

纵向弯曲与扭转

[苏联] A. H. 金尼克著 謝貽权译

上海科学技术出版社

縱向彎曲与扭轉

〔苏联〕A. H. 金尼克 著

謝貽权 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是苏联科学院院士 A. H. 金尼克在“纵向弯曲与扭转”这一问题的理论和应用方面积累了多年的丰富经验之后才写成的。全书共分三篇。在第一篇中,论述了“纵向弯曲”的理论和应用,主要研究等截面和变截面杆件以及曲杆和杆系的纵向弯曲问题,它是本书的主要部分。在第二篇中,刊载着有关稳定性问题的补充论文,在这些论文中,作者对“纵向弯曲”这一专题进行了更详细的研究,其中有关“极坦拱”的问题在船舶制造方面特别重要。在第三篇中,论述了“扭转”的理论和应用,着重讨论各种不同的解答和方法,对机器制造来说,这是非常重要的问题。

此外,在上述许多问题的探讨中,大都举有实例并加以详细说明。

本书可供从事结构工程、机械工程和船舶制造等工程技术人员以及大专学校师生参考和研究之用。

纵 向 弯 曲 与 扭 转

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ • КРУЧЕНИЕ

原著者 [苏联] A. H. Динник

原出版者 АН СССР • 1955 年版

译者 谢 贻 权

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业许可整出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

大东集成联合印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/18 印张 18 8/18 字数 412,000

1962 年 8 月第 1 版 1962 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—2,000

统一书号: 15119·1676

定 价: (十四) 2.55 元

目 录

第一篇 纵向弯曲(理論和应用)

序言.....	1	§ 30. $m=2$ 的情形	78
第一章 临界力.....	3	§ 31. 实际应用.....	81
§ 1. 平衡的三种形式.....	3	§ 32. $m=3$ 的情形	82
§ 2. 稳定的分析准则.....	3	§ 33. $m=4$ 的情形	84
§ 3. 临界力.....	4	§ 34. 一般情况.....	85
§ 4. 彈性系統的临界力.....	6	§ 35. 双曲綫規律.....	86
§ 5. 临界力存在的准则.....	7	§ 36. 慣矩按指数規律变化.....	86
§ 6. 临界力的求法.....	8	§ 37. 梯級杆件.....	88
§ 7. 各种方法的比較.....	23	§ 38. 正弦和余弦支柱.....	90
参考文献.....	24	§ 39. 二項式关系的情形.....	92
第二章 等截面直杆的纵向弯曲.....	25	§ 40. 橢圓体柱.....	94
§ 8. 欧拉問題.....	25	§ 41. 曲綫或多边形外形的組合柱.....	95
§ 9. 彈性支座的情形.....	27	§ 42. 不对称柱.....	97
§ 10. 空間弯曲綫.....	29	§ 43. I_0 的影响	98
§ 11. 温度应力所引起的纵向弯曲.....	35	§ 44. 上述理論是否得到实验証明?	98
§ 12. 稳定和不稳定的平衡状态.....	36	§ 45. 确定变截面杆件临界力所用的近	
§ 13. 切力的影响.....	37	似公式.....	99
§ 14. 偏心距、初始弯曲和杆件纵向縮		§ 46. 局部削弱的影响(槽口、鉚釘孔等)...	101
短的影响.....	38	§ 47. 形状最有利的柱子	103
§ 15. 扭矩和杆件繞其軸綫轉动的影响.....	40	参考文献	104
§ 16. 外力超过临界值.....	43	第四章 分布載荷下的纵向弯曲	105
§ 17. 纵向弯曲的精确理論.....	46	§ 48. 分布載荷	105
§ 18. 超过比例极限后的纵向弯曲.....	49	§ 49. 均布載荷	105
§ 19. 实验.....	52	§ 50. 杆件的載荷和剛度按幂次規律变	
§ 20. 經驗公式.....	53	化	107
§ 21. 彈性介质中的纵向弯曲.....	56	§ 51. 均布載荷和集中載荷同时作用	110
§ 22. 彈性支座上的杆件.....	60	§ 52. 多跨度杆件	112
§ 23. 多跨度杆件.....	64	§ 53. 雅辛斯基的問題	113
§ 24. 組合杆件.....	65	§ 54. 两个分布載荷的同时作用	116
§ 25. 具有橫向慣性的組合杆件.....	68	参考文献	118
§ 26. 外力作用在杆件軸綫的不同点上.....	69	第五章 曲杆的纵向弯曲	
参考文献.....	73	圓拱和圓环	119
第三章 变截面杆件.....	75	§ 55. 概述	119
§ 27. 概述.....	75	§ 56. 基尔赫高弗方程	120
§ 28. 問題的提法.....	76	§ 57. 曲綫杆件的微小变形	122
§ 29. $m=1$ 的情形	77	§ 58. 力因素与变位的关系	123

