拓扑学引论

第二分册

多面体的同调群

江澤涵 著

上海科学技术出版社

拓扑学引论

第二分册

多面体的同调群

江澤涵 著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本分册多面体的同调群是第一分册点集拓扑学的继續．第三章讲单純复合形及其同調群，第四章讲同调群的拓扑不变性和同調群的同調性质．两个附录（A 綫性的欧几里得空間，B 交换群）是第三章所需要的准备知識．

本分册的內容，和第一分册的不同，是代数拓扑学的最基本內容的一部分．这两分册可作为拓扑学基础課的部分教本，也可供需要拓扑学知識的数学工作者参考．

拓 扑 学 引 论

第二分册　多面体的同調群

江 澤 涵 著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 4 6/32　排版字数 98,000
1965 年11月第 1 版　1965 年11月第 1 次印刷
印数 1—2,200

統一书号 13119·681　定价（科六）0.65 元

序

本分册多面体的同調群是拓扑学引論第一分册点集拓扑学的継續．本分册中的两章分别讲复合形的同調群与同調群的不变性；这是代数拓扑学最基本的內容的一部分．它所需要的点集拓扑学中的一些准备知識，都在第一分册中；此外它所需要的关于高維解析几何和关于交换群的准备知識，則是本分册中两个附录的內容．

多面体是欧几里得空間的比較簡单的子集．在本分册中，先把一个多面体剖分成复合形，賦予复合形一个代数結构——复合形的同調群；然后証明同調群是这个多面体的拓扑性质，不依賴于多面体如何剖分成复合形．微分几何里也有类似的情形．例如研究空間中一条曲綫弧，在选定坐标系后，可以通过它的方程求得它的长度，它的每点处的曲率和撓率；而这些性质是曲綫弧的(剛体)几何性质，不依賴于所选取的坐标系．但类似处只限于此，此外則大有区别：例如长度、曲率、撓率是实数值或实值函数，是剛体运动下不变性，而同調群却是交换群，是拓扑不变性．

由于本分册中的研究对象和証明方法在一定程度上与先行的数学課程中的不同，讀者可能将因此遇到一些困难．为着減少困难，建議讀者自己多举簡单图形作例子以瞭解几何意义，认眞演算簡单的习題以掌握論証方法．本分册中小号字排印的例子和习題对于讀者应有所帮助，希望讀者不要忽視它們．

本分册是作为拓扑学专門組的基础課教本写的，所以尽多地用群論的术語，这就使得附录B是不可缺少的准备知識．如果想

要少用群論知識，則可以作一些删节，例如删去第三章§7以及为它作准备的附录B的那部分。

本分册在內容安排与闡述方面，历届听課同学的意見发生了显著的影响．在編写过程中姜伯駒同志帮助作者作了一些改进．作者对他們衷心感謝．作者还采用了一些拓扑学书中的一些讲法，因无法一一列举，現只将用得較多的几种书按照出版时間先后列表如下：

1．沙爱福和施雷发，拓扑学，1934；江澤涵譯，高等教育出版社，1959．

2．P. Alexandroff 和 H. Hopf, Topologie, 1935.

3．邦德利雅金，組合拓扑学基础，1947；馮康譯，中国科学院，1954．

4．S. Lefschetz, Introduction to Topology, 1949.

5．S. Eilenberg 和 N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, 1952.

6．希尔頓和瓦理，同調論(上册)，1960；江澤涵等譯，上海科学技术出版社，1963．

江 澤 涵

北京大学燕南园 1965年9月2日

目　录

第三章　单純复合形及其同調群

在本章中我們先提出代数拓扑学中所研究的最基本的几何对象——单純复合形及其多面体．然后从几何性质的考虑，利用群的术語，对于每一个多面体的一个固定的剖分，卽对于每一个单純复合形，引进它的同調群．同調群集中地反映出单純复合形的許多重要的几何性质．它的拓扑不变性的証明則留待下一章．

