经济数学

JINGJI SHUXUE

张保法　主编

中国统计出版社

(京)新登字 041 号

经 济 数 学

JINGJI SHUXUE

主　编　张保法

副主编　钟建明

*

中国统计出版社出版
(北京三里月坛南街 38 号　100826)
郑州大学计算中心激光照排
郑州大学印刷厂印刷

*

850×169 毫米 32 开本 10.5 印张 27 万字
1992 年 9 月第 1 版　　1992 年 9 月郑州第 1 次印刷
印数 1—4000
ISBN7—5037—0890—5/F・391
定价：6.50 元

前　言

几年来经济学科的教学、研究，尤其是实际应用已充分说明，数学方法向经济学的渗透，经济学与数学的密切结合，已显得越来越重要。经济、管理类各专业已將《经济数学》作为一门重要的基础课列入教学计划。本科教学基本上具有了比较一致的教学大纲和试用教材，而专科层次、各类成人高等教学及要求开设学时较少的本科专业，采用上述试用教材已显得很不适宜。数年的教学使我们深感教材的缺乏，很需要编写一本适宜学时较少，尤其是适合成人高等教育特点的，与经济问题结合密切，通俗、简明的经济数学教材。本书正是为了这一需要而所作的尝试。

多年来，数量经济学科的教学和其它应用经济学科的教学实践告诉我们，学生仅学微积分方面的知识是很不够的，线性代数和概率数理统计方面的内容在实践中应用也是比较广泛的。因此该书将经济数学基础的三部分主要内容：微积分，线性代数，概率论与数理统计熔为一体。该书力求概念清晰，内容简明，表达通俗易懂。注重数学方法在经济方面的应用，是本书编写的一个宗旨。

该书由张保法同志任主编，钟建明同志任副主编，黄艳娟、段全才同志参加了本书的编写。本书编写体系和章节内容安排由主编提出，分头编写。第一章至第七章、第十二章由张保法、钟建明同志编写，第八章由钟建明同志编写，第十一章由黄艳娟同志编写，第九章、第十章、第十五章、第十六章、第十七章、第十八章由张保法同志编写，第十三章、第十四章由段全才同志编写。初稿由张保法同志统纂、修改定稿，钟建明同志作了部分内容的修改工作。

该书在编写过程中得到了郑州大学经济系主任宋光华教授的

大力支持，郑州大学经济系数量经济教研室主任王国成同志审阅了本书部分初稿，提出了宝贵室见，河南省统计信息咨询服务中心副主任宋才亮统计师对该书的出版给予了大力支持与帮助，在此一并感谢。

