# 常微分方程

中册

CHANG
WEI
FEN
FANG
CHENG

湖南科学技术出版社

# 常微分方程

## 中 册

贺建勋 王志成

湖南科学技术出版社

**常 微 分 方 程**
**（中　册）**
贺建勋　王志成
责任编辑：胡海清
装帧设计：张小平、胡杰
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1980年9月第1版第1次印刷
字数：404,000　印张：19.75　印数：1——4,000
统一书号：13204·21　定价：2.00元

# 目 录


第四章 线性系统的一般理论 ……………… ( 1 )

§1 线性系统解的性质与结构 ……………… ( 7 )

1.1 解的简单性质 ……………… ( 8 )

1.2 函数的线性相关性 ……………… ( 11 )

1.3 线性系统解的结构 ……………… ( 18 )

1.4 朗斯基行列式、刘维尔公式 ……………… ( 22 )

1.5 矩阵微分方程、转移矩阵 ……………… ( 26 )

§2 高阶线性微分方程 ……………… ( 38 )

第五章 常系数线性系统 ……………… ( 47 )

§1 复线性微分方程和复值解 ……………… ( 52 )

1.1 实变量复值函数 ……………… ( 53 )

1.2 复值指数函数及其某些性质 ……………… ( 54 )

1.3 最简单的复线性微分方程和方程组 ……………… ( 55 )

1.4 一般复线性系统 ……………… ( 59 )

1.5 实系数齐次线性系统 ……………… ( 61 )

1.6 复值向量函数组线性组合的实值化 ……………… ( 63 )

§2 常系数齐次线性系统基本解组的结构 ……………… ( 67 )

2.1 $n$ 阶常系数齐次线性方程基本解组的结构 …( 67 )

2.2　常系数齐次线性方程组的基本解组的结构 …( 79 )
§ 3　常系数齐次线性系统的解法 ……………………(120)
3.1　$n$ 阶常系数齐次线性方程的解法 ……………(120)
解法一　欧拉待定指数函数法 …………………………(121)
解法二　化为等价微分方程组的解法……………………(124)
解法三　拉普拉斯变换法 …………………………(130)
解法四　降阶法………………………………………(151)
3.2　常系数齐次线性方程组的解法 ……………(158)
解法一　待定系数法 ……………………………………(158)
解法二　化为高阶方程的解法——消元法 ……………(173)
解法三　拉普拉斯变换法 …………………………(190)
解法四　降维(阶)法 ……………………………………(203)
§ 4　常系数非齐次线性系统的解法 ……………………(218)
解法一　参数变易法 ……………………………………(219)
解法二　待定系数法 ……………………………………(245)
解法三　算子解法 ………………………………………(272)
解法四　拉普拉斯变换法 …………………………(289)
§ 5　常系数线性系统的应用 ……………………………(300)
第六章　变系数线性系统 ……………………………(339)
§ 1　某些特殊变系数线性系统的解法 ……………………(340)
1.1　一些可以直接积分的类型 ………………………(340)
1.2　化为直接可积类型的方法 ………………………(355)
1.3　化为常系数线性系统的方法 ……………………(383)

1.4 试解法、降阶法 ……………………………… (415)
1.5 参数变易法 ………………………………… (422)
1.6 级数解法 …………………………………… (429)
§2 周期系数线性系统 ……………………………… (480)
2.1 问题的提出和意义、实例 ………………… (480)
2.2 周期系数线性系统一般理论、Floquet 理论… (493)
§3 边值问题 ………………………………………… (515)
3.1 边值问题的概念和分类 …………………… (515)
3.2 边值问题的一般理论 ……………………… (521)
3.3 线性微分方程组的边值问题 ……………… (534)
3.4 特征值问题 ………………………………… (537)
答案 …………………………………………………… (554)

# 第四章　线性系统的一般理论

本章专门讨论线性系统，它包含线性微分方程和线性微分方程组两个部分。这是一类在理论上和应用上都非常重要的方程，它在整个微分方程中占有重要的地位，其理由如下：(i) 线性系统比较简单，它的理论比较完整而且成熟，对常系数线性系统还可以求出它的解的结构形式；(ii) 许多实际问题常可以由线性系统或简化为线性系统来描述；(iii) 对于非线性系统，直到现在还没有十分有效的、一般的处理方法，因而在某些情况下，仍然只好求助于线性化来处理。所有这些理由将会在下面的讨论中得到进一步的了解。

