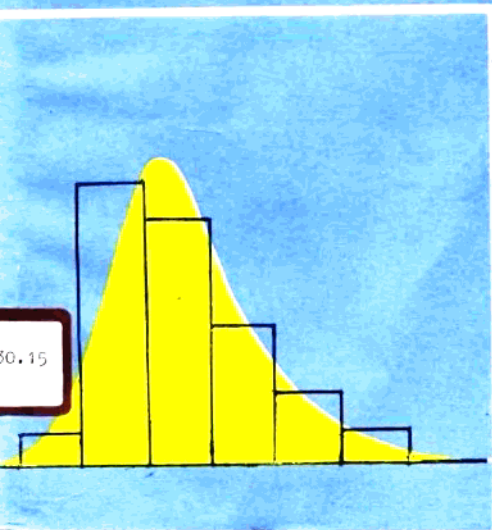


测量误差 及数据处理原理

李桂成 杨玉森 魏晓丽 编著
吉林大学出版社



测量误差及数据处理原理

李桂城 杨玉森 魏晓丽 编著

吉林大学出版社出版 吉林大学出版社发行
(长春市解放大路85号) 东北师范大学校办印刷厂印刷

开本: 787×1092毫米 1/32 1990年8月第1版
印张: 6.9375 1990年6月第1次印刷
字数: 153千字 印数: 1—1 000册

ISBN 7-5601-0518-5/N·9 定价: 3.00元

前 言

本书是为检测技术及仪器专业编写的教材。主要是根据本专业后继课程的需要,根据本专业学生毕业后实际工作的需要,并参考了相近专业教材的内容编写的。

本书共八章,前六章讲述测量误差的基本理论;后两章讲述数据处理方法。每章有简明扼要的小结,并附有习题。其中第八章测量数据的计算机处理方法应结合上机进行,方奏效。

本书由吉林工业大学李桂成担任主编,其中第1章至第6章由李桂成编写;第7章和习题由杨玉森编写;第8章由魏晓丽编写。

由于编著者水平所限,加之时间仓促,错误与不当之处在所难免,恳请读者批评指正。

编著者

1989年12月于吉林工业大学

目 录

第一章 基本概念	(1)
§ 1 - 1 误差及研究误差的目的.....	(1)
§ 1 - 2 误差的分类.....	(3)
习题.....	(14)
第二章 随机误差	(16)
§ 2 - 1 概述及数学基础.....	(16)
§ 2 - 2 随机误差的性质和特点.....	(45)
§ 2 - 3 随机误差的数字特征.....	(47)
§ 2 - 4 测量结果的置信度与最终表达式.....	(56)
§ 2 - 5 判断粗大误差的统计学方法.....	(61)
习题.....	(67)
第三章 系统误差	(69)
§ 3 - 1 概 述.....	(69)
§ 3 - 2 系统误差的检查.....	(70)
§ 3 - 3 系统误差的消除.....	(80)
§ 3 - 4 残余系差的处理.....	(88)
习题.....	(91)
第四章 非正态分布	(92)
§ 4 - 1 非正态分布的几种形式.....	(92)
§ 4 - 2 随机性系统误差的非正态分布.....	(101)
§ 4 - 3 非正态分布中的置信问题.....	(101)
§ 4 - 4 利用熵与方差的关系确定测量误差 的分布律.....	(105)
第五章 误差的传播	(111)
§ 5 - 1 概 述.....	(111)

§ 5-2	误差的合成	(112)
§ 5-3	误差的分配	(122)
§ 5-4	最佳测量方案的选择	(127)
§ 5-5	测量结果不确定度的表征	(131)
	习题	(134)
第六章	非等精度测量	(135)
§ 6-1	概 述	(135)
§ 6-2	广义算术平均值	(136)
§ 6-3	非等精度测量的标准偏差	(143)
§ 6-4	最小二乘法及其在误差理论 中的应用	(145)
	习题	(149)
第七章	测量结果的处理	(151)
§ 7-1	概 述	(151)
§ 7-2	测量值的数值计算	(151)
§ 7-3	测量数据的图表表示法	(165)
§ 7-4	利用最小二乘法修匀曲线及直线	(168)
§ 7-5	修匀曲线及直线的工程方法	(175)
§ 7-6	利用回归分析确定经验公式	(178)
§ 7-7	插值法的应用	(182)
	习题	(193)
第八章	测量数据的计算机处理	(195)
§ 8-1	等精度测量数据的计算机处理	(195)
§ 8-2	非等精度测量数据的计算机处理	(202)
§ 8-3	利用微机进行曲线的修匀	(206)
	附表	(214)