由于我们水平有限，该书难免存在不少缺点和不足，敬请批评指正。

编者

1992 年 8 月

目　录

第一篇　微积分

第一章　函数……………………………………………………………（1）

§1.1　集合 ………………………………………………………（1）

§1.2　实数集 ……………………………………………………（6）

§1.3　函数 ………………………………………………………（8）

§1.4　函数的简单性质………………………………………（12）

§1.5　初等函数………………………………………………（15）

§1.6　经济中函数关系的建立及常用函数举例………（17）

习题一 ………………………………………………………（21）

第二章　极限 …………………………………………………………（23）

§2.1　数列极限………………………………………………（23）

§2.2　函数极限………………………………………………（25）

§2.3　无穷小量与无穷大量…………………………………（28）

§2.4　极限的运算法则………………………………………（30）

§2.5　两个重要极限…………………………………………（32）

§2.6　函数的连续性…………………………………………（35）

§2.7　无穷级数………………………………………………（38）

习题二 ………………………………………………………（45）

第三章　导数与数分 …………………………………………………（47）

§3.1　导数的概念……………………………………………（47）

§3.2　求导的基本公式和求导法则…………………………（51）

§3.3　高阶导数………………………………………………（59）

§3.4　函数的微分……………………………………………（60）

§3.5　导数在求函数极限中的应用

——洛比达法则…………………………………… (63)
习题三 …………………………………………………… (65)
第四章　导数在经济学中的应用 ………………………… (67)
§4.1　导数在经济分析中的应用……………………… (67)
§4.2　函数的极值……………………………………… (72)
§4.3　经济管理中的极值应用问题…………………… (75)
习题四 …………………………………………………… (80)
第五章　多元函数的微分及其在经济中的应用 ………… (82)
§5.1　二元函数………………………………………… (82)
§5.2　偏导数与全微分………………………………… (84)
§5.3　复合函数的微分法和隐函数微分法…………… (87)
§5.4　偏导数在经济学中的应用……………………… (90)
§5.5　二元函数的极值………………………………… (92)
§5.6　经济管理中二元函数极值的应用……………… (96)
习题五 …………………………………………………… (98)
第六章　不定积分与微分方程初步……………………… (100)
§6.1　不定积分的概念 ……………………………… (100)
§6.2　不定积分的性质和基本积分公式 …………… (102)
§6.3　积分的基本方法 ……………………………… (104)
§6.4　不定积分在经济学中的应用 ………………… (108)
§6.5　微分方程初步 ………………………………… (110)
习题六…………………………………………………… (116)
第七章　定积分…………………………………………… (118)
§7.1　定积分的概念 ………………………………… (118)
§7.2　定积分的性质 ………………………………… (120)
§7.3　定积分与不定积分的关系 …………………… (122)
§7.4　定积分的计算 ………………………………… (125)
§7.5　广义积分 ……………………………………… (127)
§7.6　定积分在经济管理中的应用 ………………… (130)

习题七………………………………………………………… (132)

第二篇　线性代数与线性规划

第八章　行列式………………………………………………… (134)
§8.1　二阶和三阶行列式 ……………………………… (134)
§8.2　n阶行列式 ………………………………………… (138)
§8.3　行列式的性质 ……………………………………… (139)
§8.4　行列式按行(列)展开 ……………………………… (145)
§8.5　解n元线性方程组的行列式
法则(克莱姆法则) ………………………………… (148)
习题八………………………………………………………… (152)
第九章　矩阵……………………………………………………… (154)
§9.1　矩阵的概念 ………………………………………… (154)
§9.2　矩阵的运算 ………………………………………… (157)
§9.3　逆矩阵 ……………………………………………… (165)
§9.4　矩阵的分块 ………………………………………… (169)
§9.5　矩阵的初等变换和初等矩阵 …………………… (171)
习题九………………………………………………………… (175)
第十章　线性方程组……………………………………………… (178)
§10.1　向量和向量组的运算…………………………… (178)
§10.2　向量的线性相关性……………………………… (179)
§10.3　向量组与矩阵的秩……………………………… (185)
§10.4　线性方程组有解的判定………………………… (189)
§10.5　线性方程组的解法……………………………… (193)
习题十………………………………………………………… (199)
第十一章　线性规划简介………………………………………… (202)
§11.1　线性规划问题与其数学模型…………………… (202)
§11.2　线性规划的求解法……………………………… (209)

§11.3　单纯形法简介………………………………………… (211)
§11.4　单纯形法的计算步骤………………………………… (220)
§11.5　人工变量的单纯形法………………………………… (226)
习题十一………………………………………………………… (230)

第三篇　概率论与数理统计

第十二章　随机事件及其概率………………………………… (234)
§12.1　随机事件……………………………………………… (234)
§12.2　事件间的关系和运算………………………………… (235)
§12.3　概率…………………………………………………… (238)
§12.4　几个重要概率公式…………………………………… (241)
§12.5　事件的独立性………………………………………… (246)
习题十二………………………………………………………… (248)
第十三章　随机变量及其分布………………………………… (250)
§13.1　随机变量及其分布函数……………………………… (250)
§13.2　离散型随机变量……………………………………… (251)
§13.3　连续型随机变量……………………………………… (255)
§13.4　联合分布和随机变量的独立性……………………… (261)
习题十三………………………………………………………… (263)
第十四章　随机变量的数字特征……………………………… (265)
§14.1　数学期望……………………………………………… (265)
§14.2　方差…………………………………………………… (271)
习题十四………………………………………………………… (274)
第十五章　抽样分布…………………………………………… (276)
§15.1　总体和样本…………………………………………… (276)
§15.2　样本数字特征………………………………………… (278)
§15.3　三种常见的分布……………………………………… (279)
§15.4　统计量与抽样分布…………………………………… (282)