§ 59. 杆件的軸綫在未变形状态中为圓弧	123	§ 72. 三鉸拱	146
§ 60. 圓拱的纵向弯曲	124	§ 73. 单鉸拱	148
§ 61. 圓环的稳定性	125	§ 74. 結果	149
§ 62. 受均布流体靜压力 p 压缩的圓拱	126	§ 75. 載荷状态的影响	149
§ 63. 方向保持指向中心的外力	132	§ 76. 与其他作者的公式以及实验的比較	151
§ 64. 大小和方向都保持不变的外力	134	§ 77. 等强度的拋物綫拱	153
§ 65. 切力的影响	135	§ 78. 頂点向上的悬鏈綫拱等截面	155
§ 66. 变截面圓拱	136	§ 79. 悬鏈綫拱 变截面	157
参考文献	138	§ 80. 螺旋彈簧的纵向弯曲	158
第六章 曲杆的纵向弯曲(續篇)		参考文献	159
拋物綫拱、悬鏈綫拱和螺旋彈簧	139	第七章 杆系的纵向弯曲	161
§ 67. 概述	139	§ 81. 最简单的剛架	161
§ 68. 平衡方程	139	§ 82. 正多边形剛架	164
§ 69. 拱的撓曲軸綫的微分方程及其积分	140	§ 83. 在非对称載荷下的剛架	166
§ 70. 等截面拋物綫双鉸拱 轉动外力的情形	142	§ 84. 多层剛架(图 89)	168
§ 71. 无鉸拋物綫拱	146	§ 85. 平面网架的稳定性	169
		§ 86. 曲綫网架的稳定性	170
		§ 87. 没有弯曲变形的杆系	172
		参考文献	172

第二篇 纵向弯曲的补充論文

第一章 极坦拱的稳定性	173	第二章 端部的彈性固定	
§ 1. 概述	173	对于压杆稳定性的影响	191
§ 2. 正弦曲綫拱	174	第三章 应力大于比例极限时	
§ 3. 拱的推力的确定	175	变截面杆件的稳定性	195
§ 4. 补充說明	177	§ 1. 等截面杆件	195
§ 5. 一般情况	183	§ 2. 变截面杆件	197
§ 6. 拱在丧失稳定性时的两种弯曲型式	185	§ 3. 結果	199
§ 7. 中点有集中載荷 P 的拱	186	§ 4. 对中央截面对称的支柱	201
§ 8. 支座的彈性影响	189	§ 5. 角錐形支柱	202
§ 9. 探討	190	§ 6. 阶梯形支柱	206
§ 10. 結語	190	§ 7. 5号鋼及硅鋼	208
		§ 8. 結語	209

第三篇 扭轉(理論和应用)

序言	211	§ 5. 应力与形变之間的关系	217
第一章 緒論	212	§ 6. 用位移表示的彈性理論方程	218
§ 1. 問題的提法	212	§ 7. 協調方程	219
§ 2. 問題的經過	213	§ 8. 形变位能	220
§ 3. 彈性理論的基本方程	215	§ 9. 圓柱坐标中的彈性理論方程	220
§ 4. 伸长和剪切	216	彈性振動方程	220
		参考文献	222

第二章 方法223

- § 10. 扭转概念的确定223
- § 11. 圆截面杆件223
- § 12. 圣梵南的解答226
- § 13. 圣梵南的半反逆法228
- § 14. 椭圆截面的杆件229
- § 15. 扭转势231
- § 16. 应力函数233
- § 17. 上述方法的比较 整多项式形式的解答234
- § 18. 级数形式的解答235
- § 19. 利用格林函数的解答236
- § 20. 保角映射237
- § 21. 扭转问题解答的计算法241
- § 22. 李勃曼法244
- § 23. 位能法246
- § 24. 里兹法247
- § 25. 伽像金法249
- § 26. 流体动力比拟法249
- § 27. 普朗特比拟法251
- § 28. 普朗特比拟法的进一步发展252
- § 29. 极坐标中的扭转问题253
- § 30. 各种方法比较的评价254

参考文献254

第三章 最主要的结果256

- § 31. 圣梵南的初等解答256
- § 32. 极长的板条257
- § 33. 三角形258
- § 34. 矩形259
- § 35. 薄壁和横轧断面261
- § 36. 正多边形263
- § 37. 扇形264
- § 38. 具有纵向切口的圆轴265
- § 39. 空心杆件268
- § 40. 用于空心杆件的普朗特比拟法269
- § 41. 薄壁管271
- § 42. 用不同材料组成的杆件的扭转273
- § 43. 结语275

参考文献275

第四章 变截面轴 截面固定的影响 曲线杆件277

- § 44. 变截面的圆轴277
- § 45. 圆锥形轴279
- § 46. 轴的直径突变时的应力集中280
- § 47. 圣梵南原理284
- § 48. 一个截面保持为平面的棱柱形杆件的扭转 椭圆截面的情况285
- § 49. 矩形截面的情况288
- § 50. 工字梁290
- § 51. 工字梁的扭转试验292
- § 52. 圆环段的扭转293
- § 53. 螺旋弹簧294
- § 54. 环的扭转295
- § 55. 结语297

