第 4 篇　机械设计力学基础

主　编　周康年
编写人　周康年
　　　　曹俊南
　　　　鄂中凯

第 1 版

机械设计力学基础

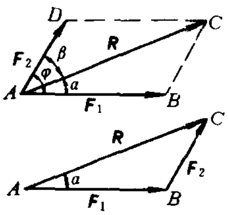
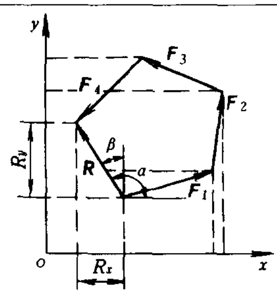
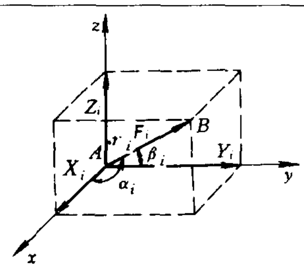
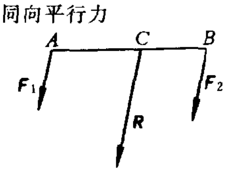
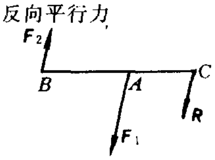
主 编 陶学文
副主编 周康年
编写人 周康年 丁耀武 栢纯清
曹俊南 刘乃积
审稿人 褚宗良 王崇宇

第 1 章　静力学、运动学和动力学

1　静力学

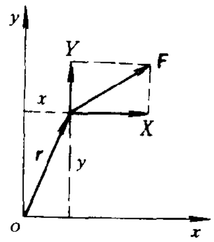
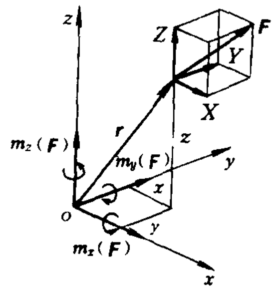
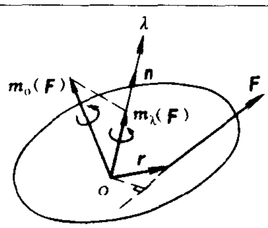
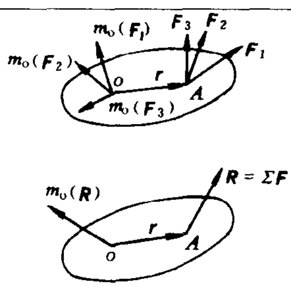
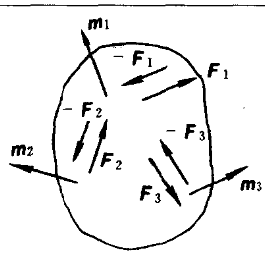
1.1　力的合成与分解(见表 4.1-1)

表 4.1-1　力的合成和分解

力系条件	图　示	计　算　公　式	说　明
二汇交力的合成和分解		合力 $\boldsymbol{R}$ 的大小： $R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\varphi}$ 合力 $\boldsymbol{R}$ 的方向： $\sin\alpha=\frac{F_2\sin\varphi}{R}$ $\sin\beta=\frac{F_1\sin\varphi}{R}$	合力矢可用平行四边形对角线或力三角形封闭边 AC 表示 任何力 $\boldsymbol{R}$ 可在其平面内分解成任意方向的两个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$
平面汇交力沿坐标轴的分解和合成		合力 $\boldsymbol{R}$ 的大小： $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$ $R_x=\sum X_i=\sum F_i\cos\alpha_i$ $R_y=\sum Y_i=\sum F_i\cos\beta_i$ 合力 $\boldsymbol{R}$ 的方向： $\cos\alpha=\frac{R_x}{R},\cos\beta=\frac{R_y}{R}$	合力 $\boldsymbol{R}$ 在 x、y 轴上的投影 R_x、R_y 等于各分力在同一坐标轴上的投影的代数和 $\sum X_i$、$\sum Y_i$
空间汇交力沿坐标轴的分解和合成		合力 $\boldsymbol{R}$ 的大小： $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$ $R_x=\sum X_i=\sum F_i\cos\alpha_i$ $R_y=\sum Y_i=\sum F_i\cos\beta_i$ $R_z=\sum Z_i=\sum F_i\cos\gamma_i$ 合力 $\boldsymbol{R}$ 的方向： $\cos\alpha=\frac{R_x}{R},\cos\beta=\frac{R_y}{R},\cos\gamma=\frac{R_z}{R}$	各分力 $\boldsymbol{F}_i$ 在坐标轴上的投影 X_i、Y_i、Z_i 的代数和 $\sum X_i$、$\sum Y_i$、$\sum Z_i$ 等于合力 $\boldsymbol{R}$ 在相应的轴上的投影 R_x、R_y、R_z α_i、β_i、γ_i 分别为分力 F_i 与 x、y、z 轴的夹角 α、β、γ 分别为合力 $\boldsymbol{R}$ 与 x、y、z 轴的夹角
二平行力的合成和分解	(1)同向平行力  (2)反向平行力 	(1)合力 $\boldsymbol{R}$ 的大小：$R=F_1+F_2$ 合力 $\boldsymbol{R}$ 的方向与 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 同向，作用点 C 内分 AB，C 点到力的距离与力的大小成反比，即 $\frac{AC}{BC}=\frac{F_2}{F_1}$ (2)合力 $\boldsymbol{R}$ 的大小：$R=F_1-F_2$ 合力 $\boldsymbol{R}$ 的方向与较大的 F_1 同向作用点 C 外分 AB，C 点到力的距离与力的大小成反比，即 $\frac{AC}{BC}=\frac{F_2}{F_1}$	利用力与作用线距离之间的反比关系，可将已知力 $\boldsymbol{R}$ 在同一平面内两个指定作用点沿平行方向分解为 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 由若干个平行力 $\boldsymbol{F}_i$ 组成的平行力系的合力 $\boldsymbol{R}$，大小等于各平行力之和，即 $\boldsymbol{R}=\sum\boldsymbol{F}_i$ 并通过平行力系中心 $r_c=\frac{\sum F_ir_i}{\sum F_i}$

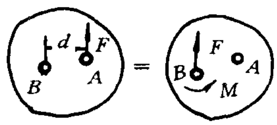
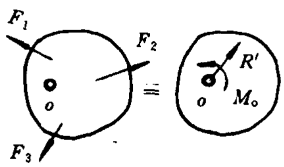
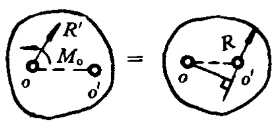
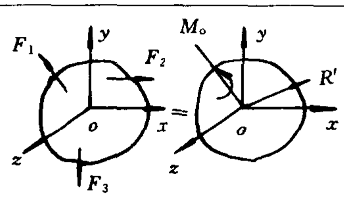
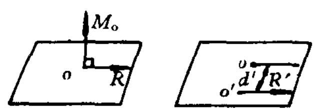
1.2　力矩和力偶矩的计算公式(见表4.1-2)