习题十五…………………………………………………… (283)
第十六章 参数估计…………………………………………… (285)
§16.1 估计量的好坏标准…………………………………… (285)
§16.2 区间估计…………………………………………… (287)
习题十六…………………………………………………… (290)
第十七章 假设检验…………………………………………… (292)
§17.1 假设检验的概念……………………………………… (292)
§17.2 一个正态总体的假设检验…………………………… (294)
习题十七…………………………………………………… (297)
第十八章 一元线性回归分析………………………………… (298)
§18.1 回归分析的概念……………………………………… (298)
§18.2 一元线性回归方程…………………………………… (300)
§18.3 回归方程的显著性检验……………………………… (304)
§18.4 利用回归方程进行预测……………………………… (308)
习题十八…………………………………………………… (310)
概率论与数理统计附表……………………………………… (312)
附表一 标准正态分布表…………………………………… (312)
附表二 t 分布双侧临界值表 ……………………………… (313)
附表三 χ^2 分布上侧临界值 χ^2_α 表 ………………………… (314)
附表四 F 分布上侧临界值表 ……………………………… (316)

第一篇　微积分

第一章　函数

函数是微积分研究的基本对象，在本章中，我们将从集合概念出发，建立函数的概念。并介绍函数的基本性质。

§1.1　集合

一、集合的概念

在经济管理中，对某一问题的研究常常需要根据事物所具有的某一共同属性进行分类。例如，某一综合商店，常把电视机、电冰箱、电风扇、收录机等商品划归为一类（家电类），把肥皂、洗衣粉、牙刷、牙膏等划归为一类（日用品类），等等。虽然，每类中各事物的意义不同，但由于它们具有一定的共同属性，因此，我们可以把家电类、日用品类等作为一个“整体”来看待，这些“整体”就是我们所说的集合。

一般来说，凡是具有某种属性的事物（或研究对象）的全体称作集合。简称集。构成集合的每一个事物或对象称作集合的元素。

下商举几个例子来加以说明：

例 1、某工厂职工的全体是一个集合，该厂的每个职工都是该集合的元素。

例 2、不大于 10 的正偶数 2、4、6、8、10 构成一个集合，这五个

数字的任何一个都是集合的元素。

例3、全体自然数构成一个集合叫自然数集，每个自然数都是该集合的元素。

例4、全体实数构成一个集合叫实数集。每个实数都是实数集的元素。

通常我们用大写字母 A、B、C，……，表示集合，用小写字母 a、b、c、x、y，……，表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，则记 $a\in A$，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\bar{\in} A$ 或 $a\notin A$，读作 a 不属于 A.

例如，用 N 表示自然数集合，R 表示实数集，则 $2\in N$，$\frac{1}{2}\bar{\in} N$.

但 $\frac{1}{2}\in R$.

含有有限个元素的集合叫有限集，含有无限多个元素的集合叫无限集。显然，上面的例1、例2是有限集，而例3、例4是无限集。

在对某一问题的研究中，由被研究的所有事物或对象组成的集合称作全集，记作 U. 应说明的是：全集是相对的。例如，我们考察的是某厂全体女工，则该厂全体女工组成的集合是全集，但若我们考察的是该厂的全体职工，则全体女工组成的集合不再是全集。

不包含任何元素的集合我们称作空集，记作 Φ. 例如，某日商店没有进货，则由进货品种组成的集合为空集。又如 $x^2+1=0$ 的实数解集合亦为空集。

二、集合的表示法

常用的集合表示法有列举法，特性表示法。

1. 列举法：在大括号{　}内列出元素的全体或一些有代表性的元素表示集合的方法，叫做列举法。

例5、用 A 表示电视机、电冰箱、电风扇、收录机四种家电品种的集合，则 A 可表示为：

$A=\{$电视机，电冰箱，电风扇，收录机$\}$

例 6、自然数集合可表示为：

$N=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$

用列举法表示集合时，需要说明两点：一是我们考虑的是集合由哪些元素组成，而与这些元素在$\{\quad\}$内书写的顺序无关。例如，

$A=\{2,4,6,8,10\}$

也可表示为

$A=\{2,6,10,8,4\}$

等；二是集合里的元素必须是互不相同的，即同一元素不能在一个集合中重复出现，如上述 A 不能表示为 $A=\{2,4,2,6,8,10\}$.