1. 单純复合形・多面体

单純形是代数拓扑学中最簡单的几何对象．单純复合形是由欧几里得空間中的有限个单純形按"規則的"方式拼成的．单純复合形的点所形成的、欧几里得空間的子空間叫作多面体．

单　純　形*)

設 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 是 n 維欧几里得空間中占有最广位置的一組点(参看定义 A3)，$q\leqslant n$，卽向量

$$e^1=a^1-a^0,\ e^2=a^2-a^0,\ \cdots,\ e^q=a^q-a^0$$

是綫性无关的．这个最广点組張成一个 q 維超平面 E^q，它的参数方程是

*) 現在需要附录 A 的知識．但如果讀者已知道三維欧几里得空間(附录 A 中的綫性的欧几里得空間現在与此后都簡称为欧几里得空間)中的斜角坐标系或仿射坐标系，并能推广与运用它来处理 n 維欧几里得空間中的問題(例如得到定理 A5)，則可不讀附录 A，而只参看那里的定义、命題与定理．

$$x=a^0+\lambda_1e^1+\lambda_2e^2+\cdots+\lambda_qe^q,$$

或

$$x=a^0+\lambda_1(a^1-a^0)+\lambda_2(a^2-a^0)+\cdots+\lambda_q(a^q-a^0).$$

E^n 中的点 x 或向量都有 n 个坐标(我們把它們叫作**直角坐标**，以区别于下面即将提到的斜角坐标)；参数方程实际上是給出 n 个坐标的 n 个方程的簡写. 再者，这 q 个有次序的参数$(\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_q)$是 E^q 的点 x 在斜角坐标系 $\{O; e^1, e^2, \cdots, e^q\}$ 中的**斜角坐标**.

在上面的第二个参数方程中，点 $a^0, a^1,\cdots, a^q$ 的地位不对称；为着避免这个缺点，我們用下面两个方程来替代上面的第二个参数方程：

$$x=\lambda_0a^0+\lambda_1a^1+\cdots+\lambda_qa^q, \tag{1}$$

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_q=1. \tag{2}$$

这两个式子叫作 E^q 的**对称的参数方程**(参看命題 A2). 这两个式子是根据物理学中的重心概念得来的. 事实上，我們从物理学知道，当 $n=3$，而 q 是任意正整数时，設想在点 a^i 处有一个质量为 $\lambda_i(\geqslant 0)$的质点，$i=0, 1, \cdots q$，而且这 $q+1$ 个质量的和为 1 (式(2))，然后这 $q+1$ 个点处的质点的重心恰就是式(1)所給出的点 x. 我們还回到我們所考慮的情况：n 任意，点組 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 占有最广位置，$q\leqslant n$，$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 是滿足式(2)的任意实数. 因为这組点所張成的超平面 E^q 的任一点 x，在斜角坐标系 $\{O; e^1, e^2, \cdots, e^q\}$ 中有唯一的斜角坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q)$，又因为通过式(2)，$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q)$ 与 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$ 这二組中的任一組唯一地决定另一組，所以我們有下述命題.

1.1 命題 設 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 是 n 維欧几里得空間 E^n 中占有最广位置的 $q+1$ 个点，$q\leqslant n$，因而它們張成一个 q 維超平面 E^q. E^q 的任一点 x 唯一地决定一組实数$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$，滿足式(1)与(2)；而且反之，这样的一組实数唯一地决定 E^q 的一个点. 因而

这組有次序的 $q+1$ 个实数形成点 x 的在 E^q 中的一种坐标，叫作**重心坐标**，而且这有次序的点組 $\{a^0, a^1, \cdots, a^q\}$ 叫作 E^q 中的一个**重心坐标系**．】