第一章 基本概念

§ 1 - 1 误差及研究误差的目的

一、有关测量误差的几个基本概念

1. 测量

指人们借助于适当的仪器和设备，通过实验的方法，对客观事物获取数量观念的一种认识过程。

从理论上讲，测量的最终目的是求得被测量的真正值，但是由于测量方法、测量仪器及设备、测量环境、测量人员的限制，真正值是永远得不到的，只能以不同精度逼近其真值。

2. 等精度测量

在多次测量中，如果每次测量都使用相同的方法、相同的仪器，在同样的环境下进行，而且每次都以同样的细心进行工作。即在同一条件下进行一系列重复测量称为等精度测量。

3. 非等精度测量

在多次测量中，进行每一次测量时，如果对测量结果的精确度有影响的一切条件不能完全维持不变，则所进行的这一系列重复测量，即为非等精度测量。

4. 真值

在一定的时间和空间条件下，被测量本身具有的真实大小，即是一个理想的无误差的测量值。

5. 实际值

由于真值一般无法测得，故真值只是理想值，常用上一级标准仪器测得的值来代替真值，称此值为实际值。上一级标准仪器测得的值也存在误差，只不过其误差较小而已。可见实际值并不是真值，而不过它更接近真值。

6. 示值

量具的标称值，仪器的指示值总称为示值。示值和读数有区别。读数是直接读到数字，而示值是读数所代表的被测量的数值。如一只线性刻度为 $0 \sim 100$ ，量程为 $500\mu\text{A}$ 的电流表，读数为 85，则示值为 $x = 85/100 \times 500 = 425\mu\text{A}$ 。

6. 给出值

它除了量具的标称值，仪器的指示值之外，还应包括近似计算的近似值等。

7. 测量误差

被测量的示值与真值之差为测量误差，某一量值的给出值与真值之差为误差。误差的含意为测量误差、计算误差等的总和。当不致引起混淆时，测量误差也简称为误差。

二、研究测量误差的目的

研究误差理论与数据处理的目的是：

- ① 分析误差产生的原因，正确认识误差的性质和规律，以消除或减小误差，提高测量精度。
- ② 正确处理数据，合理计算所得结果，以便在一定条件下得到更接近于真值的数据。
- ③ 设计和选用测量仪器、测量方法和方案，以便在最

经济的条件下，得到理想的结果。

§ 1-2 误差的分类

在测量中，由于不同因素产生不同种类的误差是同时混在一起出现的，因此为了便于分析研究误差的性质、特点，对各种误差进行如下分类。

一、按表示方法分类

1. 绝对误差

绝对误差是被测量的给出值与真值之间的差值，
即

$$\Delta x = x - A_0 \quad (1-1)$$

式中：

Δx ——绝对误差；

x ——被测量的给出值；

A_0 ——被测量的真值。

在某一时间及空间条件下，被测量的真值虽然是客观存在的，但一般无法确切求得，只能尽量逼近它。因此，通常用实际值 A 来代替真值 A_0 。必须指出，由于上一级标准仪器也存在着误差，仅仅小些而已，故 $A \neq A_0$ ，一般 A 比 x 更接近 A_0 。

由上可见，绝对误差的实际计算式常变为

$$\Delta x = x - A \quad (1-2)$$

误差既可以为正，也可以为负。式(1-2)中的 Δx 有时也称为示值误差。

修正值：我们定义与绝对误差 Δx 大小相等符号相反的

量值为修正值 C ，即

$$C = -\Delta x = A - x \quad (1-3)$$

关于修正值的几点说明：

① 利用修正值可以求出仪器的实际值，通过检定，可由上一级标准（或基准）给出受检仪器的修正值，而该仪器的实际值则为

$$A = C + x$$

② 修正值给出方式不一定是具体的数值，也可以是一条曲线、公式或表格。在某些自动测试仪器中，修正值则预先编成有关程序，储存在仪器中，在测量时仪器可以对测量结果自动进行修正。