2. 特性表示法：在括号内写明所要描述集合的元素应具有的特性，这个方法称作特性表示法。

一般地，若集合 A 的元素满足某一特性 $P(x)$，则集合 A 利用特性表示法可表示为

$A=\{x|P(x)\}$

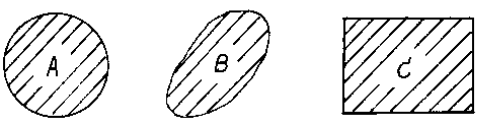
例 7、实数集合 R 可表示为

$R=\{x|x$ 为实数$\}$

例 8、A 是 $x^2-5x+6=0$ 的全体实根构成的集合，则 A 可表示为

$A=\{x|x^2-5x+6=0\}$.

为了直观起见，我们常用一个平面区域来代表一个集合，这种图叫文氏图，如图(1.1)所示。



集合 A　　集合 B　　集合 C

图(1.1)

三、子集

定义 1.1 对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 为集合 B 的子集。记作

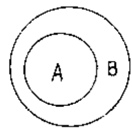
$$A\subset B \quad (\text{或 } B\supset A).$$

读作"A 包含于 B"（或"B 包含 A"）如图(1.2)所示。

例 9、$N\subset R$.

例 10、用 B 表示某工厂全部产品的集合，用 A 表示全部合格品的集合，则有

$$B\supset A \text{ 或 } A\subset B.$$



图(1.2)

定义 1.2 对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subset B$，同时 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等。记作 $A=B$.

如上面例 10，若该厂的全部产品都为合格品，则 $A=B$.

四、集合的运算

1. 集合的并

定义 1.3 设有集合 A 与 B，由 A 和 B 的所有元素组成的集合，称作集合 A 和 B 的并集，简称 A 和 B 的并，记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

用文氏图表示即为图(1.3)。

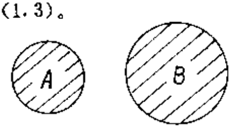


图 (1.3)

例 11、设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，　$B=\{4,5,6,7,8\}$. 则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

2. 集合的交

定义 1.4 设有集合 A 与 B，由 A 和 B 的所有公共元素组成的集合，称作集合 A 和 B 的交集，简称 A 和 B 的交。记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

图(1.4)的阴影部分表示集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$。

对于例 11，$A\cap B=\{4,5\}$。

3. 集合的差

定义 1.5 设有集合 A 和 B，由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合称作集合 A 和集合 B 的差集，简称 A 和 B 的差。记作 $A-B$. 即

$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$.

图(1.5)的阴影部分表示 $A-B$.

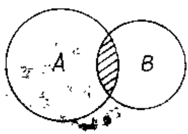


图 (1.4)

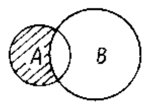


图 (1.5)

对于例 11，$A-B=\{1,2,3\}$.

4. 集合的补

定义 1.6 全集 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称作集合 A 的补集，记作 $\overline{A}$，即

$\overline{A}=\{x\mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}$.

图(1.6)的阴影部分表示 $\overline{A}$。

例如，U 表示某厂生产的某种产品的集合，A 表示合格品集合，则 $\overline{A}$ 表示废品集合。

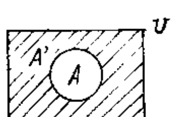


图 (1.6)

§1.2 实 数 集

在初等数学中，我们把规定了正方向、原点和单位长度的直线称作数轴。并且我们知道，任何一个实数都可以用数轴上的一点来表示；反之，数轴上的任何一点也对应着一个实数。也就是说，实数和数轴上的点存在一一对应关系。由此，我们可以把实数和它在数轴上的对应点不加区别地用同一符号来表示。如实数 x 和点 x 可视作相同意思。下面我们来讨论实数的绝对值和实数集的特殊子集——区间。

一、绝对值

在研究某些问题时，常常要用到实数绝对值的概念。

一个实数 x 的绝对值用 $|x|$ 来表示，其定义为

$$|x|=\begin{cases}x & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}\\ -x & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}$$

例如：$|10|=10$　　$|-10|=-(-10)=10$　　$|0|=0$

$|x|$ 的几何意义是：$|x|$ 表示数轴上的点 x 与原点之间的距离。而距离只能用正数或 0 来表示，所以一切实数 x 的绝对值都是非负的。即 $|x|\geqslant 0$.