参考文献297

第五章 振动299

- § 56. 一端有圆盘的杆件的扭转振动299
- § 57. 瑞雷的修正300
- § 58. 具有两个圆盘的杆件301
- § 59. 具有几个圆盘的杆件的振动302
- § 60. 曲轴的振动303
- § 61. 圆截面杆件的振动304
- § 62. 一端有圆盘的杆件的振动 (精确理论)306
- § 63. 端部有两个圆盘的轴308
- § 64. 粗轴的振动310
- § 65. 简单的特殊情况310
- § 66. 具有自由端和固定端的圆柱体311
- § 67. 空心轴312
- § 68. 圆盘的扭转振动313
- § 69. 曲线杆件的振动 螺旋弹簧315
- § 70. 圆环的扭转振动316
- § 71. 结语317

参考文献318

序 言^①

在工程建筑物和机器中常常可以看到长的压杆,例如桥梁桁架的受压构件、各种支柱(电视塔桅杆)^②和柱子、起重机的臂柱、蒸汽机的活塞杆和连杆、水泵的活塞杆等等。对于这些杆件都必须考虑到纵向弯曲问题。作为建筑物或机器组成部分的个别零件的错误计算必然会导致损坏、事故和灾祸的发生。

由于纵向弯曲,尤其是由于纵向弯曲的错误计算而引起的事故特别多。例如,从1881年到1897年这段时期内的二十四起桥梁灾祸中,就有十六起是由于压杆的纵向弯曲造成的。

1875年,原莫尔山斯克·塞兹兰铁路跨越克夫达河的桥梁发生了倒塌。桥梁系上承式的,跨度约有34米。架设工作结束后不久,当石碴列车通过时,桥梁的两个桁架都弯曲了,桥梁随即坠落到尚未拆除的建筑鹰架上^③。很久以后才由Ф. С. 雅辛斯基查明了倒塌的原因,原来是上弦压杆在垂直桁架平面的方向缺乏稳定性。详细情况可参阅§53。

1907年在奎貝克横跨圣劳倫斯河的伸臂式大桥在修建时就倒塌了。原因也是受压杆件稳定性的不足,对这些杆件的计算作得不正确。计算组合压杆时是按照欧拉的实体杆件公式作出的。根据那个欧拉公式得出的临界力等于88000吨,正确的计算则应考虑到杆件并非实体的而是组合的,发现临界力总共只等于31000吨。这些数值还须减少,因为应力已超过了弹性极限。

组合斜压杆刚度不够是莫兹尔附近普里皮亚特河上的桥梁毁坏的原因。桥梁架设工作结束后,当试验列车第一次行驶时,两根最大的斜压杆(离支座的第二根)就凹向桁架的内侧:一根内凹90厘米,另一根140厘米。桥梁就坠落到建筑鹰架上^④。

1909年,汉堡煤气贮存器的严重事故也是由于一根压杆的纵向弯曲造成的。

我们列举了这几个例子是为了说明纵向弯曲计算的重要性以及工程师掌握这种计算的必要性。例如,1875年横跨克夫达河的桥梁毁坏之后,如果说上弦压杆计算错误,是由于在当时还没有进行这种计算的公式,并且关于外力沿杆长按已知规律分布下的压杆稳定问题也还没有在理论上予以解决,而不可归咎于它的建造者;那末现在这种桥梁的建造者就应该知道如何进行这种计算了。

本书主要是供从事纵向弯曲计算的工程师和技术人员们应用的。它具有总结性

① 本书的序言是作者在1939年出版的这本书中的原作。

② 原书编辑补充。

③ Ф. С. Ясинский. О сопротивлении продольному изгибу, § 24, СПб., 1894.

④ В. П. Николаев. Мозырская деформация. «Строительная промышленность», 1925, №9.

的特点,其中研究了直綫杆件和曲綫杆件的临界力的求法以及不同作者的研究結果。最后的結論都用便于应用的公式或表格表示出来。所有的叙述都通过許多例子加以闡明。

叙述纵向弯曲理論所需的数学資料并不多。高等学校机械专业和建筑专业方面所讲授的課本已經够用。仅第三、四两章的若干节中是例外,其中涉及貝塞尔函数。此外,在第三、四两章中应用了弯曲微分方程的数值积分法。不用数值法就无法处理許多工程問題。我們并未述及这些方法,讀者可参考已发行了若干版的 A. H. 克楼洛夫院士的优秀著作《近似計算》。

在本书《纵向弯曲》部分的第一章中述及临界力的概念并詳述其求法。各种方法都用例子加以說明。第二章研究了等截面直綫杆件当压力作用在它的两端时的纵向弯曲問題。第三章研究了变截面杆件的纵向弯曲問題。第四章研究了外力沿着杆长分布以及同时有沿着杆长分布的外力和作用在两端的外力的情形下直綫杆件的纵向弯曲問題。第五、六两章研究了曲綫杆件(圓环、拱、螺旋彈簧)的纵向弯曲問題。其中,第五章詳細研究了圓环和圓拱;第六章研究了抛物綫拱和悬鏈綫拱。最后,在第七章中研究了杆系的纵向弯曲問題。