本命题是通过斜角坐标証明了的；但也可以直接从最广点組的定义証明如下．設点 x 还可以由

$$x=\mu_0a^0+\mu_1a^1+\cdots+\mu_qa^q, \tag{3}$$

$$\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_q=1 \tag{4}$$

决定．从式(3)减去式(1)，从式(4)减去式(2)，分别得

$$(\mu_0-\lambda_0)a^0+(\mu_1-\lambda_1)a^1+\cdots+(\mu_q-\lambda_q)a^q=0,$$

$$(\mu_0-\lambda_0)+(\mu_1-\lambda_1)+\cdots+(\mu_q-\lambda_q)=0.$$

但点組 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 最广，故从命题 A4，有 $\mu_i=\lambda_i$，$i=0, 1, \cdots, q$．】

1.2 定义 設 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 是 n 維欧几里得空間 E^n 中占有最广位置的 $q+1$ 个点，$q\leqslant n$．命

$$x=\lambda_0a^0+\lambda_1a^1+\cdots+\lambda_qa^q, \tag{1}$$

其中实数 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 滿足下列两組条件：

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_q=1, \tag{2}$$

$$\lambda_0\geqslant0,\ \lambda_1\geqslant0,\ \cdots,\ \lambda_q\geqslant0. \tag{5}$$

E^n 中这样的点 x 的集合叫作一个 q 維**单純形**，簡称为 q 維**单形**，記作$(a^0, a^1, \cdots, a^q)$或 $\underline{s}^q$．点 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 叫作 $\underline{s}^q$ 的**頂点**．

方程(1)与(2)是点組 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 所張成的 q 維超平面 E^q 的对称的参数方程；因而单形 $\underline{s}^q$ 是 E^q 的一个子集．明显地，零維单形 $\underline{s}^0$ 就是 a^0 这个点，一維单形 $\underline{s}^1$ 就是以不同的两点 a^0 与 a^1 为端点的閉綫段．用斜角坐标或者用重心的概念，都可以看出，二維单形 $\underline{s}^2$ 是以不共綫的三点 a^0, a^1, a^2 为頂点的閉三角形(区域)，三維单形是以不共面的四点 a^0, a^1, a^2, a^3 为頂点的閉四面体(图1)．

滿足式(2)与(5)的$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$也叫作点 x 在 q 維单形 $\underline{s}^q$ 中的重心坐标．我們常常称点 x 为点 $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$．頂点

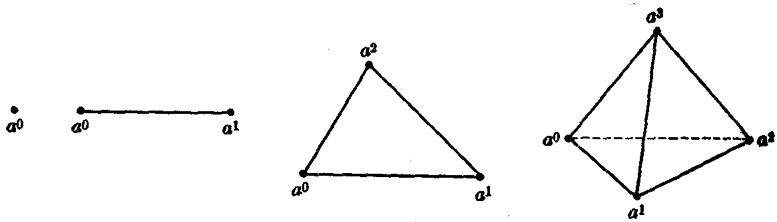


图 1

a^i 的 $q+1$ 个重心坐标中只 $\lambda_i=1$，其他都是零；如果点 x 不是頂点，則它的重心坐标中至少有两个不等于零．以

$$\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_q=\frac{1}{q+1}$$

为重心坐标的点 x 就是 $\underline{s}^q$ 的**中心**（或重心）；特别地，点 $x=\frac{1}{2}(a^0+a^1)$ 是 $\underline{s}^1=(a^0,\ a^1)$ 的中点。

1.3 命題　n 維欧几里得空間 E^n 中的 q 維单形 $\underline{s}^q$ 唯一地决定它的頂点．換句話說，如果 E^n 中的两个单形 $\underline{s}^q$ 与 $\underline{s}_1^p$ 重合，則它的頂点一对一地重合，因而 $p=q$.

