若a，$b\in F$，且$b\neq0$，则$\dfrac{a}{b}\in F$，

那么就称F是一个数域。

例如，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$都是数域，分别称为有理数域，实数域，复数域。

由定义，$\boldsymbol{N}$和$\boldsymbol{Z}$不是数域，例0.1中的数环R也不是数域。

例0.2 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\boldsymbol{Q}\}$是一个数域。

事实上，因为$1=1+0\sqrt{2}\in F$，所以F含有非零的数. 又设$a+b\sqrt{2}$，$c+d\sqrt{2}\in F$。那么

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in F$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in F;$$

当$c+d\sqrt{2}\neq 0$时，c与d不能同时为零，从而$c-d\sqrt{2}\neq 0$，于是

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in F.$$

因此，F是一个数域。

最后，我们给出数域的一个重要性质。

定理0.1 任何数域都包含有理数域. 换句话说，有理数域是最小的数域。

证明 设F是一个数域. 由条件（i），F中有一个不为零的数a，于是$\frac{a}{a}=1\in F$，这样一来，对任意正整数n，有

$$n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}}\in F$$

又因为$0\in F$，所以$-n=0-n\in F$，从而$\boldsymbol{Z}\subseteq F$。于是对$\forall m,n\in\boldsymbol{Z}$，当$m\neq 0$时，$\frac{n}{m}\in F$，因此$F$包含一切有理数，即$\boldsymbol{Q}\subseteq F$。□