表4.1-2　力矩和力偶矩的计算公式

类型	图示	计算公式	说明
平面力矩		$m_o(F)=r\times F$ $=(xi+yj)\times(Xi+Yj)$ $=(xY-yX)k$ $=m_z(F)k$	力 F 在作用面内对任一点 O 的矩 $m_o(F)$ 等于其分力对该点的矩的代数和 力对点的矩就是力对通过该点且垂直于作用面的 z 轴的矩
空间力矩		$m_o(F)=r\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$ $=(yZ-zY)i+(zX-xZ)j+(xY-yX)k$ $=m_x(F)i+m_y(F)j+m_z(F)k$ 式中　$m_x(F)=yZ-zY$ $m_y(F)=zX-xZ$ $m_z(F)=xY-yX$	力 F 对空间任一点 O 的矩 $m_o(F)$ 等于其分力对该点的矩之矢量和 力 F 对任一点 O 的矩 $m_o(F)$ 沿通过该点的坐标轴方向的分量，等于力 F 对坐标轴 x、y、z 的矩 $m_x(F)$、$m_y(F)$、$m_z(F)$
力对特定方向的轴的矩		$m_\lambda(F)=(r\times F)\cdot n=\begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$ $=(yZ-zY)\alpha+(zX-xZ)\beta+(xY-yX)\gamma$	力 F 对 λ 轴的矩等于力矩 $m_o(F)$ 沿 λ 方向的投影 式中　$n=\alpha i+\beta j+\gamma k$ 为 λ 方向的单位矢量，α、β、γ 为单位矢量 n 的方向余弦
若干汇交力对点的矩		$m_o(F_1)+m_o(F_2)+m_o(F_3)+\cdots$ $=r\times F_1+r\times F_2+r\times F_3+\cdots$ $=r\times\sum F$ 即　$\sum m_o(F_i)=m_o(R)$	空间汇交力系中各力对任一点 O 的矩的矢量和，等于合力对同一点的矩 平面汇交力系中各力对任一点 O 的矩的代数和，等于合力对同一点的矩
合力偶矩		$M=\sum m_i$	空间合力偶矩为各力偶矩的矢量和；平面合力偶矩为各力偶矩的代数和

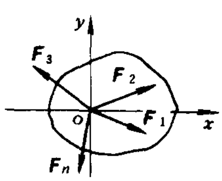
1.3　力的平移与力系简化（见表 4.1-3）

表 4.1-3　力的平移与力系简化

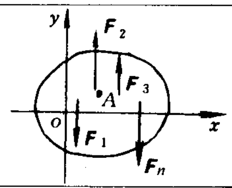
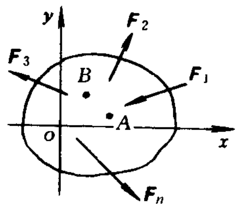
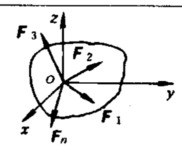
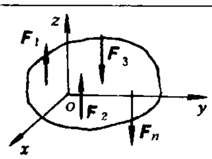
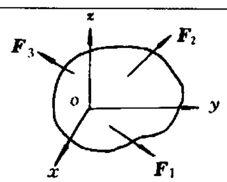
类　型	图　　示	说　　明
力的平移		力的平移定理：把作用在刚体上点 A 的力 $\boldsymbol{F}$ 平行移到任一点 B，但必须附加一个力偶，该附加力偶的矩 M 等于力 $\boldsymbol{F}$ 对 B 点之矩
平面任意力系简化		刚体受一个平面力系 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$…作用，向任一点 O 简化，可得一个力矢 $\boldsymbol{R}'$ 和一个附加平面力偶系，其矩为 M_o，$\boldsymbol{R}$ 称为主矢，M_o 称为主矩 $\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\cdots=\sum\boldsymbol{F}_i$　主矢与简化中心位置无关 $M_o=m_1+m_2+m_3+\cdots=m_o(\boldsymbol{F}_1)+m_o(\boldsymbol{F}_2)+m_o(\boldsymbol{F}_3)+\cdots$ $=\sum m_o(\boldsymbol{F}_i)$　主矩随简化中心的位置不同而变化
		作用于点 O 的力 $\boldsymbol{R}$ 和力偶矩 M_o，可简化为一个作用在点 O' 的合力 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'$，合力作用线到点 O 的距离 $d=M_o/R$
		合力矩定理：平面任意力系的合力对作用面内任一点的矩等于力系中各力对同一点的矩的代数和 $m_o(\boldsymbol{R})=\sum m_o(\boldsymbol{F}_i)$
空间任意力系简化		空间任意力系向任一点 O 简化，可得一力和一力偶，这力等于各力的矢量和 $\boldsymbol{R}'=\sum\boldsymbol{F}_i$，这力偶的矩矢等于各力对点 O 的矩矢的矢量和 $\boldsymbol{M}_o=\sum\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F}_i)$
		当 $R\neq0$，$M_o\neq0$，且 $R\perp M_o$，可简化为一个作用在点 O' 的合力 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'$，合力作用线到 O 点的距离 $d=M_o/R$
		合力矩定理：空间任意力系的合力对任一点的矩等于各分力对同一点的矩的矢量和 $\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{R})=\sum\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F}_i)$ 一空间任意力系的合力对任一轴的矩等于各分力对同一轴的矩的代数和 $m(\boldsymbol{R})=\sum m_z(\boldsymbol{F}_i)$

1.4　平衡方程（见表 4.1-4）

表 4.1-4　平衡方程

力　　系	图　　示	平衡方程和条件
平面汇交力系		$\left.\begin{array}{l}\sum X=0\\ \sum Y=0\end{array}\right\}$

（续）

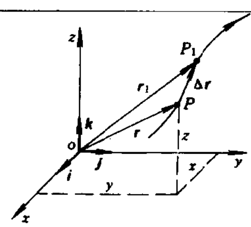
力　　系	图　　示	平 衡 方 程 和 条 件
平面平行力系		可用下列任一组方程 $\left.\begin{array}{l}\sum Y=0\\ \sum m_o=0\end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l}\sum m_o=0\\ \sum m_A=0\end{array}\right\}$（任意矩心 O、A 连线不能与力平行）
平面任意力系		可用下列任一组方程 $\left.\begin{array}{l}\sum X=0\\ \sum Y=0\\ \sum m_o=0\end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l}\sum X=0\\ \sum m_o=0\\ \sum m_A=0\end{array}\right\}$（任意矩心 O、A 连线不能与力的投影轴垂直） 或 $\left.\begin{array}{l}\sum m_o=0\\ \sum m_A=0\\ \sum m_B=0\end{array}\right\}$（任意矩心 O、A、B 三点不能在一直线上）
空间汇交力系		$\left.\begin{array}{l}\sum X=0\\ \sum Y=0\\ \sum Z=0\end{array}\right\}$
空间平行力系		$\left.\begin{array}{l}\sum Z=0\\ \sum m_x=0\\ \sum m_y=0\end{array}\right\}$
空间任意力系		$\left.\begin{array}{l}\sum X=0\\ \sum Y=0\\ \sum Z=0\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\sum m_x=0\\ \sum m_y=0\\ \sum m_z=0\end{array}\right\}$