每章章末都附有参考文献,作者着重提出了最重要的有关文章。此外,书中还列有若干基本的和总结性的著作与纵向弯曲課本的书目。

参 考 文 献

- A. Лав (A. Love). Математическая теория упругости, тт. XVIII и XIX. ОНТИ, 1935.
 С. П. Тимошенко. Вопросы устойчивости упругих систем, тт. I. Л., 1935.
 S. Timoshenko. Theory of elastic stability, тт. I~IV. New York, 1936.
 I. Ratzersdorfer. Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken. Wien, 1936.
 R. Mayer. Die Knickfestigkeit. Berlin, 1921.
 L. Tetmajer. Die Gesetze der Knickungs und Druckfestigkeit, 3-е изд., 1903.
 Todhunter and Pearson. History of Theory of Elasticity, тт. I и II, 1886~1893.
 А. Н. Диниш. Устойчивость упругих систем, тт. I~III. ОНТИ, 1935 и изд. АН СССР (переработанное и дополненное), 1950.

第一章 临界力

§ 1. 平衡的三种形式

物体的平衡可能是稳定的、不稳定的和随遇的。如果物体从一个位置稍许偏移后仍能回复到原来位置,这种平衡状态称为稳定平衡。如果物体稍许偏移后即继续离开而不再回到原来位置,则称为不稳定平衡。如果物体偏移后就在新位置上保持平衡,则称为随遇平衡。

一个放在碗形曲面内的重球是稳定平衡的例子,放在凸起(倒置)的碗形曲面顶点的球属于不稳定平衡,而同一球放在水平面上便是随遇平衡(图 1)。

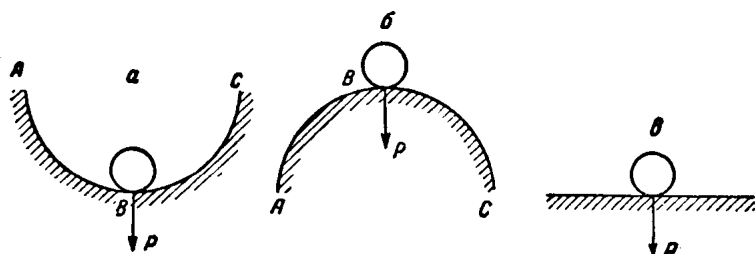


图 1

平衡的性质可随着从平衡位置偏移的方向而异。例如,用一圆柱形代替常用的碗形,使圆柱的母线成水平,曲线 ABC 为铅直平面与此圆柱形的截面(图 1-a)。当球从其平衡位置沿母线方向偏移时则成随遇平衡,而沿所有其余方向偏移时都是稳定平衡。至于图 1-b 所示情形,沿着水平母线的偏移也是随遇平衡,而沿所有其余方向的偏移都是不稳定平衡。

设取一鞍状曲面(双曲抛物面),将球置于曲面的中点。这里平衡的性质也随着不同的偏移方向而异。在一个方向,平衡是稳定的,而在其余的方向,则是不稳定的。我们补充说明,在工程结构中只容许稳定的平衡情况,沿所有各方向的偏移都应该保持稳定。象随遇平衡的情形,在工程问题中并不认为是平衡的。

§ 2. 稳定的分析准则

大家知道,按照在平衡状态下的虚位移原理,当物体自其平衡位置作无限小的偏移时,所有作用在物体上的力所作的功等于零:

$$\delta A = \sum (\bar{X}\delta x + \bar{Y}\delta y + \bar{Z}\delta z) = 0. \quad (1)$$

我们进一步来研究从平衡位置作有限小偏移时的功 ΔA 。可以证明:假使 ΔA 是

負的,則平衡是穩定的;假使 ΔA 是正的,則平衡是不穩定的;而如果 ΔA 等于零,則平衡是隨遇的。

如以重球的三个平衡情况作为例子。图 1-a 中,当球自平衡位置作有限小偏移时,其重心就上升,于是重力的功是負的,而平衡是穩定的。图 1-b 中,当球从平衡位置偏移时,重心下降,重力的功是正的,因而平衡是不穩定的。最后,在图 1-c 中,当球作偏移时,其重心既不上升也不下降,因此平衡是隨遇的。

狄利赫里定理指出另一个穩定性的准則。根据狄利赫里定理,物体在平衡位置上的位能 U 具有极小值或极大值。假使 U 为极小,則平衡是穩定的;如果 U 为极大,則平衡是不穩定的。今仍以重球作为例子。在图 1-a 的情形下,球处于平衡状态时居于最低的位置,其位能为极小,这一平衡是穩定的;图 1-b 的情形,球居于最高的位置,其位能为极大,平衡是不穩定的;图 1-c 的情形(球在水平面上),当球在平面上偏移时位能并不改变,这个平衡位置上的位能既无极大值也无极小值,因而平衡是隨遇的。

狄利赫里定理还指出了解决穩定性問題的方法。首先求出系統的位能,然后再确定它的极小值和极大值。对应于极小位能的平衡位置是穩定的,而对应于极大位能的是不穩定的。从数学的观点来看,这就归納为寻求函数的极小值或极大值的微分或变分运算問題。