③ 对于供给量仪器（信号源、稳压电源等），其绝对误差为

$$\Delta x = A - x$$

同样修正值

$$C = x - A$$

遇此情况须加以说明。

④ 误差不是任何情况下都能修正，只是对系统误差才能修正，而随机误差不能修正。

2. 相对误差

仅绝对误差还不能说明测量的水平，还须采用相对误差。相对误差又分为实际相对误差、示值相对误差、引用（或满度）相对误差以及分贝误差等。

实际相对误差是用绝对误差 Δx 与被测量的实际值 A 的比值的百分数来表示的相对误差，记为

$$\gamma_A = \frac{\Delta x}{A} \times 100\% \quad (1-4)$$

示值相对误差是用绝对误差 Δx 与给出值（多数情况为示值） x 的比值的百分数表示的相对误差，记为

$$\gamma_x = \frac{\Delta x}{A} \times 100\% \quad (1-5)$$

当误差之值不大时， A 与 x 很接近，故一般两者相差很小。如果误差本身较大，就需要注意二者的区别了。

有些特殊场合，如在误差理论分析中，常将理想情况下仪器的示值作为实际值，此时用 γ_A 较简单。

在一般情况下用 γ_x 较适宜，其原因是：

① 在仪器某指定点上进行检定，误差范围是指相对该检定点的示值而言的。

② 通常都是在仪器某几个整数刻度上进行检定，这时用 γ_x 计算较简便。

③ 有时修正值是以某检定点的相对值形式给出的，即给出 C/x ，这与 γ_x 是相对应的，而且计算实际值也较方便，即

$$A = x (1 + C/x)$$

引用（或满度）相对误差是用绝对误差 Δx 与仪器的满度值 x_m 之比值的百分数来表示的相对误差，记为

$$\gamma_m = \frac{\Delta x}{x_m} \times 100\% \quad (1-6)$$

几点说明：

① 由于 γ_m 是用绝对误差与一个常数 x_m （量程上限）之比值表示的，故实际上给出的是绝对误差按同一比例的缩小值，故其给出的实际上是绝对误差的大小。

② 电工仪表是按 γ_m 之值来分级的，常用电工仪表分为0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.5及5.0等七级。例如1.5级的电表就表明其 $\gamma_m \leq \pm 1.5\%$ 。

③ 如果一个电工仪表有几个量程时，例如1.5级仪表，那么各个量程均有 $\gamma_m \leq 1.5\%$ 。显然各个量程的绝对误差不一样。

④ 一般对准确度级别在0.2级以下的磁电式仪表，当表头偏转到不同位置时，因磁场分布、机械摩擦、游丝扭矩等的不均匀性可忽略不计，故在一个量程内可认为 Δx 是一个常数。对0.2级以上的电表，上述各因素的不均匀性便较突出， Δx 将不是常数。

⑤ 为了减小测量中的示值相对误差，在选择量程时应使指针尽可能接近满度值。其原因如下：若某仪表的等级是 s 级的，它的满刻度值为 x_m ，则测量的绝对误差为

$$\Delta x \leq x_m \cdot s\% \quad (1-7)$$

其示值相对误差为

$$\gamma_x = \frac{x_m \cdot s\%}{x} \quad (1-8)$$

在式 (1-8) 中，总是满足 $x \leq x_m$ 的，可见当仪表等级 s 选定后， x 愈接近 x_m 时， γ_x 的上限值愈小，测量愈准确。因此，当我们使用这类仪表进行测量时，一般应使被测量的值尽可能在仪表满刻度值的 $2/3$ 以上。

用对数表示的相对误差——分贝误差，在电子学和声学中常用分贝表示相对误差，称为分贝误差，记作 γ_{dB} 。

对电流电压类参量有

$$\gamma_{dB} = 20 \lg (1 + \gamma_A) \quad (dB) \quad (1-9)$$

对功率类参量有

$$\gamma_{dB} = 10 \lg (1 + \gamma_A) \quad (dB) \quad (1-10)$$

当误差本身不大时，电压、电流类参量的 γ_{dB} 与一般相对误差的关系推导如下：

$$\gamma_{dB} = 20 \lg \left(1 + \frac{\Delta x}{A} \right) = 20 \frac{\Delta x}{A} \cdot \lg e = 8.69 \gamma_A$$

$$\approx 8.69 \gamma_x (\text{dB}) \quad (1-11)$$

$$(\because \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时 } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots)$$

$$\therefore e^x \approx 1 + x$$

$$\therefore \lg(1+x) = x \lg e$$

同理，对功率类参量

$$\gamma_{dB} = 4.34 \gamma_A \approx 4.34 \gamma_x (\text{dB}) \quad (1-12)$$

3. 容许误差

根据技术条件的要求，规定某一类仪器误差不应超过的最大范围。通常技术说明书或仪器、量具上所标明的误差都是指容许误差。

几点说明：

① 容许误差指某类仪器不应超出的误差最大范围，并不是某台确定仪器的实际误差，但这类仪器中某台确定仪器的误差不会超过容许误差，至于其中每台仪器的误差各为多少，一般并不知道。