証　明　首先証明頂点的下述特征：1）如果 $\underline{s}^q$ 的点 x 不是頂点，則 x 是以 $\underline{s}^q$ 的某两点为端点的綫段的中点；2）如果 x 是頂点，則 x 不是这样的一条綫段的中点。

1）設式(1)中的 x 不是 $\underline{s}^q$ 的頂点．于是点 x 至少有两个重心坐标不为零；設是 $\lambda_i>0$, $\lambda_j>0$, $i\neq j$. 設 ε 是小于 λ_i 与 λ_j 的任意正数．命

$$u^0=x+\varepsilon(a^j-a^i),\quad u^1=x-\varepsilon(a^j-a^i).$$

这两点显然屬于 $\underline{s}^q$，而且

$$x=\frac{1}{2}(u^0+u^1).$$

2）考虑 $\underline{s}^q$ 的頂点 a^k．用反証法，設 v^0 与 v^1 是 $\underline{s}^q$ 的不同的两点：

$$v^h=\lambda_0^h a^0+\lambda_1^h a^1+\cdots+\lambda_q^h a^q,\quad h=0,1,$$

而且 $a^k=\frac{1}{2}(v^0+v^1)$. 既然 v^0 与 v^1 不同，因而决非同一个頂点，故必有两个脚标 $i\neq j$，使得 $\lambda_i^0>0$, $\lambda_j^1>0$. 根据假設

$$a^k=\frac{1}{2}(\lambda_0^0+\lambda_0^1)a^0+\frac{1}{2}(\lambda_1^0+\lambda_1^1)a^1+\cdots+\frac{1}{2}(\lambda_q^0+\lambda_q^1)a^q,$$

这里 $\lambda_i^0+\lambda_i^1>0$, $\lambda_j^0+\lambda_j^1>0$; 但另一方面

$$a^k=0a^0+0a^1+\cdots+1a^k+\cdots+0a^q.$$

这与命题 1.1 矛盾. 这就証完了頂点的特征.

其次，設 $\underline{s}^q=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$, $\underline{s}_1^p=(b^0, b^1, \cdots, b^p)$. 因为这两个点集重合，$b^j\in\underline{s}^q$. 由剛才証明的頂点的特征，$b^j$ 也是 $\underline{s}^q$ 的一个頂点. 同理，每一个 a^i 也是 $\underline{s}_1^p$ 的一个頂点. ▌

設 $\underline{s}^q=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$ 是 E^n 中的一个 q 維单形. 設点 a^{i_0}, $a^{i_1}, \cdots, a^{i_r}$ 是 $\underline{s}^q$ 的頂点中的任意 $r+1$ 个，$0\leqslant r\leqslant q$; 它們是占有最广位置的，因而 E^n 中有 r 維单形 $\underline{s}_1^r=(a^{i_0}, a^{i_1}, \cdots, a^{i_r})$. $\underline{s}_1^r$ 叫作 $\underline{s}^q$ 的一个 r 維**面**，記作

$$\underline{s}_1^r\prec\underline{s}^q.$$

設 $a^{i_{r+1}}, \cdots, a^{i_q}$ 为 $\underline{s}^q$ 的頂点，但非 $\underline{s}_1^r$ 的頂点. 則在式(1)到式(3)中命

$$\lambda_{i_{r+1}}=\cdots=\lambda_{i_q}=0 \tag{6}$$

时，就得到 $\underline{s}_1^r$ 的任意点 x. 所以点集 $\underline{s}_1^r\subset\underline{s}^q$，而 $\underline{s}_1^r$ 在 $\underline{s}^q$ 中是由方程組(6)决定的. 反之，任意一組(6)型的方程决定 $\underline{s}^q$ 的一个 r 維面. $\underline{s}^q$ 的零維面就是頂点，一維面也叫作**棱**，q 維面就是 $\underline{s}^q$ 自身. $\underline{s}^q$ 的維数小于 q 的面叫作 $\underline{s}^q$ 的**眞面**.

設 $\underline{s}^q$ 是 E^n 的一个 q 維单形. $\underline{s}^q$ 的重心坐标都是正数的点叫作 $\underline{s}^q$ 的**內点**; $\underline{s}^q$ 的其他点叫作 $\underline{s}^q$ 的**边緣点**. $\underline{s}^q$ 的內点的集合叫作一个 q 維**开单形**. 因此单形 $\underline{s}^q$ 也叫作**閉单形**. $\underline{s}^q$ 的边緣点的集合叫做 $\underline{s}^q$ 的**边緣**; 它显然是 $\underline{s}^q$ 的全体 $q-1$ 維面的并集; 記作 S^{q-1}.