在前面几章里，我们已经遇到过许多线性方程的实例。例如，当研究外力作用下机械振动问题时，我们遇到一个二阶线性方程

$$m\ddot{x}+h\dot{x}+kx=H\sin\omega t,$$

其中$m$、$h$、$k$、$H$、$\omega$ 都是常数。又如，当$RLC$串联电路接上交流电源时，电容器两端电压 $u=u(t)$ 满足下列方程

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u=U_0\sin\omega t,$$

其中 $L$、$C$、$R$、$U_0$、$\omega$ 都是常数。以上两个方程称为常系数线性微分方程。

当考虑一个单摆（即悬挂在一根没有重量的杆子上的一个质点），在杆的上端受到一个余弦变化的外力 $mg+a\cos t$，如图 4—1．设 $\theta$ 是单摆离开垂直位置的微小角度位移，于是，$\theta$ 所应满足的微分方程是，

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}+(mg+a\cos t)\theta=0,$$

其中 $m$ 为质量，$g$ 是重力加速度，$l$ 是摆长，$a$ 是周期外力的振幅．这个方程可改写为有名的 *Mathieu* 方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+(\alpha+\beta\cos t)\theta=0,$$

其中 $\alpha=g/l$，$\beta=a/(ml)$，这是一个周期系数线性微分方程．

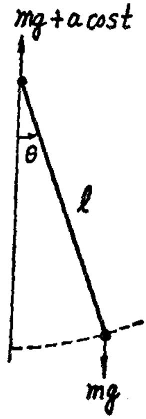

图 4—1

当考虑短程火箭的弹道时，通过线性化之后，可得到如下的方程组

$$\begin{cases} 2z\dfrac{d\theta}{dz}=(\alpha-\beta)-\dfrac{mg}{s}\cos\theta_i, \\ 2z\dfrac{d^2\varphi}{dz^2}+\dfrac{d\varphi}{dz}=\dfrac{\delta}{k^2}-\dfrac{8\pi^2}{\sigma^2}z(\alpha-\gamma), \end{cases}$$

其中 $\sigma^2=(4\pi^2h_m)/(k_m\rho d^3)$，这是具有两个未知函数的变系数线性微分方程组，其记号所表示的意义如图 4—2 所示．以上两例参看钱学森《工程控制论》．

许多非线性系统的问题，可以化为线性系统来处理，即所谓线性化方法．其中主要途径之一是考虑系统的所谓变分方程

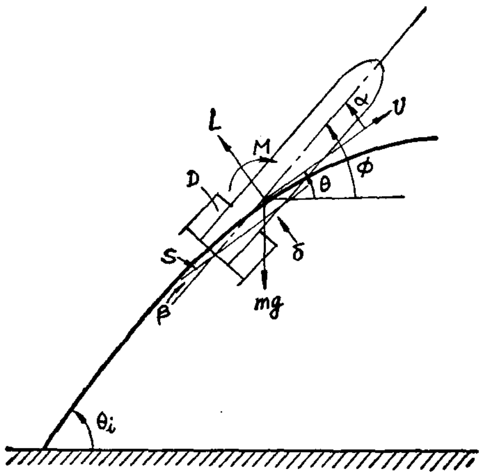


图 4 — 2

组，它是线性微分方程组. 方法如下：

考虑非线性微分方程组

$$(0.1)\qquad \frac{dy_i}{dt}=f_i(t,\ y_1,\ \cdots,\ y_n),\ (i=1,\ \cdots,\ n).$$

设 $y_i^{(0)}(t)\,(i=1,\ \cdots,\ n)$ 是它的一组已知的特解，且设它在某区间 $\alpha\leqslant t<\beta$（允许 $\beta=+\infty$）上有定义. 假若我们的目的是研究方程组 (0.1) 的，与已知解 $y_i^{(0)}(t)$ 充分邻近的其他解的性态，则令

$$x_i=y_i-y_i^{(0)}(t),\ (i=1,\ \cdots,\ n)$$

代入 (0.1)，得到

$$(0.2)\qquad \frac{dx_i}{dt}=f_i(t,\ x_1+y_1^{(0)},\ \cdots,\ x_n+y_n^{(0)})$$

$$-f_i(t,y_1^{(0)},\ \cdots,\ y_n^{(0)})$$

$$\triangleq X_i(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\ (i=1,\ \cdots,\ n).$$