2　运动学

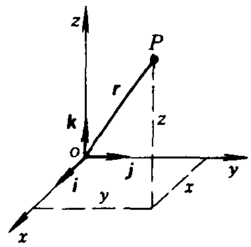
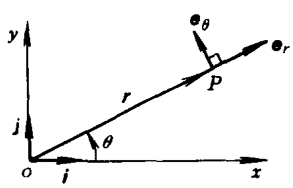
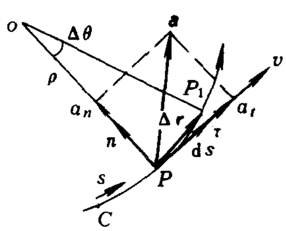
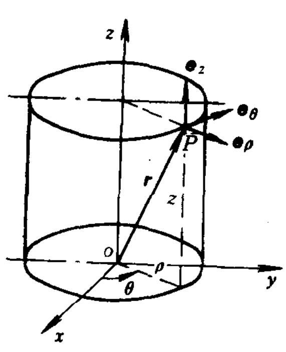
2.1　质点运动的位置、速度和加速度计算公式

2.1.1　质点运动的矢量与坐标表示（见表 4.1-5）

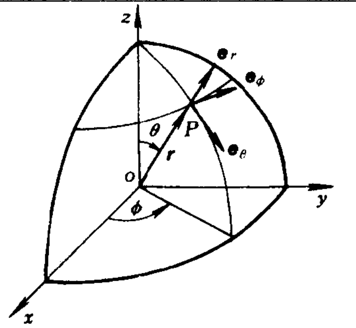
表 4.1-5　质点运动的矢量与坐标表示

矢量、坐标名称（坐标轴，单位矢量）	图　　示	位置、速度和加速度
矢　　量		位矢　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 速度　$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 加速度　$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

（续）

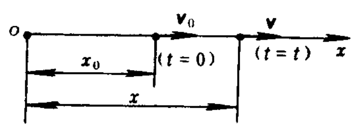
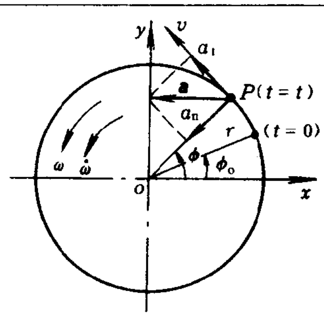
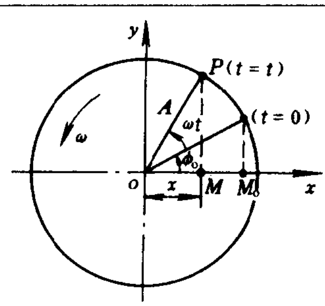
矢量、坐标名称（坐标轴、单位矢量）	图　示	位置、速度和加速度
直角坐标（$x,y,z;\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$）		位置　$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$ 速度　$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{i}+v_z\boldsymbol{k}$ $v_x=\frac{dx}{dt},v_y=\frac{dy}{dt},v_z=\frac{dz}{dt}$ 速度大小　$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ 速度方向　$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{v},\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{v},\cos(\boldsymbol{v}、\boldsymbol{k})=\frac{v_z}{v}$ 加速度　$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{i}+a_z\boldsymbol{k}$ $a_x=\frac{d^2x}{dt^2},a_y=\frac{d^2y}{dt^2},a_z=\frac{d^2z}{dt^2}$ 加速度大小　$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ 加速度方向　$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=\frac{a_x}{a},\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{a},\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})=\frac{a_z}{a}$
平面极坐标（$r,\theta;\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$）		位置　$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$ 速度　$\boldsymbol{v}=v_r\boldsymbol{e}_r+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ $v_r=\frac{dr}{dt},v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}$ 加速度　$\boldsymbol{a}=a_r\boldsymbol{e}_r+a_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ $a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,a_\theta=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$
本性坐标（$\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$）		位移　$d\boldsymbol{r}=ds\boldsymbol{\tau}$ 速度　$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}$ 加速度　$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n=a_\tau\boldsymbol{\tau}+a_n\boldsymbol{n}$ 切向加速度　$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$ 法向加速度　$a_n=\frac{v^2}{\rho}$ 全加速度　$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$ 它与法线的夹角正切　$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\lvert a_\tau\rvert}{a_n}$
柱坐标（$\rho,\theta,z;\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_z$）		位置　$\boldsymbol{r}=\rho\,\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z$ 速度　$\boldsymbol{v}=v_\rho\boldsymbol{e}_\rho+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta+v_z\boldsymbol{e}_z$ $v_\rho=\frac{de}{dt}$ $v_\theta=\rho\frac{d\theta}{dt}$ $v_z=\frac{dz}{dt}$ 加速度　$\boldsymbol{a}=a_\rho\boldsymbol{e}_\rho+a_\theta\boldsymbol{e}_\theta+a_z\boldsymbol{e}_z$ $a_\rho=\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ $a_\theta=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ $a_z=\frac{d^2z}{dt^2}$

（续）

矢量、坐标名称（坐标轴，单位矢量）	图　　　示	位置、速度和加速度
球坐标 $(r,\theta,\phi;\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\phi)$		位置　$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$ 速度　$\boldsymbol{v}=v_r\boldsymbol{e}_r+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta+v_\phi\boldsymbol{e}_\phi$ $v_r=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},v_\theta=r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},v_\phi=r\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\sin\theta$ 加速度　$\boldsymbol{a}=a_r\boldsymbol{e}_r+a_\theta\boldsymbol{e}_\theta+a_\phi\boldsymbol{e}_\phi$ $a_r=\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-r\left(\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2\sin^2\theta$ $a_\theta=r\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-r\left(\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2\sin\theta\cos\theta$ $a_\phi=r\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\sin\theta+2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\sin\theta+2r\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta$