§3. 临界力

在大部分的剛体靜力学問題中,平衡的穩定性决定于物体的几何形状而与作用力的大小无关。例如,前面所研究过的重球(图 1),当它安置于凹曲面內时为穩定平衡,放在凸曲面上时为不穩定平衡,最后,当它放在水平面上时为隨遇平衡;平衡的穩定性与球的重量完全无关。但是往往有这样的情形,穩定性却与作用力的大小有关:外力較小时平衡是穩定的,較大时便不穩定;或者相反。

这就是說,存在着所謂临界力。假使作用力小于临界力,平衡是穩定的,假使大于临界力則不穩定。如果外力增大而越过其临界值,則平衡便从穩定过渡到不穩定。对应于从穩定平衡轉到不穩定平衡的这个力的值,称为这个力的临界值,或簡称临界力。临界力可以这样求得:使作用力在物体离开平衡位置的有限小的偏移上所作的功等于零,或者使平衡位置上位能的二阶导数等于零。

〔例〕一个摆由杆子 Om 和重量为 Q 的球所組成(图 2)。绳子 $mBDEP$ 穿过恰在 C 点上面的小圈 B 及滑輪 D 和 E ,在绳子一端挂着荷重 P ; $mC = BC = l$ 。绳子和杆子 Om 的重量略去不計。

显然,假使 P 較之 Q 为很小,則平衡位置 $\varphi = 0$ 是穩定的;而如 P 很大則是不穩定的。为了寻求临界力,我們来研究穩定的分析准則。当摆从平衡位置偏移一个 φ 角时,球 Q 的中心便上升下列高度:

$$H = l - l \cos \varphi,$$

而荷重 P 則下降:

$$h = 2l - 2l \cos \frac{\varphi}{2}.$$

外力 Q 和 P 所作的功等于:

$$A = -Ql(1 - \cos \varphi) + P2l\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right). \quad (2)$$

因为我们研究的是离开平衡位置的微小偏移, 所以 $\cos \varphi$ 可用 $1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ($\cos \varphi$ 展成幂级数的前两项) 来代替, 于是:

$$A = (-2Q + P) \frac{l\varphi^2}{4}. \quad (3)$$

如果 $P < 2Q$, 那么功 A 是负的, 平衡是稳定的; 如果 $P > 2Q$, 那么功 A 是正的, 平衡是不稳定的。使 A 等于零, 我们得到 P 力的临界值。解所得方程, 求得:

$$P_{kp} = 2Q. \quad (4)$$

因此, 如果荷重 $P < 2Q$, 那么平衡是稳定的; 如果 $P > 2Q$, 则是不稳定的。

根据狄利赫里定理也可得到相同的结果。设在 $\varphi = 0$ 的平衡位置上, 摆 Q 和荷重 P 所成系统的位能为 U_0 。当摆偏移一个 φ 角后, 系统的位能为:

$$U = U_0 + Ql(1 - \cos \varphi) - 2Pl\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right), \quad (5)$$

或者, 在小角度时

$$U = U_0 + (2Q - P) \frac{l\varphi^2}{4}. \quad (6)$$

由此

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{1}{2}(2Q - P)l\varphi,$$

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = \frac{1}{2}(2Q - P)l.$$

假使 $\frac{d^2U}{d\varphi^2}$ 是正的, 那么这平衡位置的 U 为极小, 平衡是稳定的。这种情形将发生于:

$$P < 2Q.$$

假使 $\frac{d^2U}{d\varphi^2}$ 是负的, 则此平衡位置的 U 为极大, 平衡是不稳定的。这种情形将发生于:

$$P > 2Q.$$

当 $P = 2Q$ 时, 稳定平衡就过渡到不稳定平衡。这个 P 值便是临界力。

$\varphi = 0$ 的平衡位置上存在着临界力, 这个平衡位置稳定与否取决于 P 力的大小; 除此以外, 尚有别的没有临界力的平衡位置。如果我们不象前面那样假定角度 φ 是微小的, 便可由 (5) 式求出这些位置。

实际上, 可得:

$$\frac{dU}{d\varphi} = Ql \sin \varphi - Pl \sin \frac{\varphi}{2} = \left[2Q \cos \frac{\varphi}{2} - P \right] l \sin \frac{\varphi}{2} = 0. \quad (7)$$

由此, 可能有两种情况:

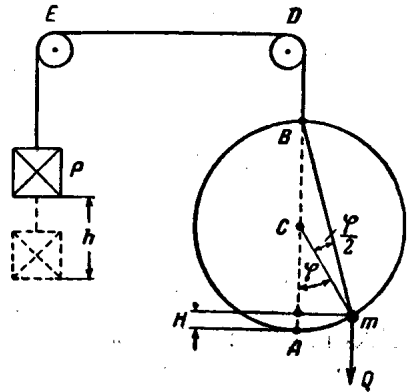


图 2

$$\sin \frac{\varphi}{2} = 0, \quad \text{即} \quad \varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