这样一来，方程组（0.1）的已知特解 $y_i=y_i^{(0)}(t)$，$(i=1,\cdots,n)$，现在就对应于方程组（0.2）的零解 $x_i\equiv0(i=1,\ \cdots,\ n)$；而原先的问题就化为研究方程组（0.2）在零解$x_i\equiv0(i=1,\cdots,n)$的邻域内其他解的性态的问题了.

如果函数$f_i$在某区域$D$上是连续的，且对$y_j$有连续的一阶偏导数$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$，则按$Taylor$公式展开，得到

$$X_i(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i\ (t,y_1^{(0)},\cdots,y_n^{(0)})}{\partial y_j}x_j$$

$$+R_i(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\ (i=1,\ \cdots,\ n),$$

其中 $$R_i(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)=o\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\Big),$$

$$\lim_{\sum_{j=1}^{n}|x_j|\to0}\frac{R_i(t,x_1,\cdots,x_n)}{\sum_{j=1}|x_j|}=0.$$

上面第二式关于$t\in(\alpha_1,\ \beta_1)$一致地成立，这里，$(\alpha_1,\ \beta_1)$是含于$(\alpha,\ \beta)$内的任意有限区间. 这时，为了研究方程组（0.2）在零解邻近的其他解的性态，常常可略去关于$x_i$的高次项，而研究相应的线性方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(t,\ y_1^{(0)},\cdots,y_n^{(0)})}{\partial y_j}x_j,\quad (i=1,\ 2,\cdots,n).$$

此线性方程组称为(0.1)关于解 $y_i=y_i^{(0)}(t)$ 的线性化系统或一阶变分方程组. 这种方法就是所谓线性化方法.

非线性系统的线性化研究的另一途径是考虑它的第一近似系统. 例如，考虑非线性系统

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(t,x_1,\cdots,x_n),\quad (i=1,\ 2,\cdots,n) \tag{0.3}$$

在零解 $x_i\equiv 0(i=1,2,\cdots,n)$的邻近的其他解的性态. 假设

(i) $X_i(t,0,\cdots,0)=0$, $(i=1,2,\cdots,n)$;

(ii) $X_i$在区域$D$ : $|x_i|\leqslant H$, $t\geqslant 0$上可展成如下形式:

$$X_i=a_{i1}(t)x_1+\cdots+a_{in}(t)x_n+\varphi_i(t,x_1,\cdots,x_n),$$

其中$a_{ij}(t)$在$t\geqslant 0$上连续，且$\varphi_i$满足不等式

$$|\varphi_i(t,x_1,\cdots,x_n)|<A(|x_1|+\cdots+|x_n|)^m,$$

这里 $A>0$, $m>1$ 均为常数.

此时，系统(0.3)的第一近似系统为

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}(t)x_1+\cdots+a_{in}(t)x_n,(i=1,2,\cdots,n). \tag{0.4}$$

这样一来，所讨论的问题，往往可以转化为研究第一近似系统(0.4)(它是线性系统)的零解$x_i\equiv 0$的邻近的其他解的性态的问题.

本章我们将着重考虑正规形 $n$ 阶线性微分方程

$$\frac{d^ny}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+a_n(t)y=b(t), \tag{0.5}$$

和正规形线性微分方程组

$$(0.6)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j+f_i(t),\ (i=1,2,\cdots,n).$$

如同第三章所指出的那样，如果我们引进新的未知函数

$$x_1=y,\ x_2=\frac{dy}{dt},\cdots,x_n=\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}},$$

则 $n$ 阶线性微分方程 (0.5) 便可化为下列等价的一阶线性微分方程组

$$(0.7)\qquad \begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_3,\\ \cdots\\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt}=x_n,\\ \dfrac{dx_n}{dt}=-a_n(t)x_1-a_{n-1}(t)x_2-\cdots-a_1(t)x_n+b(t).\end{cases}$$