2.1.2　质点运动的几种简单情形（见表 4.1-6）

表 4.1-6　质点运动的几种简单情形

质点运动类型	图　　　示	位置、速度和加速度等
直线运动		匀速运动（$a=0,v=$常数） $x=x_0+vt$ 匀变速运动（$a=$常数） $v=v_0+at,x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2,$ $v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$ 一般变速运动 （1）运动方程 $x=f(t)$已知时 $v=\dot{x},a=\ddot{x}$ （2）加速度 $a=f(t)$已知时 $v=v_0+\int_0^t a\mathrm{d}t,\ x=x_0+\int_0^t v\mathrm{d}t$
圆周运动		弧长　$s=r\phi=r(\omega t+\phi_0)$ 速度　$v=r\omega$ 切线加速度　$a_t=r\dot{\omega}$ 法线加速度　$a_n=r\omega^2=\dfrac{v^2}{r}$ 式中　ϕ_0—初始角 r—圆半径 ω—角速度 $\dot{\omega}$—角加速度
简谐运动		运动方程　$x=A\cos(\omega t+\phi_0)$ 速度　$v=\dot{x}=-A\omega\sin(\omega t+\phi_0)$ 加速度　$a=\ddot{x}=-A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)$ 周期　$T=2\pi/\omega$　s 频率　$f=1/T=\omega/2\pi$　Hz 式中　A—振幅，动点 M 距 O 的最大距离 ϕ_0—初相位角 ω—角频率 $\omega t+\phi_0$—相位角

2.1.3　点的合成运动(见表 4.1-7)

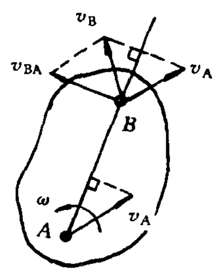
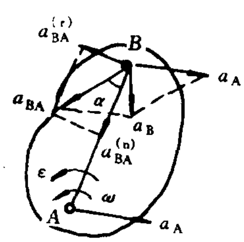
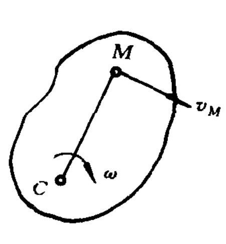
表 4.1-7　点的合成运动

合成名称	计算公式	说明
点的速度合成定理	$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$	绝对速度$\boldsymbol{v}_a$:动点相对于定参考系运动的速度 相对速度$\boldsymbol{v}_r$:动点相对于动参考系运动的速度 牵连速度$\boldsymbol{v}_e$:动参考系上与动点相重合的那一点相对于定参考系运动的速度
点的加速度合成定理	$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_k$	绝对加速度 $\boldsymbol{a}_a$:动点相对于定参考系运动的加速度 相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$:动点相对于动参考系运动的加速度 牵连加速度 $\boldsymbol{a}_e$:动参考系上与动点相重合的那一点相对于定参考系运动的加速度 科氏加速度 $\boldsymbol{a}_k$:由于牵连运动为转动,牵连运动和相对运动相互影响而出现的附加的加速度 $\boldsymbol{a}_k=2\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{v}_r$ 当动参考系作平动或 $\boldsymbol{\omega}_e$ 与$\boldsymbol{v}_r$平行时,$\boldsymbol{a}_k=0$

2.2　刚体运动的速度和加速度计算公式

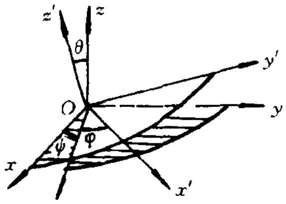
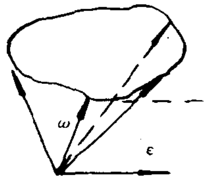
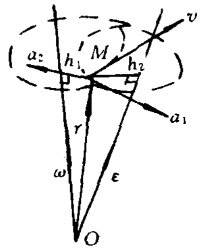
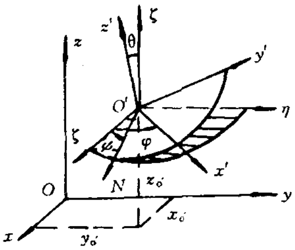
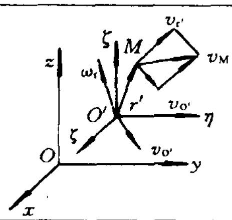
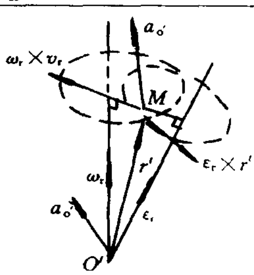
2.2.1　刚体的平面运动(见表 4.1-8)

表 4.1-8　刚体作平面运动的速度、加速度计算公式

方法	图示	平面内各点的速度、加速度	说明
基点法		$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}$ $v_{BA}=AB\cdot\omega$ $(\boldsymbol{v}_B)_{AB}=(\boldsymbol{v}_A)_{AB}$	平面运动可分解为:随同基点 A 的平动(牵连运动)和绕基点 A 的转动(相对运动) 点 B 的牵连速度等于基点的速度 v_A 点 B 的相对速度 v_{BA}是平面图形绕 A 点转动时点 B 的速度
		$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^{(\tau)}+\boldsymbol{a}_{BA}^{n}$ $a_{BA}^{(\tau)}=AB\cdot\varepsilon$ $a_{BA}^{(n)}=AB\cdot\omega^2$ $a_{BA}=AB\ \sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$ $\mathrm{tg}\alpha=a_{BA}^{(\tau)}/a_{BA}^{(n)}$	点 B 的绝对加速度等于基点的加速度(牵连加速度)与该点绕基点转动的切向加速度和法向加速度(相对加速度)的矢量和
瞬心法		$v_M=CM\cdot\omega$	平面图形内某一瞬时绝对速度等于零的点称为该瞬时速度中心,简称为速度瞬心 平面图形的运动可看成为绕速度瞬心作瞬时转动 平面图形上任一点 M 的速度 v_M 垂直于 M 与速度瞬心 C 两点的连线,指向图形转动的方向

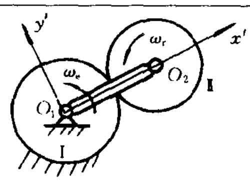
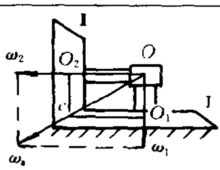
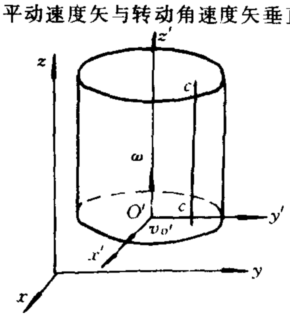
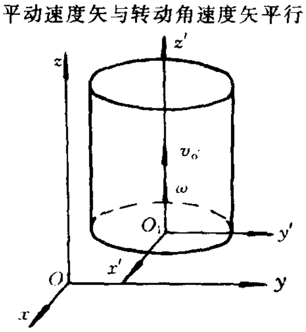
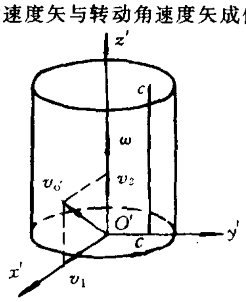
2.2.2　刚体绕定点运动和自由刚体运动（见表 4.1-9）