② 按规定，容许误差以误差极限的形式给出，而“仪器误差不应超过的最大范围”就是针对误差极限而言的。但它并不意味着误差决不可超过该范围，而是指超过的可能性很小，以致事实上可不予考虑。

③ 容许误差的表示形式，既可以是绝对误差的形式，也可以是相对误差的形式，或者是两者合起来表示。

二、按误差的性质分类

1. 系统误差

简称系差，是指在一定条件下多次测量同一量时，误差的数值和符号均保持不变的误差，或在条件改变时，按某种已知的函数规律变化的误差。系统误差又可分为恒定系差和变值系差。

恒定系差（简称恒差），是指在一定条件下，误差的数值和符号均保持不变的系统误差。例如，一只10mH的标准电感，经检定其实际值为10.03mH，则其误差为恒定系差 $\Delta L = 10 - 10.03 = -0.03\text{mH}$ 。

变值系差（简称变差），是指在一定的条件下，误差的数值按某一确定的规律变化的误差。根据其变化规律又可分为以下几种情况。

其一，累进性系差：指在整个测量过程中误差的数值逐渐增加或减小的系统误差。例如蓄电池在使用过程中会因放电而使其电动势逐渐下降，形成累进性系差。

其二，周期性系差：指在测量过程中误差数值发生周期性变化的系统误差。例如，当对某物理量进行昼夜连续测量时，每昼夜平均温度基本上按周期性变化。

其三，按复杂规律变化的系差：这种系差的变化规律十分复杂，一般用曲线、表格或经验公式来表示。例如，作为直流电压基准的标准电池，其电动势随环境温度变化的规律十分复杂，我国计量科学研究院经多次实验、观测，求出其温度误差的经验公式为

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_{20} - E_t \\ &= [39.94(t - 20) + 0.929(t - 20)^2 - \\ &\quad - 0.0092(t - 20)^3 + 0.00006(t - 20)^4] \times 10^{-6} (\text{V})\end{aligned}$$

式中： (1-13)

E_{20} ——+20℃时标准电池电动势；

E_t — t ℃时标准电池的电动势。

系统误差表明了一个测量结果偏离真值或实际值的程度，故有时又称为系统偏差或简称偏倚。在误差理论中，还经常用准确度一词来表征系统误差的大小。二者在数学上具有倒数关系。系统误差越小，准确度越高；系统误差越大，准确度越低。

2. 随机误差

简称随差，又称偶然误差。这是指在相同条件下多次测量同一量时，其绝对值和符号均以不可预计的方式变化的误差。随机误差具有随机变量的一切特点，因而在一定条件下服从统计规律。

随机误差产生的原因是由很多复杂因素微小变化的总和引起的，因此很难分析，也无法控制，其具体数值与符号也不能预先估计。然而，经过多次测量后，对其总和可以用统计规律来描述，从而在理论上估计其对测量的影响。例如，传动链的间隙引起的误差属于双值离散分布，摩擦引起的误差属于均匀分布，仪表对正弦干扰电压影响造成的误差属于反正弦分布，而大量随机误差属于正态分布。

随机误差表现了测量结果的分散性，在误差理论中，经常用精密度一词来表征随机误差的大小。随机误差越大，精密度越低，反之精密度越高。如果一个测量结果的随机误差和系统误差均很小，则表明测量结果既精密又准确，简称精确。一切测量都应该力求既精密又准确，即精确度要高。有时也称精确度为精度。

3. 粗大误差

简称粗差，是指在一定测量条件下，明显歪曲测量结果的误差。从性质上来看，粗差并不是单独的类别，它本身既可能

具有系统误差的性质，也可能具有随机误差的性质。

产生粗差的主要原因是读数、记录错误，仪器故障，测量方法不合理，操作方法不正确，计算错误以及不能允许的干扰等。

在测量及数据处理中，当发现某次测量结果误差特别大时，应该认真判断该误差是否属于粗大误差，一般可以通过理论分析，增加测量次数或重新进行测量，改变测量条件或人员，利用统计学方法等一系列办法，在相当程度上判断出该误差是否属于粗差。粗差对应的测量数据称为坏值，测量数据中坏值应当剔除不用。