若引进向量——矩阵记号，则方程组 (0.6) 可写成

$$(0.8)\qquad \frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t),$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T, f(t)=(f_1(t),\cdots,f_n(t))^T$，且

$$A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)=\begin{pmatrix}a_{11}(t)\cdots a_{1n}(t)\\ \vdots \qquad \vdots\\ a_{n1}(t)\cdots a_{nn}(t)\end{pmatrix}.$$

对于方程组 (0.7)，相应的 (0.8) 中，有 $f(t)=(0,\ \cdots,\ 0,\ b(t))^T$，且

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

因此，本章将着重讨论微分方程组(0.6)，然后将所得结果应用于高阶方程(0.5)。

## § 1 线性系统解的性质与结构

在第二章§1的1.3中，我们学过了一阶线性微分方程的解法，对一阶线性系统解的性质，初步获得了许多感性认识。现在我们就一般线性系统探讨它的普遍规律。

考虑线性系统

(1.1) $$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t),$$

其中$A(t)$为$n\times n$矩阵：$A(t)=(a_{ij}(t))$，而$x$与$f(t)$均为$n$维列向量：$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$f(t)=(f_1(t),\cdots,f_n(t))^T$。

当$f(t)\equiv 0$（即$f_i(t)\equiv 0$，$i=1,\cdots,n$）时，(1.1)式化为，

(1.2) $$\frac{dx}{dt}=A(t)x,$$

它称为**齐次线性系统**。当$f_i(t)$不全恒为零时，(1.1)式称为**非齐次线性系统**。当(1.1)和(1.2)中的系数$a_{ij}(t)$恒相同时，则称系统(1.2)为对应于非齐次线性系统(1.1)的齐次线性系统。

今后，我们总假定，系数 $a_{ij}(t)$ 和自由项 $f_i(t)$ 在某区间 $a<t<b$ 上都是连续的。于是，显然系统(1.1)和(1.2)均满足解的存在唯一性条件；而且系统的所有解均在全区间 $a<t<b$ 上有定义，其积分曲线族充满着 $n+1$ 维条形区域：

$$a<t<b,\quad -\infty<x_i<+\infty,\quad i=1,\cdots,n.$$

### 1.1 解的简单性质

为讨论简便起见，首先我们引进线性算子 $L$ 的概念，它由等式

$$L[x]=\frac{dx}{dt}-A(t)x$$

所规定。此算子 $L$ 对在区间 $a<t<b$ 上所有连续可微的向量函数作用有意义。显然，算子 $L$ 具有下面两个重要性质：

(1.3a) $\quad L[u+v]=L[u]+L[v]$,

(1.3b) $\quad L[cu]=cL[u]$,

其中 $u$，$v$ 为定义在 $a<t<b$ 上的两个任意的连续可微的 $n$ 维列向量函数，而 $c$ 为任意的常数。

满足条件(1.3)的算子 $L$，我们称为**线性算子**。

引用线性算子 $L$ 的记号，则线性系统(1.1)和(1.2)可分别改写为

$$L[x]=f(t) \quad 和 \quad L[x]=0.$$

下面介绍线性系统解的一些简单性质。

**性质1°** $x(t)\equiv 0$ 是齐次线性系统(1.2)的解，它称为平凡解或零解。反之，若 $\overset{\frown}{x}(t)$ 是系统(1.2)满足零初始条件

(1.4) $\quad \overset{\frown}{x}(t_0)=0,\quad t_0\in(a,b)$,

的一个解，则$\tilde{x}(t)$是系统（1.2）的零解：$x(t)=0$，$a<t<b$。

事实上，显然$x(t)\equiv 0$满足$L[x(t)]\equiv 0$，故为（1.2）的一解，且满足初始条件（1.4）。根据解的存在唯一性，满足初始条件（1.4）的解只有唯一的一个，故在全区间$a<t<b$上，$\tilde{x}(t)$应与$x(t)\equiv 0$重合，亦即$\tilde{x}(t)$是系统（1.2）的平凡解，即$\tilde{x}(t)\equiv 0$。