表 4.1-9　刚体绕定点运动和自由刚体运动

	图　　示	运动方程、速度、加速度	说　　明
刚体绕定点运动		$\psi=f_1(t)$ $\theta=f_2(t)$ $\varphi=f_3(t)$	绕定点运动的刚体用三个欧拉角决定其位置，即进动角 ψ、章动角 θ、自转角 φ
		$\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ $\varepsilon=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$	瞬时角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 与瞬轴重合，指向按右手螺旋规则确定，瞬轴的位置在运动中是变化的 角加速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 不重合，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 的方向沿着角速度矢 $\boldsymbol{\omega}$ 的矢端曲线的切线
		$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$	刚体内任一点的速度等于绕瞬时轴转动时角速度与矢径的矢量积 加速度等于绕瞬时轴的向心加速度与绕角加速度矢的转动加速度的矢量和 $\boldsymbol{a}_1$ 为转动加速度，它的大小为 $\varepsilon\cdot h_2$，方向垂直于 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{a}_2$ 为向心加速度，它的大小为 $\omega^2\cdot h_1$，方向垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}$
自由刚体的运动		$x_{o'}=f_1(t)$，　$\psi=f_4(t)$ $y_{o'}=f_2(t)$，　$\theta=f_5(t)$ $z_{o'}=f_3(t)$，　$\varphi=f_6(t)$	自由刚体的运动可分解为随基点 O' 的平动和绕基点的转动
		$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_{o'}+\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{r}'$	$\boldsymbol{v}_{o'}$ 为基点 O' 的速度，$\boldsymbol{r}'$ 为基点到 M 点的矢径 $\boldsymbol{\omega}_r$ 为刚体绕基点转动的瞬时角速度矢
		$\boldsymbol{a}_M=\boldsymbol{a}_{o'}+\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_r\times\boldsymbol{r}'$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{v}_r$	$\boldsymbol{a}_{o'}$ 为基点 O' 的加速度 $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 为刚体绕基点 O' 转动的瞬时角加速度矢

2.2.3　刚体运动的合成(见表4.1-10)

表4.1-10　刚体运动的合成

合成类型	图示	速度和加速度	说明
平动与平动合成		$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$	合成运动仍为平动，合成运动的速度和加速度分别等于两个平动速度的矢量和和加速度的矢量和
绕两个平行轴转动的合成		$\omega_a=\omega_r+\omega_e$	合成运动为绕瞬时轴的转动。瞬时轴与这两轴平行，并在同一平面内，轴的位置在较大的角速度的一侧。合成转动的角速度等于绕两平行轴转动的角速度的代数和
绕相交轴转动的合成		$\boldsymbol{\omega}_a=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$	合成运动为绕通过该点的瞬时轴的转动，其角速度等于绕各轴转动的角速度的矢量和
平动与转动的合成	平动速度矢与转动角速度矢垂直 	$O'c=\frac{v_{O'}}{\omega}$ $\boldsymbol{\omega}_a=\boldsymbol{\omega}$	刚体作平面运动，可看成绕瞬时转动轴 cc 转动，它与轴 z' 平行，线段 $O'c$ 与速度 $\boldsymbol{v}_{O'}$ 垂直 绕瞬时轴转动的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_a$
	平动速度矢与转动角速度矢平行 	$p=\frac{v_{O'}}{\omega}=\frac{ds}{d\varphi}$	刚体作螺旋运动 p 为螺旋运动的螺旋率 s 为螺距
	平动速度矢与转动角速度矢成任意角 	$\boldsymbol{v}_{O'}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$	刚体作瞬时螺旋运动 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 垂直，$\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行，刚体以速度 $\boldsymbol{v}$ 的平动和以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的转动，可以合成为绕瞬时轴 cc 的转动。所以刚体的运动成为以 $\boldsymbol{v}_2$ 的平动和以 $\boldsymbol{\omega}$ 绕瞬时轴 cc 的转动的合成运动

3 动力学

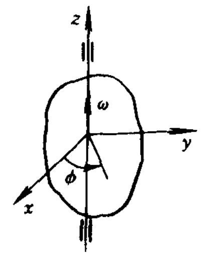
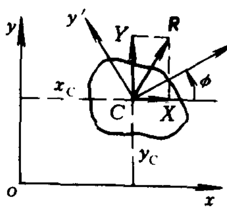
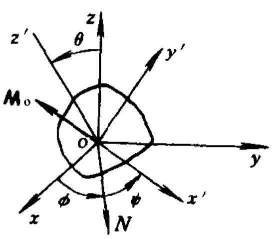
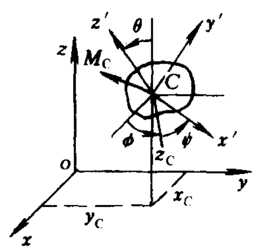
3.1 质点和质点系动力学基本公式(见表4.1-11)

表4.1-11 质点和质点系动力学基本公式

名称	基本公式	说明
牛顿第二定律	在直角坐标轴上的投影 $ma_x=\sum X_i$ $ma_y=\sum Y_i$ $ma_z=\sum Z_i$	m—质量,对于质点系 $m=\sum m_i$ a_x、a_y、a_z—加速度在 x、y、z 轴上的投影 X_i、Y_i、Z_i—各外力在 x、y、z 轴上的投影
	在自然轴上的投影 $ma_\tau=\sum F_{\tau i}$ $ma_n=\sum F_{ni}$ $O=\sum F_{bi}$	a_τ、a_n—加速度在切线、主法线上的投影 $a_\tau=\frac{dv}{dt}$,$a_n=\frac{v^2}{\rho}$, ρ 为轨迹的曲率半径 $F_{\tau i}$、F_{ni}、F_{bi}—各外力在切线、主法线和副法线上的投影
动量定理	$m(v_x-v_{0x})=\sum S_x$ $m(v_y-v_{0y})=\sum S_y$ $m(v_z-v_{0z})=\sum S_z$	v_x、v_y、v_z—速度在 x、y、z 轴上的投影 v_{0x}、v_{0y}、v_{0z}—初始时刻速度在 x、y、z 轴上的投影 S_x、S_y、S_z— 外力在时间 t 内的冲量 $S=\int_0^t \boldsymbol{F}dt$ 在 x、y、z 轴上的投影
动量守恒定律	$mv_x=mv_{0x}=$常量	质点系上的外力主矢在某一坐标轴上的投影等于零,则质点系的动量在该坐标轴的投影不变
动量矩定理	$\sum \frac{d}{dt}L_z(m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum M_z(F_i)$	$\sum L_z(m_i\boldsymbol{v}_i)$ 为质点系对于某定轴 z 的动量矩 转动物体的动量矩等于 $J_z\omega$,J_z 为物体对 z 轴的转动惯量 $\sum M_z(F_i)$为作用于质点系的外力对同一轴的矩的代数和
动量矩守恒定律	$\sum L_z(m_i\boldsymbol{v}_i)=$常量	当外力对于某定轴 z 的力矩代数和等于零,质点系对于该轴的动量矩保持不变
动能定理	$E_{k2}-E_{k1}=\sum W_i$	$E_{k2}=\frac{1}{2}mv_2^2$—运动终点的动能 $E_{k1}=\frac{1}{2}mv_1^2$—运动起点的动能 转动物体的动能 $E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$ W 为力的功,$W=FS\cos\theta$ 或 $W=M(\varphi_2-\varphi_1)$ 重力功 $W=mg(z_1-z_2)$,弹力功 $W=\frac{1}{2}k(\delta_1^2-\delta_2^2)$,$k$—刚性系数
机械能守恒定律	$E_k+E_p=$常量	质点系仅在有势力的作用下运动时,其机械能保持不变 E_p 为势能,$E_p=\int_{M_2}^{M_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{M_2}^{M_1}(Xdx+Ydy+Zdz)$ 重力场中势能 $E_p=mg(Z_2-Z_1)$,弹力场中的势能 $E_p=\frac{1}{2}k(\delta_2^2-\delta_1^2)$
碰撞后速度	$v'_1=v_1-(1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)$ $v'_2=v_2+(1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1-v_2)$	v'_1、v'_2—碰撞后两物体速度,v_1、v_2—碰撞开始时两物体速度 k—恢复系数
碰撞中动能损失	$E_{k1}-E_{k2}=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\times(1-k^2)(v_1-v_2)^2$	