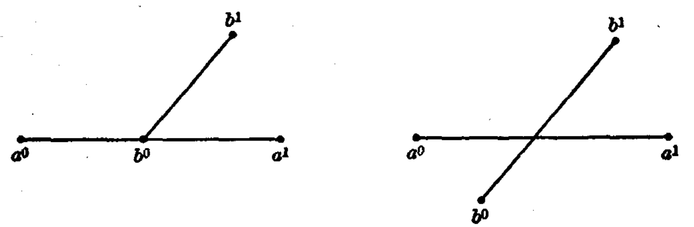
[理由：这里的点集与 $q-1$ 維球(卽 E^q 中单位球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_q^2=1$)同胚．注意，零維球是两个点．]

根据 E^n 中的 q 維超平面的定义，不难驗証下述事实：

从 q 維单形 $\underline{s}^q$ 所得到的 q 維开单形在 E^n 中的閉包就是 $\underline{s}^q$，$\underline{s}^q$ 既然是 E^n 中的一个有界閉集，$\underline{s}^q$ 是列紧的；S^{q-1} 是 $\underline{s}^q$ 的閉子集；因而 $\underline{s}^q-S^{q-1}$ 是 $\underline{s}^q$ 中的一个开子集．

$\underline{s}^q$ 的頂点也叫作从 $\underline{s}^q$ 得到的 q 維开单形的頂点．因为这开单形的閉包是閉单形 $\underline{s}^q$，从命題 1.3 有：q 維开单形也唯一地决定它的頂点．

从面单形的概念我們要引进两个单形的規則地相处这个重要概念．設 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 是欧几里得空間中两个单形．如果交 $\underline{s}\cap\underline{t}$ 是空集或是 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 的一个公共面，就說 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ **規則地相处**．



不規則地相处的 $\underline{s}^1=(a^0, a^1)$，$\underline{t}^1=(b^0, b^1)$

图 2

1.4 命題　一个单形的任意两个面規則地相处．

証　明　設 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 是一个单形 $\underline{u}$ 的两个面．$\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 在 $\underline{u}$ 中各由一組(6)型的方程决定．这两組方程联合起来，或者仍形成在 $\underline{u}$ 中的一組(6)型的方程，或者形成在 $\underline{u}$ 中的一組矛盾方程．如果是后者，則 $\underline{s}\cap\underline{t}$ 是空集；如果是前者，則 $\underline{s}\cap\underline{t}$ 是 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 的一个公共面．于是 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 規則地相处．▌

以上用重心坐标定义了单形．現在要用重心坐标来討論同維

的两个单形之間的映射．对于 E^n 中任意一个 q 維单形 $\underline{s}^q=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$，在 $q+1$ 維欧几里得空間 E^{q+1} 中取一个标准正交基 $e^0, e^1, \cdots, e^q$．我們把 E^{q+1} 中的 q 維单形 $\underline{t}^q=(e^0, e^1, \cdots, e^q)$叫作一个**自然的** q 維**单形**．$\underline{t}^q$ 的任意点是

$$y=\lambda_0e^0+\lambda_1e^1+\cdots+\lambda_qe^q,$$

其中 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 还滿足式(2)与(5)．因为 $e^0, e^1, \cdots, e^q$ 是标准正交基，$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$ 是 y 在 E^{q+1} 中的、对于这个基的直角坐标；另一方面，根据重心坐标的定义，$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$又是 y 在 $\underline{t}^q$ 中的重心坐标．故对于 E^{q+1} 中的 $\underline{t}^q$ 而言，$\underline{t}^q$ 的点的这两种坐标一致．