及

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{P}{2Q}. \quad (8)$$

显然,从第一种情况的全部解答可以得到前面所讨论的平衡位置。

第二种情况是新的平衡位置,我们现在来研究它是否稳定。

由能量的二阶导数得出:

$$U'' = Ql \cos \varphi - \frac{Pl}{2} \cos \frac{\varphi}{2},$$

或者,将(8)式中的 P 值代入,得出:

$$U'' = Ql \left[\cos \varphi - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right]. \quad (9)$$

然而,当 $\varphi < \pi$ 时,始终是 $\cos \varphi < \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, 这就是说,在平衡位置(8)中, U'' 是负的,能量 U 为极大,平衡总是不稳定的。在这个平衡位置上不存在任何临界力。

§ 4. 弹性系统的临界力

在很久以前,人们就知道弹性系统具有临界力。在这领域内最初进行研究的还是欧拉。他证明了具有相当长度原来挺直的杆件在轴向力的作用下可以被弯曲,并且有这样几个平衡形状:其中有一个是稳定的,其余都是不稳定的。

拉格朗日把欧拉的研究推广到变截面杆件,求得了强度最大的柱子的形状。欧拉和拉格朗日的工作曾经是完全被遗忘了,而没有得到工程上的应用;在当时的工程上不需要薄壁结构。此外,欧拉方法本身的卓越特点也很少为当时的人们所了解。人们长期认为,欧拉的解答没有任何实际意义,只是一个大数学家的奇想而已。一直到十九世纪末,对这个问题经过了严格的数学分析以及实验的结果,才证明欧拉是正确的,他的方法完全可靠,而且可用以求解其他的稳定性问题。

从十九世纪后半叶开始,涌现了有关个别稳定性问题的大量研究。这是由于当时在建筑桥梁和其他大型金属构筑物时,为了减轻结构的自重,开始大量采用了决定于稳定性计算的薄壁杆件和板。这些学者的工作阐明,基尔赫高弗关于弹性理论方程解答唯一性的定理对于象薄壁杆件、板和薄壳等这些物体并不适用,它们可能出现几种平衡状态。

例如,如果使作用在弹性体上的载荷精确到某一数值因数 λ_0 的程度,则存在着 $\lambda < \lambda_0$ 的情况,对于所有小于 λ_0 的 λ 值,只有一个平衡位置,并且是稳定的。假使 λ 趋近于零,那么这个位置就转为物体的自然应力状态。假使 $\lambda > \lambda_0$, 那就可能有几个平衡位置。对应于 λ_0 值的载荷称为临界载荷。仅在个别情况下, λ_0 可能为无限大,对于这种系统只有一个稳定的平衡位置,不存在临界载荷。事实上,几个平衡位置的存在,只有当 $\lambda = \lambda_0$ 不超过弹性极限时才有实际意义。这就是物体的一个尺寸或两个尺寸是小于第三个尺寸(板、薄壁杆件)。在这些平衡位置中有一个是稳定的,其余都

是不稳定的。对于工程上的目的来说,最重要是确定其中那些是稳定的,那些是不稳定的,因为那些作为强度计算依据的平衡位置无疑地必须是稳定的。不稳定平衡或随遇平衡在这类问题中都还不能认为是平衡的。在所有这类的工程问题中,不但需要知道平衡的形式,而且还需知道临界力的大小,也就是由稳定平衡转变为不稳定平衡的这一个力的大小。应该补充说明,弹性系统一般具有几个临界力,工程上重要的是要知道其中的最小值 P_{kp} 。对于较高的临界力,在大多数情况下并无任何兴趣可言。

§5. 临界力存在的准则

由 §3 中的例子可以看出只有在这种情况下,当平衡位置并不随外力而变化时,才谈得到临界力。例如 §3 中的摆,当变化 P 或 Q 力的大小时,平衡位置 $\varphi=0$ 并不改变,摆总是保持铅直的位置。在这个位置上可能存在 P_{kp} 。摆还存在于由 (8) 式所确定其他角度的别的平衡位置。这里的偏移角 φ 将决定于 P 和 Q 力的值。随着 P 或 Q 的改变,角度 φ 也变化,这些平衡位置上没有临界力。

承载纵向压力 P 的直线杆件的平衡位置并不随 P 力的变化而异^①,因为杆件保持直线, P_{kp} 是可以预计的。同一杆件受到横向力 Q 的弯曲作用,其平衡位置(杆件的挠度)随着 Q 的变化而改变,并没有临界力。

如果完成了上述必要的但并不充分的条件,则可指出寻求 P_{kp} 的规则。这规则是:首先应该得到平衡位置,其次求出物体从平衡位置作有限小偏移时物体上全部作用力的功,并使这个功等于零,就得到确定 P_{kp} 的方程。显然,如果在某一偏移上全部作用力所作的功的符号都相同,则 P_{kp} 不存在;如出现不同的符号,则 P_{kp} 就存在了。例如 §3 中的摆,对应于平衡位置角度 $\varphi=0$ 的偏移上, P 力作正功而 Q 作负功,这样 P_{kp} 即存在。假使把贯穿绳子的小孔 B 安装在 A 点,这样,当摆偏离平衡位置时,绳子即将它拉向下方,在此偏移时 P 和 Q 力都作负功,因此 P_{kp} 不存在,平衡总是稳定的。