3.2　刚体的运动方程和动能(见表 4.1-12)

表 4.1-12　刚体的运动方程和动能

运动名称	图　　示	运动方程和动能表达式
定轴转动		定轴转动的运动方程　$J_z\dot{\omega}=J_z\ddot{\phi}=M_z$ 动能　$E_k=\frac{1}{2}J_z\omega^2=\frac{1}{2}J_z\dot{\phi}^2$
平面运动		质心运动方程　$\left.\begin{array}{l}M\ddot{x}_C=X\\ M\ddot{y}_C=Y\end{array}\right\}$ 绕质心转动的运动方程　$J_C\dot{\omega}=J_C\ddot{\phi}=M_C$ 动能　$E_k=\frac{1}{2}M(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+\frac{1}{2}J_C\dot{\phi}^2$ 式中　X、Y—合力 $\boldsymbol{R}$ 的 x、y 轴分量,M_C—外力对质心 C 的主矩,J_C—刚体对通过质心 C 的 z 轴的转动惯量
定点转动		绕定点 o 转动的运动方程(欧拉动力学方程) $\left.\begin{array}{l}J_{x'}\dot{\omega}_{x'}+(J_{z'}-J_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'}=M_{x'}\\ J_{y'}\dot{\omega}_{y'}+(J_{x'}-J_{z'})\omega_{z'}\omega_{x'}=M_{y'}\\ J_{z'}\dot{\omega}_{z'}+(J_{y'}-J_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'}=M_{z'}\end{array}\right\}$ 动能　$E_k=\frac{1}{2}(J_{x'}\omega_{x'}^2+J_{y'}\omega_{y'}^2+J_{z'}\omega_{z'}^2)$ $=\frac{1}{2}[J_{x'}(\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi)^2+$ $J_{y'}(\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi)^2+$ $J_{z'}(\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi})^2]$ 式中　$M_{x'}$、$M_{y'}$、$M_{z'}$—主矩 $\boldsymbol{M}_o$ 的 x'、y'、z' 轴分量 x'、y'、z'—与刚体主轴重合的动坐标轴
自由运动		质心运动方程　$M\ddot{x}_C=X$,　$M\ddot{y}_C=Y$,　$M\ddot{z}_C=Z$ 绕质心转动的运动方程为欧拉动力学方程 动能　$E_k=\frac{1}{2}M(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2+\dot{z}_C^2)+\frac{1}{2}(J_{x'}\omega_{x'}^2+J_{y'}\omega_{y'}^2+J_{z'}\omega_{z'}^2)$ 式中　X、Y、Z—合力 $\boldsymbol{R}$ 的 x、y、z 轴分量 $M_{x'}$、$M_{y'}$、$M_{z'}$—主矩 M_C 的 x'、y'、z' 轴分量

3.3　转动惯量

刚体绕 z 轴转动的转动惯量

$$J_z=\sum r_i^2m_i=\int r^2\mathrm{d}m=i_z^2m$$

其中　$i_z=\sqrt{\frac{J_z}{m}}$ 为惯性半径。

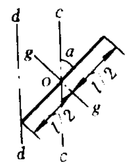
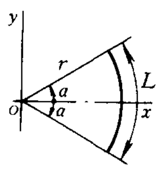
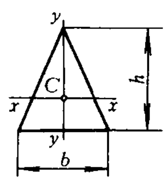
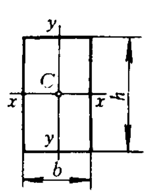
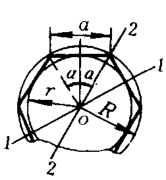
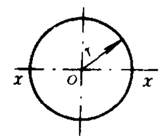
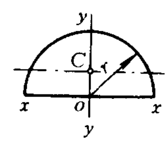
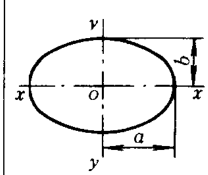
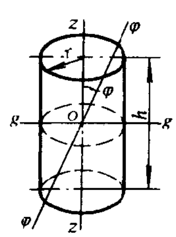
转动惯量的平行移轴公式为

$$J_z=J_{z_c}+md^2$$

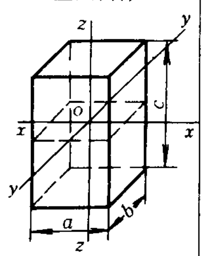
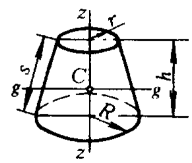
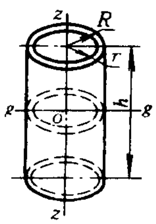
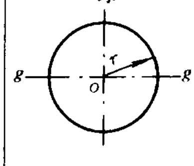
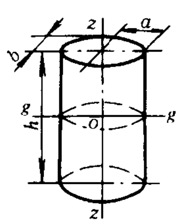
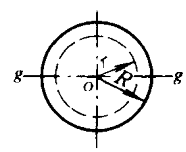
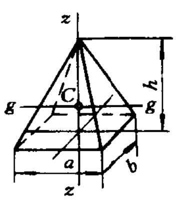
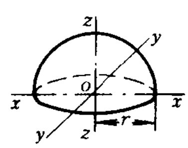
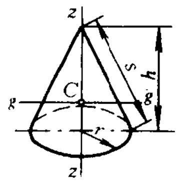
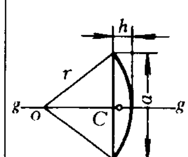
其中　J_{z_c} 为通过质心轴 z_c 的转动惯量,J_z 为通过与 z_c 平行的 z 轴的转动惯量,d 为 z 轴与 z_c 轴之间的距离。

