

数 学

SHUXUE

高考复习用书

浙江人民出版社

高 考 复 习 用 书

数 学

浙江教育学院数学组 编
杭州市教育局教研室

浙 江 人 民 出 版 社

高考复习用书

数 学

*

浙江人民出版社出版

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本：787×1092 1/32 印张：18

1979年2月第 一 版

1980年2月第 二 版

1980年2月第二次印刷

印数：270,001—541,000

统一书号：7103·1039

定 价：1.12 元

说 明

为了帮助我省中学生和广大知识青年系统地复习中学数学基础知识，我们编写了这本中学数学复习用书。

本书是以教育部制订的《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》为依据，并参照1979年全国高等学校招生考试复习大纲进行编写的。

全书分代数、三角、平面几何、立体几何、解析几何等五部分。每一章都安排了基础知识的复习以及范例、习题，结合范例指出解题规律。每一部分之后又有复习题，以培养学生综合运用知识的能力。全书最后附有习题答案和部分习题提示。

参加本书编写的有：周成熙、何永培、毛倩、王文昭、王农林、王志明、王镕庚、陈达权、杜亦广、张友于、金增炎、段友苇、唐魁信、贺元泰、夏金镛、童友谿等同志。赵高厅、过伯祥、杨象富三同志参加了书稿的审阅修改工作。最后由浙江教育学院数学组定稿。

由于编写时间仓促，同时我们水平有限，错误在所难免，希望读者批评指出。

编 者

一九七八年十一月

目 录

代 数

第一章 数	1
§ 1 整数	1
§ 2 有理数	3
§ 3 实数	4
§ 4 复数	5
第二章 代数式	22
一 整式	22
§ 1 整式的四则运算	22
§ 2 多项式的因式分解	23
二 分式	25
§ 3 分式的基本性质与符号法则	25
§ 4 分式的四则运算	25
三 根式	27
§ 5 根式的意义及基本性质	27
§ 6 根式的运算	29
第三章 方程与不等式	40
一 方程	40
§ 1 方程的意义	40
§ 2 同解方程、增根和失根	41
§ 3 方程的解法	42

二 方程组	54
§ 4 二元一次方程组	54
§ 5 三元一次方程组	56
§ 6 二元二次方程组	58
三 列方程解应用题	62
§ 7 列方程解应用题	62
四 不等式	68
§ 8 不等式的意义和性质	68
§ 9 不等式和不等式组的解法	69
第四章 代数函数	88
一 函数的概念	88
§ 1 函数的概念	88
§ 2 函数的性质	88
二 代数函数	90
§ 3 正比例函数、反比例函数及一次函数	90
§ 4 二次函数	94
§ 5 有理指数的幂函数	96
第五章 指数和对数	106
§ 1 指数和对数的概念及其运算	106
§ 2 指数函数和对数函数	111
§ 3 简单的指数方程和对数方程	113
第六章 数列与极限	126
一 数列	126
§ 1 数列的概念	126
§ 2 等差数列与等比数列	127
二 极限	129
§ 3 极限的概念	129

§ 4 无穷递缩等比数列	129
第七章 排列、组合、二项式定理	142
§ 1 排列、组合	142
§ 2 数学归纳法	145
§ 3 二项式定理	146
复习题一	159

平 面 三 角

第一章 三角函数的定义和性质	163
一 角的概念及度量	163
§ 1 角的概念	163
§ 2 角的度量	164
二 三角函数的定义和性质	165
§ 3 三角函数的定义	165
§ 4 用线段表示三角函数	166
§ 5 三角函数的基本性质与图象	166
第二章 三角函数式的恒等变形	181
§ 1 同角三角函数间的关系	181
§ 2 诱导公式	183
§ 3 两角和、两角差、倍角、半角的三角函数	183
第三章 解三角形	205
一 直角三角形解法	205
§ 1 直角三角形中各元素间的关系	205
§ 2 直角三角形解法的四种基本情况	206
二 斜三角形解法	207
§ 3 斜三角形各元素间的关系	207

§ 4 斜三角形解法的四种基本情况	209
三 三角形解法的应用	211
§ 5 测量问题	211
§ 6 航海问题	214
§ 7 力学问题	215
§ 8 几何问题	215
§ 9 其他	217
第四章 反三角函数	229
一 反三角函数的主值	229
§ 1 反三角函数概念	229
§ 2 反三角函数的图象和性质	231
§ 3 反三角函数的运算	233
二 简单的三角方程	237
§ 4 最简单的三角方程	237
§ 5 一般三角方程	239
复习题二	259