下端固定的铅直杆件受到作用在上端的 P 力的压缩(欧拉情形,图 4-1)。当杆件从平衡位置偏移时(纵向弯曲时),弹性力作负功,重力 P 作正功, P_{kp} 是存在的。假使杆件受到作用在上端的纵向力 P 的拉伸,则当从平衡位置偏移(弯曲)时,弹性力和 P 力的功都是负的, P_{kp} 不存在了。

如在同一杆件的上端作用着拉力 P 和沿杆件全长分布的自重 Q ,当从平衡位置偏移(弯曲)时,弹性力和 P 力的功是负的,而 Q 力的功是正的,临界力就存在了。

受均布外载荷压力 p 压缩的圆环或管子^②,圆的平衡状态是否总是稳定的,有没有临界压力呢?假定圆环或管子稍许偏离圆形,弹性力的功是负的, p 力的功是正的,因而存在着临界压力。由计算得到:

① 略去杆件的纵向缩短。

② 例如蒸汽锅炉的火管(参阅第五章 §61)。

圓环

$$p = \frac{3EI}{R^3},$$

管子

$$p = \frac{3EI}{R^3(1-\mu^2)},$$

式中 I ——环緣的横截面或单位长度內管子横截面的慣矩；

E ——彈性模量；

μ ——泊松系数；

R ——半徑。

設同一圓环或管子承受內压力 p (例如圓柱形蒸汽鍋炉的外壁)。在圓形稍許偏离时, 彈性力和 p 力都作負功, 临界压力不存在。圓环或管子在內压力下, 圓的平衡状态总是稳定的。

我們也可采用其他的方法: 在平衡位置上位能 U 具有极小值或极大值。如果具有极小值, 則平衡是稳定的; 如果具有极大值則不稳定。如果随着 P 力的变化, U 的极小值轉变到极大值, 或者相反, 那末发生轉变时的这一个 P 值便是临界力了。

临界力的求法如下: 应求出 U , 使其一阶导数等于零, 得到平衡位置, 然后研究平衡位置上的二阶导数。若 P 变化时, 其符号保持不变, 則临界力不存在; 如果也随着变化, 則存在临界力。使 U 的二阶导数等于零, 由此方程解出 P , 便得 P_{kp} 。

§ 6. 临界力的求法

关于临界力的确定可以有許多方法。这里不拟用普遍的形式来叙述, 而只用例子来闡明其实质。

这些方法中最主要的是平衡微分方程的直接积分和位能法。我們將概要地說明这两个方法, 而其余的方法只是提一下。

1. 平衡微分方程的直接积分 杆件 (图 4-1) 受到沿着軸綫作用的 P 力的压缩。杆件的下端固定, 上端自由。当 P 力較小时杆件維持为直綫。当 P 力增大可能达到某一时刻, 杆件的直綫形状成为不稳定的, 杆件便弯曲了。为了寻求使杆件开始弯曲时力的数值, 我們假定杆件已經弯曲, 并列出杆件从直綫平衡状态作微小偏移的弯曲微分方程。当偏移微小时, 方程是綫性的:

$$EIy'' = -P(y-f). \quad (10)$$

边界条件如下:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } x=0 \text{ 时, } y=0, \quad y'=0; \\ \text{当 } x=l \text{ 时, } y=f. \end{array} \right\} \quad (11)$$

方程 (10) 的积分等于:

$$y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx + f, \quad (12)$$

式中

$$n^2 = \frac{P}{EI} \quad (13)$$

由边界条件(11)导得 C_1 、 C_2 和 f 的三个线性齐次联立方程 (在此情况下, 它们特别简单)。这些方程的解答之一为:

$$C_1 = C_2 = f = 0, \quad (14)$$

这就是说, 杆件保持挺直, 并无任何弯曲。如果上述三个联立方程的行列式等于零, 则 C_1 、 C_2 和 f 全部或其中的某一些可能不等于零, 也就是仅仅在这种情况下弯曲才有可能。这就给出了本题的所谓特征方程。在这样的情形中, 它特别简单:

$$\cos nl = 0. \quad (15)$$

从上式决定 n 数, 因而也就确定了临界力 P_{kp} 。

在本例的情况下,

$$nl = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \dots \quad (16)$$

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}, \quad \frac{9\pi^2 EI}{4l^2}, \dots \quad (17)$$

数值 n 称为本题的特征数, 对应的解答

$$y = f(1 - \cos nx) \quad (18)$$

称为特征函数。

至此我们仍留下一个未定量 f , 即杆件上端的挠度。应该特别注意, 一般上面讨论的方法并无决定杆件挠度 f 的可能性。这是由于我们以近似的弯曲方程(10)为出发点的缘故。假使既希望获得临界力, 又要求出在大于临界力下杆件被弯曲成的曲线, 则应以精确的弯曲方程

$$\frac{EIy'''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -P(f-y)$$

为依据。

如对此式积分, 我们即可得到临界力的数值与(17)相同, 此外, 并可得到外力大于临界值时杆件被弯曲的曲线形状。当外力小于第一临界力时, 正如精确理论所表明, 杆件保持挺直。这个问题将详细地在 § 16 和 17 中说明。