常用的均质物体的转动惯量见表 4.1-13。

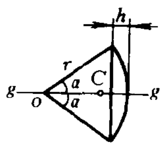
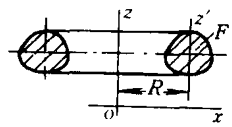
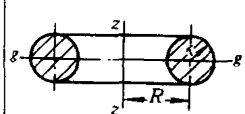
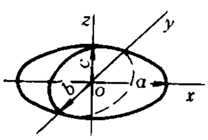
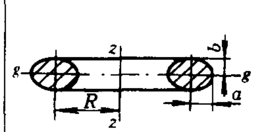
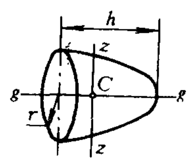
表 4.1-13　均质物体的转动惯量

序号	图　　形	转　动　惯　量
1	直　线 	$J_g=\rho_l\dfrac{l^3}{12}=M\dfrac{l^2}{12}$ $J_C=\rho_l\dfrac{l^3\sin^2\alpha}{12}=M\dfrac{l^2\sin^2\alpha}{12}$ $J_d=\rho_l\dfrac{l^3\sin^2\alpha}{3}=M\dfrac{l^2\sin^2\alpha}{3}$
2	圆弧线 	$L=2ar$ $J_x=\rho_l\dfrac{r^3}{2}(2\alpha-\sin2\alpha)$ $=M\dfrac{r^2}{2}\left(1-\dfrac{\sin2\alpha}{2\alpha}\right)$ $J_y=\rho_l\dfrac{r^3}{2}(2\alpha+\sin2\alpha)$ $=M\dfrac{r^2}{2}\left(1+\dfrac{\sin2\alpha}{2\alpha}\right)$ $J_O=\rho_l r^3 2\alpha=Mr^2$
3	等腰三角形 	$A=\dfrac{bh}{2}$ $J_x=\rho_A\dfrac{bh^3}{36}=M\dfrac{h^2}{18}$ $J_y=\rho_A\dfrac{hb^3}{48}=M\dfrac{b^2}{24}$ $J_C=\rho_A\dfrac{bh(4h^2+3b^2)}{144}$ $=M\dfrac{4h^2+3b^2}{72}$
4	矩形 	$A=bh$ $J_x=\rho_A\dfrac{bh^3}{12}=M\dfrac{h^2}{12}$ $J_y=\rho_A\dfrac{hb^3}{12}=M\dfrac{b^2}{12}$ $J_C=\rho_A\dfrac{bh(b^2+h^2)}{12}$ $=M\dfrac{b^2+h^2}{12}$
5	n 边正多边形 	$A=\dfrac{a^2n}{4\tan\alpha}=\dfrac{nar}{2}$ $J_1=J_2=\rho_A\dfrac{nar}{48}(6R^2-a^2)$ $=\dfrac{M}{24}(6R^2-a^2)$ $=\dfrac{M}{48}(12r^2+a^2)$ $J_O=\rho_A\dfrac{nar}{24}(6R^2-a^2)$ $=\dfrac{M}{12}(6R^2-a^2)$ $=\dfrac{M}{24}(12r^2+a^2)$
6	圆 	$A=\pi r^2$ $J_x=\rho_A\dfrac{\pi}{4}r^4=M\dfrac{r^2}{4}$ $J_O=\rho_A\dfrac{\pi}{2}r^4=M\dfrac{r^2}{2}$
7	半　圆 	$A=\dfrac{\pi}{2}r^2$ $J_x=J_y=\rho_A\dfrac{\pi}{8}r^4=M\dfrac{r^2}{8}$ $J_O=\rho_A\dfrac{\pi}{4}r^4=M\dfrac{r^2}{2}$
8	椭　圆 	$A=\pi ab$ $J_x=\rho_A\dfrac{\pi}{4}ab^3=M\dfrac{b^2}{4}$ $J_y=\rho_A\dfrac{\pi}{4}ba^3=M\dfrac{a^2}{4}$ $J_O=\rho_A\dfrac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$ $=M\dfrac{a^2+b^2}{4}$
9	正 圆 柱  正圆柱侧面积	$V=\pi r^2h$ $J_z=\rho\dfrac{\pi r^4h}{2}=M\dfrac{r^2}{2}$ $J_g=\rho\dfrac{\pi r^2h}{12}(3r^2+h^2)$ $=M\dfrac{3r^2+h^2}{12}$ $J_\varphi=\rho\dfrac{\pi r^2h}{12}[3r^2(1+\cos^2\varphi)$ $+h^2\sin^2\varphi]$ $=M\dfrac{1}{12}[3r^2(1+\cos^2\varphi)$ $+h^2\sin^2\varphi]$ $A=2\pi rh$ $J_z=\rho_A 2\pi r^3h=Mr^2$ $J_g=\rho_A\dfrac{\pi rh}{6}(6r^2+h^2)$ $=M\dfrac{1}{12}(6r^2+h^2)$

（续）

序号	图　形	转　动　惯　量	序号	图　形	转　动　惯　量
10	正六面体  正立方体 $(a=b=c)$	$V=abc$ $J_x=\rho\frac{abc}{12}(b^2+c^2)=M\frac{b^2+c^2}{12}$ $J_y=\rho\frac{abc}{12}(c^2+a^2)=M\frac{c^2+a^2}{12}$ $J_z=\rho\frac{abc}{12}(a^2+b^2)=M\frac{a^2+b^2}{12}$ $J_x=J_y=J_z=\rho\frac{a^5}{6}=M\frac{a^2}{6}$	15	截正圆锥  截正圆锥侧面积	$V=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$ $J_z=\rho\frac{\pi h}{10}\frac{R^5-r^5}{R-r}$ $=M\frac{3}{10}\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$ $A=\pi s(R+r)$ $J_z=\rho_A\frac{\pi s}{2}\frac{R^4-r^4}{R-r}$ $=M\frac{R^2+r^2}{2}$
11	空心正圆柱 	$V=\pi(R^2-r^2)h$ $J_z=\rho\frac{\pi h}{2}(R^4-r^4)=M\frac{R^2+r^2}{2}$ $J_g=\rho\frac{\pi(R^2-r^2)h}{4}\left(R^2+r^2+\frac{h^2}{3}\right)$ $=M\frac{1}{4}\left(R^2+r^2+\frac{h^2}{3}\right)$	16	球  球　面	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ $J_g=\rho\frac{8\pi}{15}r^5=M\frac{2}{5}r^2$ $A=4\pi r^2$ $J_g=\rho_A\frac{8\pi}{3}r^4=M\frac{2r^2}{3}$
12	正椭圆柱 	$V=\pi abh$ $J_z=\rho\frac{\pi abh}{4}(a^2+b^2)$ $=M\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ $J_g=\rho\frac{\pi abh}{12}(3b^2+h^2)$ $=M\frac{1}{12}(3b^2+h^2)$	17	空 心 球 	$V=\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$ $J_g=\rho\frac{8\pi}{15}(R^5-r^5)$ $=M\frac{2}{5}\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
13	正四角锥 	$V=\frac{abh}{3}$ $J_z=\rho\frac{abh}{60}(a^2+b^2)$ $=\frac{M}{20}(a^2+b^2)$ $J_g=\rho\frac{abh}{60}\left(b^2+\frac{3h^2}{4}\right)$ $=\frac{M}{20}\left(b^2+\frac{3h^2}{4}\right)$	18	半　球 	$V=\frac{2}{3}\pi r^3$ $J_x=J_y=J_z=\rho\frac{4\pi}{15}r^5=M\frac{2r^2}{5}$
14	正 圆 锥  正圆锥侧面积	$V=\frac{\pi r^2 h}{3}$ $J_z=\rho\frac{\pi r^4 h}{10}=M\frac{3r^2}{10}$ $J_g=\rho\frac{\pi r^2 h}{20}\left(r^2+\frac{h^2}{4}\right)$ $=M\frac{3}{20}\left(r^2+\frac{h^2}{4}\right)$ $A=\pi rs=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ $J_z=\rho\frac{\pi r^3\sqrt{r^2+h^2}}{2}=M\frac{r^2}{2}$	19	截　球 	$V=\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$ $J_g=\rho\frac{\pi h^3}{30}(20r^2-15rh+3h^2)$ $=M\frac{h}{10}\frac{20r^2-15rh+3h^2}{3r-h}$