考虑 E^{q+1} 中的 $\underline{t}^q$ 的頂点与 E^n 中的 $\underline{s}^q$ 的頂点之間的自然的一一对应：

$$v: e^i\to a^i,\quad i=0, 1, \cdots, q.$$

并用

$$f(y)=f\left(\sum_{i=0}^{q}\lambda_ie^i\right)=\sum_{i=0}^{q}\lambda_if(e^i)=\sum_{i=0}^{q}\lambda_iv(e^i)=\sum_{i=0}^{q}\lambda_ia^i=x \qquad (7)$$

来定义对应

$$f: \underline{t}^q\to\underline{s}^q.$$

这样定义的 f 是 v 的、在 $\underline{t}^q$ 上的綫性扩張．它保持重心坐标不变，即 y 与 $f(y)=x$ 有相同的重心坐标$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$．

現在我們要証明 f 是一个拓扑映射．事实上，首先由于命題 1.1，f 是一一的而且 $f(\underline{t}^q)=\underline{s}^q$．其次，因为在 E^n 中取定的坐标系是直角坐标系，式(7)說：点 x 的 n 个直角坐标都是点 y 的 $q+1$ 个重心坐标 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 的綫性函数，因而是这些重心坐标的連續函数；再者，因为点 y 在 $\underline{t}^q$ 中的重心坐标与在 E^{q+1} 中的直角坐标同为 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$，于是点 $x=f(y)$是点 y 的連續函数，即 f 是映射．最后，由于 $\underline{t}^q$ 列紧，f 是拓扑映射(定理 I 5.7)．这个映射 f 叫作(非退化的)**仿射映射**或**保持重心坐标的拓扑映射**．这就証

明了下述命題.

1.5 命題　欧几里得空間 E^n 中任意一个 q 維单形 $\underline{s}^q$ 与自然的 q 維单形 $\underline{t}^q$ 在保持重心坐标的拓扑映射下同胚. 因此, 任意两个 q 維单形在保持重心坐标的拓扑映射下同胚.]

E^n 的拓扑(根据距离 d 得来的)是由 E^n 的直角坐标定义的, 因而它的子空間 $\underline{s}^q$ 的拓扑也是由 E^n 的直角坐标定义的. 因为 $\underline{t}^q$ 的重心坐标与 $\underline{t}^q$ 作为 E^{q+1} 的子空間时的直角坐标相同, 所以命題 1.5 有另一个說法如下:

1.6 命題　如果用自然单形 $\underline{t}^q$ (作为 E^{q+1} 的子空間时)的拓扑, 通过保持重心坐标的一一的滿对应, 来定义 $\underline{s}^q$ 的一个拓扑, 叫作 $\underline{s}^q$ 的重心坐标拓扑, 则 $\underline{s}^q$ 的重心坐标拓扑就是 $\underline{s}^q$ (作为 E^n 的子空間时)的拓扑.]

根据命題 1.1, 我們只知道 $\underline{s}^q$ 的点与它在 $\underline{s}^q$ 中的重心坐标成一一对应. 根据命題 1.6 或 1.5, 在研究 $\underline{s}^q$ 的拓扑性质时, 我們才可以用 $\underline{s}^q$ 的点的、在 $\underline{s}^q$ 中的重心坐标来替代 $\underline{s}^q$ 的点的在 E^n 中的直角坐标.

設 $\underline{s}^q=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$ 与 $\underline{t}^q=(b^0, b^1, \cdots, b^q)$ (不必是上面所說的自然单形)分别是欧几里得空間 E^n 与 E^m 中的两个 q 維单形, 而且 $v: a^i \to b^i$, $i=0, 1, \cdots, q$, 是它們的頂点間的自然的一一对应. 根据命題 1.5 的第二个結論, 我們可以談 v 的綫性扩張:

$$f(\lambda_0 a^0+\lambda_1 a^1+\cdots+\lambda_q a^q)=\lambda_0 b^0+\lambda_1 b^1+\cdots+\lambda_q b^q.$$