4. 系统误差和随机误差的关系

从二者对测量结果的影响看：系统误差和随机误差是在一定条件下两类性质完全不同的误差，但系统误差由于有确切的函数关系反映了事物的必然性，而随机误差则是一种纯粹偶然现象，但二者并不是彼此孤立的，它们总是相互伴随着对测量结果发生影响，一般很难把它们从测量结果中严格区分出来。某种条件下当系统误差的影响占主要时，总的测量误差便呈现出系统误差的性质。如果条件改变时，随机误差的影响上升为主要的，则总的误差便呈现出随机误差的性质。例如，当测量一只晶体振荡器的日稳定度和月稳定度时，误差主要由晶体的老化引起，此时各种噪声等随机因素的影响可忽略不计，故总的误差视为系统误差。如果改为观测其毫秒或微秒时间内的稳定度，这时误差主要由各种瞬变性质噪声引起，故应视为随机误差。

从人们对误差规律的认识看：由于人们对事物认识的深度及处理手段等不同，有时不得不把某些暂时没有完全掌握或分析起来过于复杂的系统误差当作随机误差来处理。例如，

生产一批电容分压器，就每一只分压器而言，其分压比的误差是完全确定的，属于系统误差，但由于批量生产的特点，往往并不单独给出每一只分压器的误差数值，而是只给出一批分压器的容许误差。因此，如从这批分压器中任抽一只来用，则只能按容许误差来估计，而这一估计具有随机误差的特点，又称随机性系统误差。

同样，对于某些随机误差（如环境温度、电源电压波动等引起的误差），当设法掌握了其确切规律后，便可作为系统误差并设法加以修正。

5. 不确定度的概念

不确定度表示由于误差的存在而对被测量值不能确定的程度。

根据国际计量局不确定度工作组1980年10月起草的《关于表述不确定度的建议草案》一文，可把不确定度按估计其数值所用的方法不同归并成两类。

A类分量：对一系列多次重复测量后，用统计方法计算出的标准误差。

B类分量：用其它方法估算出的标准误差。

不确定度则表示上述两种误差可能取值的最大范围。

三、按误差来源分类

1. 仪器误差

由于仪器本身电气或机械性能不完善所产生的误差。主要包括：

（1）读数误差，由以下几种原因产生：

① 校准误差，指仪器出厂时，用标准仪器对其指定的某些校准点进行校准（定标）时所产生的误差。

② 刻度误差，为了适应批量生产的特点，一般测量仪器都采用统一刻度盘，由于每台仪器的特性都不完全相同，故在非校准点，就可能引起不同程度的误差。

③ 读数分辨率不高所致的误差，仪器读数的分辨率是指仪器所能读出被测量的最小变化量，分辨率高低与仪器容许误差相适应。如果仪器读数机构分辨率不高将带来误差，例如在图 1-1 中前者可读出其示值约为 9.42，其中小数点后面

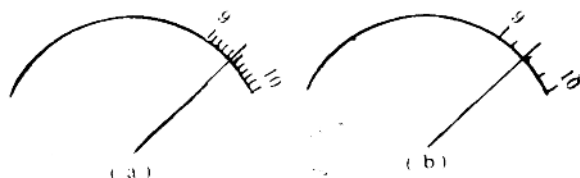


图 1-1

第 2 位的“2”是估计出来的；后者可读出其示值为 9.4，只能估计小数点后一位“4”。显然后者因读数分辨率太低而增加了测量误差。应该指出的是，提高仪器读数机构分辨率必须在仪器本身稳定性得到保证的前提下才能进行，否则由于不稳定，将使读数不可信赖。

④ 读数调节机构不完善所引起的误差，这类误差在某些由齿轮传动的调节装置中比较明显，当来回调节时由于齿轮啮合不佳将产生误差。

⑤ 量化误差，又称 ± 1 误差，这是数字仪器固有的误差。

(2) 内部噪声引起的误差。内部噪声包括各种电子器件产生的闪变噪声，电子元件产生的热噪声、散粒噪声、电流噪声以及开关、接插件接触不良、继电器动作、电动机转动、电源不稳等引起的噪声。噪声的存在限制了测量灵敏度