（续）

序号	图　　形	转　动　惯　量	序号	图　　形	转　动　惯　量
20	球面圆锥 	$V=\frac{2\pi r^2h^2}{3}$ $J_g=\rho\frac{2\pi r^2h^2}{15}(3r-h)$ $=M\frac{h}{5}(3r-h)$ $=M\frac{r^2}{5}(1-\cos\alpha)(2+\cos\alpha)$	23	环形体 （截面与 z' 轴对称） 	$J_z=\rho 2\pi R(FR^2+3J_{z'(F)})$ $J_x=\rho\cdot\pi R(FR^2+3J_{z'(F)}+2J_{x(F)})$ 式中　$J_{z'(F)}$和 $J_{x(F)}$为截面积 F 对轴 z'和轴 x 的转动惯量
21	圆截面环形体 	$V=2\pi^2Rr^2$ $J_x=\rho\frac{\pi^2Rr^2}{2}(4R^2+3r^2)$ $=M\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right)$ $J_g=\rho\frac{\pi^2Rr^2}{4}(4R^2+5r^2)$ $=M\left(\frac{R^2}{2}+\frac{5}{8}r^2\right)$	24	椭球体 	$V=\frac{4}{3}\pi abc$ $J_x=\rho\frac{4}{15}\pi abc(b^2+c^2)$ $=M\frac{1}{5}(b^2+c^2)$ $J_y=\rho\frac{4}{15}\pi abc(c^2+a^2)$ $=M\frac{1}{5}(c^2+a^2)$ $J_z=\rho\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2)$ $=M\frac{1}{5}(a^2+b^2)$
22	椭圆截面环形体 	$V=2\pi^2abR$ $J_z=\rho\frac{\pi^2Rab}{2}(4R^2+3a^2)$ $=M\left(R^2+\frac{3}{4}a^2\right)$ $J_g=\frac{\pi^2Rab}{4}(4R^2+3a^2+2b^2)$ $=M\left(\frac{R^2}{2}+\frac{3a^2}{8}+\frac{b^2}{4}\right)$	25	抛物线旋转体 	$V=\frac{\pi hr^2}{2}$ $J_g=\rho\frac{\pi hr^4}{6}=M\frac{r^2}{3}$ $J_z=\rho\frac{\pi hr^2}{36}(3r^2+h^2)$ $=M\frac{3r^2+h^2}{18}$

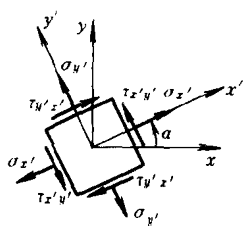
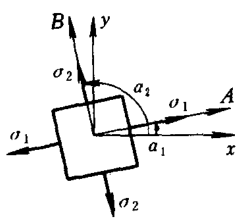
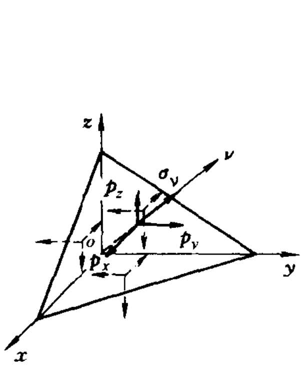
注：A—面积；V—体积；$J_x,J_y,J_z,J_1,J_2,J_g,J_\varphi$—分别为对 $x,y,z,1,2,g,\varphi$ 轴的转动惯量；J_O,J_C—分别为对 O,C 点的转动惯量；ρ_l,ρ_A,ρ—分别为线密度，面密度和体密度；M—总质量。

第 2 章　弹性力学和塑性力学

1　应力分析

1.1　应力分析表达式(见表 4.2-1)

表 4.2-1　应力分析表达式

名称	图　示	表　达　式	说　明
二向应力状态		应力分量的坐标变换 $\sigma_{x'}=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos2\alpha+\tau_{xy}\sin2\alpha$ $\sigma_{y'}=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)-\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos2\alpha-\tau_{xy}\sin2\alpha$ $\tau_{x'y'}=-\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin2\alpha+\tau_{xy}\cos2\alpha$	
		主应力 $\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$ 主应力方向 $\tan\alpha_1=\frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau_{xy}},\tan\alpha_2=\frac{\tau_{xy}}{\sigma_2-\sigma_y}$	σ_1 与 x 轴的夹角为 α_1 σ_2 与 x 轴的夹角为 α_2
		主切应力 $\tau_3=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$	发生在与主应力方向成45°的斜面上
三向应力状态		斜面应力 $\left.\begin{matrix}p_x=l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}\\ p_y=l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{zy}\\ p_z=l\tau_{xz}+m\tau_{yz}+n\sigma_z\end{matrix}\right\}$ $\sigma_\nu=l^2\sigma_x+m^2\sigma_y+n^2\sigma_z+2lm\tau_{xy}+2mn\tau_{yz}+2nl\tau_{zx}$ $\tau_\nu=\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2-\sigma_\nu^2}$	p_x、p_y、p_z 为斜面上全应力 p 在坐标轴上的投影 l、m、n 为斜面的外法线 ν 的方向余弦 σ_ν 为斜面上正应力 τ_ν 为斜面上切应力
		主应力 $\sigma^3-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma^2+(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2)\sigma-(\sigma_x\sigma_y\sigma_z-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx})=0$	该方程的三个实根 σ_1、σ_2、σ_3 即该点的三个主应力