$f: \underline{s}^q \to \underline{t}^q$ 是保持重心坐标的拓扑映射. 再設 $\underline{s}_1^r=(a^{i_0}, a^{i_1}, \cdots, a^{i_r})$, $\underline{t}_1^r=(b^{i_0}, b^{i_1}, \cdots, b^{i_r})$, $r \leqslant q$, v_1 是 v 在 $\underline{s}_1^r$ 的頂点集上的限制, 而且 $f_1: \underline{s}_1^r \to \underline{t}_1^r$ 是 v_1 的綫性扩張. 然后明显地有下述命題.

1.7 命題　設 $\underline{s}^q$ 与 $\underline{t}^q$ 是任意两个 q 維单形, v 是 $\underline{s}^q$ 的頂点到 $\underline{t}^q$ 的頂点的自然的一一对应, v_1 是 v 的在 $\underline{s}^q$ 的面单形 $\underline{s}_1^r$ 的頂点集上的限制. 则 v_1 的綫性扩張 f_1 是 v 的綫性扩張 f 的在 $\underline{s}_1^r$ 上的限制.]

单 純 复 合 形

1.8 定义　設 K 是一个以 n 維欧几里得空間 E^n 中的单形为

元素的有限集合. 如果 K 滿足下列两个条件,則它叫作一个单純复合形,或者在不会引起混淆时,簡单地叫作一个**复形**:

1° 如果单形 $\underline{s}$ 属于 K, 則 $\underline{s}$ 的任一面单形也属于 K;

2° K 的任意两个单形規則地相处.

复形的零維单形叫作**复形的頂点**. 复形的諸单形的維数的最大值叫作**复形的維数**. 如果复形 $L\subset$ 复形 K, 則 L 叫作 K 的一个**子复形**.

1.9 定义 設 K 是 n 維歐几里得空間中的一个复形. K 的全体单形的全体点所形成的空間叫作一个**多面体**,記作 $|K|$. K 叫作 $|K|$ 的一个**单純剖分**或**三角剖分**,或者在不会引起混淆时,簡单地叫作 $|K|$ 的一个**剖分**.

一般的多面体显然有不同的单純剖分.

如果点 $x\in|K|$, 則 x 必属于 K 中某些单形; 其中最低維的含有 x 的单形只有一个, 叫作点 x 的在 K 中的**承載单形**, 記作 $\mathrm{Car}_K x$. 点 x 的在它的承載单形中的重心坐标都 >0.

設 $\underline{s}^q$ 是 E^n 中一个单形. 它的全体面或全体真面各形成一个复形,分别叫作它的**閉包复形**或**边緣复形**,記作 $\mathrm{Cl}\,\underline{s}^q$ 或 $\mathrm{Bd}\,\underline{s}^q=\dot{\underline{s}}^q$. 为簡单起見, $\mathrm{Cl}\,\underline{s}^q$ 有时候也記作 $\underline{s}^q$. 显然 $\dot{\underline{s}}^q$ 是 $\mathrm{Cl}\,\underline{s}^q$ 的子复形, $|\mathrm{Cl}\,\underline{s}^q|=\underline{s}^q$, $|\dot{\underline{s}}^q|=S^{q-1}$.

設 K 是一个复形. K 的全体維数 $\leqslant q$ 的单形形成 K 的一个子复形, 叫作 K 的 q 維**骨架**, 記作 K^q. 設 $\underline{s}^q$ 是 K 的一个单形. K 中以 $\underline{s}^q$ 为面的全体单形以及它們的面形成 K 的一个子复形, 叫作 $\underline{s}^q$ 在 K 中的**閉星形**,記作 $\mathrm{St}_K\,\underline{s}^q$ 或 $\mathrm{St}\,\underline{s}^q$.

E^n 既然是一个度量空間, 它的子空間 $|K|$ 也是一个度量空間; $|K|$ 既然是有限个列紧子集的幷集,它所以也是列紧的.