**性质2°** 若向量函数$x^{(1)}(t),\cdots,x^{(m)}(t)$是系统（1.2）的$m$个解，则它们的线性组合

$$x(t)=c_1x^{(1)}(t)+\cdots+c_mx^{(m)}(t)$$

也是（1.2）的解，其中$c_1,\cdots,c_m$为$m$个任意常数。

事实上，因为$L$是线性算子，显然有

$$L[x(t)]=c_1L[x^{(1)}(t)]+\cdots+c_mL[x^{(m)}(t)].$$

由于$x^{(1)}(t),\cdots,x^{(m)}(t)$是（1.2）的解，有

$$L[x^{(1)}(t)]\equiv 0,\cdots,L[x^{(m)}(t)]\equiv 0,$$

从而得出

$$L[x(t)]\equiv 0.$$

性质2°是齐次线性系统解的基本性质，由此可以推知，（1.2）的解的全体构成一个线性空间。

**性质3°** 若向量函数$x^{(1)}(t)$，$x^{(2)}(t)$是非齐次线性系统（1.1）的两个解，则它们之差

$$x(t)=x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)$$

是对应的齐次线性系统（1.2）的解。

这是因为，由$L[x^{(1)}(t)]=f(t),L[x^{(2)}(t)]=f(t)$，可以推出

$$
\begin{aligned}
L[x(t)] &= L[x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)] \\
&= L[x^{(1)}(t)]-L[x^{(2)}(t)] \\
&= f(t)-f(t)\equiv 0.
\end{aligned}
$$

**性质4°** 若$x^*(t)$是非齐次线性系统(1.1)的解，而$\tilde{x}(t)$是对应齐次线性系统(1.2)的解，则它们之和

$$x(t)=x^*(t)+\tilde{x}(t)$$

是非齐次线性系统(1.1)的解.

这是因为，由$L[x^*(t)]=f(t)$，$L[\tilde{x}(t)]=0$，可以推出

$$
\begin{aligned}
L[x(t)] &= L[x^*(t)+\tilde{x}(t)] \\
&= L[x^*(t)]+L[\tilde{x}(t)] \\
&= f(t).
\end{aligned}
$$

**性质5°** 若系统(1.1)中，$f(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}f^{(i)}(t)$，且设$x^{(i)}(t)$ $(i=1,\cdots,m)$分别为非齐次线性系统

$$L[x]=f^{(i)}(t),\ (i=1,\cdots,m)$$

的解，则它们之和$x(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}x^{(i)}(t)$是非齐次线性系统(1.1)的解.

事实上，因为

$$L[x^{(1)}(t)]=f^{(1)}(t),\cdots,\ L[x^{(m)}(t)]=f^{(m)}(t),$$

立刻推出

$$L[x(t)] = L\left[\sum_{i=1}^{m} x^{(i)}(t)\right] = \sum_{i=1}^{m} L[x^{(i)}(t)]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f^{(i)}(t) = f(t).$$

**性质5°称为叠加原理。**

## 1.2 函数的线性相关性

首先引进向量函数的线性相关与线性无关的概念。

**定义1.1** 设 $x^{(1)}(t),\cdots,x^{(m)}(t)$ 为一组定义在 $a<t<b$ 上的向量函数。如果存在不全为零的常数 $c_1,\cdots,c_m$，使得对一切 $t\in(a,b)$，恒成立

$$c_1x^{(1)}(t)+\cdots+c_mx^{(m)}(t)\equiv 0, \tag{1.5}$$

则称此向量函数组在区间 $(a,b)$ 上为**线性相关**。反之，如果不存在这样的不全为零的常数 $c_1,\cdots,c_m$，使 (1.5) 式恒成立，则称此向量函数组在 $(a,b)$ 上为**线性无关（或线性独立）**。换句话说，由等式 (1.5) 能推出 $c_1=\cdots=c_m=0$，则 $x^{(1)}(t)$，…，$x^{(m)}(t)$ 线性无关。反之亦对。

上述定义对于纯量函数亦适用。

**例 1** 纯量函数组

$$\sin^2 t,\ \cos^2 t,\ \cos 2t$$

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上线性相关，因为取 $c_1=1,c_2=-1,c_3=1$，便成立恒等式

$$c_1\sin^2 t+c_2\cos^2 t+c_3\cos 2t\equiv 0.$$

**例 2** 纯量函数组