根据其几何意义，我们可以得出两个重要的等价关系。

(1)　如果 $a>0$，则下面的两个集合相等。

$$\{x\,|\,|x|<a\}=\{x\,|\,-a<x<a\}.$$

因为从几何上看：$|x|<a$ 表示与原点距离小于 a 的那些点，而 $-a<x<a$ 表示在点 $-a$ 与 a 之间的那些点，所以它们表示的是相同的点集。

(2)　如果 $b>0$，则下面两个集合相等。

$$\{x\,|\,|x|>b\}=\{x\,|\,x<-b\}\cup\{x\,|\,x>b\}.$$

因为 $|x|>b$ 表示与原点的距离大于 b 的那些点 x，而 $x<-b$ 或 $x>b$ 表示点 x 在 $-b$ 左边或在 b 的右边，所以它们表示的是相

间的点集。

二、区间

在实际问题中，一些量的取值常常限制在一部分实数范围内。例如，机器上螺丝的外径 x 必须满足 $a<x<b$，其中 b 是最大限度，a 是最小限度。为了研究方便起见，我们引进区间的概念，区间是实数集的子集。

定义 2.1 设 $a,b\in R$，且 $a<b$，我们把介于 a,b 之间的一切实数的全体称作区间。确切地说：

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称作以 a,b 为端点的开区间，记作 (a,b).

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称作以 a、b 为端点的闭区间。记作 $[a,b]$。

(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$(或 $a\leqslant x<b$)的所有实数 x 的集合，称作以 a、b 为端点的半开区间或半闭区间。记作 $(a,b]$ 或 $[a,b)$。

以上三类区间为有限区间。有限区间右端点 b 与左端点 a 的差，称作区间的长。

此外，还有下面几类无限区间：

(4) $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$ $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$

(5) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$ $(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x|x\in R\}$

三、邻域

定义 2.2 以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称作点 x_0 的 δ 邻域，即

$$\{x|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$$

如果邻域不包括点 x_0，则称作 x_0 的 δ 去心邻域，即

$$\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$$

例如：$\{x|\,|x+\sqrt{2}|<\frac{1}{3}\}$，即为 $x_0=-\sqrt{2}$ 的 $\frac{1}{3}$ 邻域，也就是

开区间$(-\sqrt{2}-\frac{1}{3},-\sqrt{2}+\frac{1}{3})$.

§1.3 函数

一、常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，到处都遇到各种不同的量。例如：产品的生产量、成本、销售价格、市场供给量、社会需求量、职工人数等等。

考察这些量时，我们可以发现有些量在所考察的过程中（或说一定时间内）不发生变化，只取一个固定的值，我们把这些量称作常量。例如，在某段时间内某种商品的销售价格不变，工厂职工人数不变，这些量在该时段内就是常量。而那些在某一过程中可以取不同数值的量，我们称作变量，例如，时间、生产量、产值等都是变量。

通常地，我们用 a、b、c，…，来表示常量；用 x、y、z，…，来表示变量。

对于常量和变量，我们需说明以下几点：

1. 常量和变量依赖于所研究的过程。同一个量，在某种情况下可以认为是常量，而在另一种情况下可能是变量；反之亦然。例如，某一商品的价格在某段时间内是常量，但在较长时间内是变量。这说明常量和变量具有相对性。

2. 从几何意义上讲，常量对应着实数轴上的定点，变量则对应着实数轴上的动点。

3. 一个变量所能取的数值的集合叫做这个变量的变动区域。

有一类变量，例如时间可以取介于两个实数之间的任意实数值，叫做连续变量，连续变量的变动区域常用区间表示。