設 K 与 L 是两个复形,而

$$f:|K|\to|L|$$

是把多面体$|K|$映射到多面体$|L|$的一个映射．此后为簡便起見，我們也說f是把复形K映射到复形L的一个映射，記作

$$f: K \to L.$$

設K与L是两个复形．如果K的全体頂点a^i与L的全体頂点b^j之間存在一个一一对应(因而K与L的頂点数相同，設是$r+1$个)：

$$a^i \leftrightarrow b^i, \quad i=0, 1, \cdots, r,$$

使得$(a^{i_0}, a^{i_1}, \cdots, a^{i_q})$是$K$的一个$q$維单形，当而且只当$(b^{i_0}, b^{i_1}, \cdots, b^{i_q})$是$L$的一个$q$維单形，我們就說$K$与$L$**是同构的复形**．显然复形的同构是一个等价关系，它把全体复形分为若干**同构类**．我們把复形K与L同构記作$K \cong L$．下面的定理是本节中的主要定理．

1.10 定理 如果两个复形K与L同构，則它們的多面体同胚；用記号表示时，即如果$K \cong L$，則$|K| \cong |L|$．

証 明 本定理是下面的引理的明显推論．∎

1.11 引理 設K是具有$r+1$个頂点的复形，而且$\underline{t}^r$是$r+1$維欧几里得空間E^{r+1}中的自然的r維单形．則閉包复形$\mathrm{Cl}\,\underline{t}^r$中有一个子复形$N$与$K$同构，而且多面体$|N|$与$|K|$同胚．

証 明 設自然的r維单形$\underline{t}^r$的頂点是e^i, $i=0, 1, \cdots, r$．設K在E^m中．把K的$r+1$个頂点任意地排一个次序，把它們記作a^i．然后建立$\underline{t}^q$的頂点与K的頂点之間的下面的一一的满对应

$$v: e^i \to a^i.$$

只考慮$\mathrm{Cl}\,\underline{t}^r$中的那些单形$\underline{t}^q$，它的全体頂点的象也是$K$中的一个单形的全体頂点；我們把这些单形$\underline{t}^q$的全体記作$N$．根据命題1.4，容易看出$N$是一个复形，而且根据$N$的作法，$N$显明

地与 K 同构.

自然单形 $\underline{t}^r$ 的任一点

$$y=\lambda_0e^0+\lambda_1e^1+\cdots+\lambda_re^r,$$

这里的 $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ 是 $\underline{t}^r$ 中的重心坐标，也是 E^{r+1} 中的直角坐标. N 的点 y 也有在 $\underline{t}^r$ 中的坐标 λ. 如果 N 的点 y 属于 N 的一个单形 $\underline{t}^q$, y 的这組坐标 λ 当然一般地不是点 y 的在这单形 $\underline{t}^q$ 中的重心坐标，而是后者加上若干个零(参看图 3). 我們下面的証明中要重复地引用这个事实.

图 3 $r=2$

对应 v 仍旧是复形 N 的頂点到 K 的頂点之間的一个一一的滿对应. 仿照命題 1.5 的証明，我們先形式地作 v 的在 $|N|$ 上的綫性扩張:

$$f(y)=f\left(\sum_{i=0}^{r}\lambda_ie^i\right)=\sum_{i=0}^{r}\lambda_if(e^i)=\sum_{i=0}^{r}\lambda_ia^i,\quad y\in|N|.$$

我們現在要推广命題 1.5 的証明方法，来証明

$$f:N\to K$$

是拓扑映射.

首先，設 $\underline{t}^q$ 是 N 的任一单形，而且在同构下它的对应单形是 K 中的单形 $\underline{s}^q$. 根据上述的事实与命題 1.5,

$$f|\underline{t}^q:\ \underline{t}^q\to\underline{s}^q$$

是保持重心的拓扑映射.

其次，$f: N\to K$ 是单值对应. 設复形 N 的单形 t_1 与 t_2 的交