在本例中, 最小临界力是在杆件弯曲成一个四分之一波的曲线 (图 4-1) 时得到的。

$$y = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$$

对应于方程(16)的最小根。当弯曲成 3 个、5 个等四分之一波的曲线时, 则对应于方程(16)的第二、第三个根等可以得到较大的临界力, 但也并不是始终如此。有时最小临界力是在杆件弯曲成几个四分之一波的曲线时得到的。§ 21 中所研究的杆件在弹性介质内的纵向弯曲便可作为例子。

如果方程(10)并不能积分成有限形式(例如变惯矩时),则可按照无穷级数的形式来求解。得到的特征方程也是由这种级数组成的。临界力的计算虽没有引起原则上的困难,但需要耗费巨大的劳力和时间,特别是在复杂而收敛慢的级数的时候。

平衡方程的数值积分可以很快地获得结果。我们举例来说明这个方法。

设需要确定一个下端固定上端自由的杆件的临界力(图4-1), 惯矩沿杆件长度按余弦的二次幂变化(参阅 § 38):

$$I(x) = I \cos^2 1.4706 \frac{x}{l}, \quad (19)$$

上端的惯矩 i 与下端的惯矩 I 之比值等于 0.01。

这种杆件的弯曲微分方程与方程(10)相似:

$$\cos^2 1.4706 \xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = K(1-\eta), \quad (20)$$

式中 K ——所求的稳定系数;

ξ, η ——无量纲的坐标。

$$K = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{f}. \quad (21)$$

边界条件(11)可改写为:

$$\xi = 0, \quad \eta = \eta' = 0; \quad (22)$$

$$\xi = 1, \quad \eta = 1. \quad (23)$$

现在需要确定稳定系数 K 。如与其他相似的情形比较,便能想到: $1 < K < 2$ 。以 $K=1$ 代入方程(20),并根据施德妙尔法在边界条件(21)下加以积分。因为杆件的全长分为 4~5 段,所以这一积分是相当粗略的。

我们得到:

$$\eta(1) = 0.74。$$

以 $K=2$ 代入方程(20),再在同样的边界条件(22)下重新对所得方程积分,得到:

$$\eta(1) = 1.53。$$

用内插法近似地求得,当 $K=1.3 \sim 1.4$ 时, $\eta(1)=1$ 。

试取 $K=1.4$, 并较精确地完成方程(20)的积分,如把杆长分作 10 段,我们得到 $\eta(1)=0.9941$ 。

我们取 $K=1.43$, 得 $\eta(1)=1.0024$ 。由此求得 $K=1.423$ 。顺便在计算过程中得到诸中间 ξ 值的纵坐标 η , 即弯曲线的形状。

这个方法可以计算达到任何预定精确度的 K , 较利用幂级数求方程的积分可以更快地得到结果^①。

^① 关于施德妙尔法,参阅 А. Н. Крылов 著的 Приближенные Вычисления, 第七章, § 96~97 (苏联科学院出版社, 1935)。

2. 位能法 假设压杆(图4, § 8)稍微弯曲。变形位能使稍许增长,即在压缩能上又增加了弯曲能。当杆件从直线形状发生微小偏移时,压缩能可以假定不变。设 U 为弯曲能。随着杆件的上述弯曲,同时产生载荷的下降,也就是系统的位能减小。设 T 为这一能量的减少量,等于载荷下降所作的功。如果当杆件从平衡位置偏移时,位能的增量是正的,也就是说,如果

$$U > T,$$

则压杆的直线平衡形状是稳定的,如果

$$U < T,$$

则不稳定。

临界力从下列方程求出:

$$U = T. \quad (24)$$

假使已知杆件被弯曲成的曲线形状,便可从(24)式得到临界力的正确值。但在大多数情况下,这个曲线的形状是不知道的。这时可以应用下述铁摩辛柯所建议的近似法。根据实验资料或者对类似问题的研究,假定一根形状适当的弯曲线,其方程可以不适合弯曲微分方程,但是必须满足边界条件,并包含一个或几个任意参数。因此,设

$$y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (25)$$

然后,根据(25)式列出 U 及 T 的表达式,再代入(24)式,求得 P 为前述参数的函数,于是得到:

$$P = F(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (26)$$

最后,我们选择参数 $a_1, a_2, \dots$ 使从(26)式求得的 P 具有最小值。

我们仍以下端固定上端自由的杆件(图4)为例来说明解题的过程。弯曲的位能等于:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx. \quad (27)$$

当杆件弯曲时,外力的功为 P 力与杆件上端下降量的乘积,即

$$T = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx. \quad (28)$$

把 U 和 T 的值代入(24)式得到:

$$P_{kp} = EI \frac{\int_0^l (y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx}. \quad (29)$$

在所示的情况下,弯曲线的通式可用三角级数的形式来表示:

$$y = a_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right) + a_1 \left(1 - \cos \frac{3\pi x}{2l}\right) + \dots + a_n \left(1 - \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right) + \dots \quad (30)$$