平 面 几 何

第一章 直线图形	265
一 相交直线和平行直线	265
§ 1 两条直线相交	265
§ 2 两条直线平行	266
二 三角形	269
§ 3 三角形的基本概念与基本性质	269
§ 4 全等三角形和相似三角形	271
§ 5 三角形的主要线段和外心、内心、垂心、重心	271

§ 6	三角形的面积	272
三	四边形	278
§ 7	特殊四边形的性质和判定	279
四	多边形	286
§ 8	多边形的内角和、外角和	286
§ 9	相似多边形	286
§ 10	正多边形	288
五	对称图形	291
§ 11	轴对称图形	291
§ 12	中心对称图形	292
第二章	圆	310
一	圆的概念和性质	310
§ 1	圆的概念	310
§ 2	圆的性质	310
二	直线和圆、圆和圆的相互位置关系	312
§ 3	直线和圆的相互位置关系	312
§ 4	切线的性质和判定	313
§ 5	两圆的相互位置关系	313
三	和圆有关的角、圆中各线段间的关系	315
§ 6	和圆有关的角	315
§ 7	相交弦定理	316
四	圆的内接和外切四边形	319
§ 8	圆内接四边形	319
§ 9	四点共圆	320
五	圆的度量	322
§ 10	圆的周长和面积	322
六	四种命题和基本轨迹	323

§ 11 四种命题	323
§ 12 基本轨迹	324
复习题三	344

立 体 几 何

第一章 直线与平面	353
§ 1 平面	353
§ 2 直线与直线	355
§ 3 直线与平面	358
§ 4 平面与平面	363
第二章 柱、锥、台、球及有关计算	379
§ 1 柱	379
§ 2 锥	382
§ 3 台	386
§ 4 球	390
复习题四	405

解 析 几 何

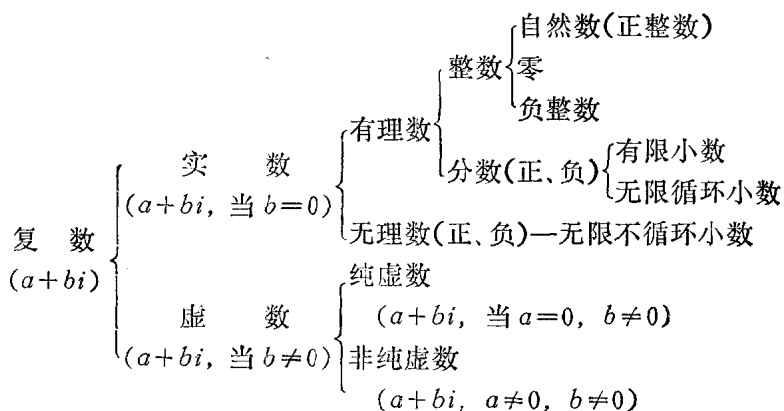
第一章 曲线和方程	409
§ 1 平面直角坐标系	409
§ 2 曲线和方程	416
第二章 直线	429
§ 1 直线的倾斜角和斜率	429
§ 2 直线方程的几种形式	429
§ 3 三点共线	432

§ 4	点和直线的位置关系	434
§ 5	两直线的相关位置	435
§ 6	充要条件	436
§ 7	直线系	437
§ 8	解析法	439
§ 9	经验公式	443
第三章	圆锥曲线	449
§ 1	圆	449
§ 2	椭圆、双曲线、抛物线	454
§ 3	圆锥曲线的切线、法线	455
§ 4	坐标变换	460
第四章	极坐标与参数方程	488
§ 1	极坐标系	488
§ 2	极坐标与直角坐标的互换	489
§ 3	圆锥曲线的极坐标方程	491
§ 4	等速螺线	491
§ 5	曲线的参数方程和普通方程	493
§ 6	渐开线	496
	复习题五	505
	习题答案	512

代 数

第一章 数

数 概 念 的 系 统 表



§ 1 整数

正整数(自然数)、零、负整数总称为整数。

个位数字是 q ，十位数字是 p 的两位数，表示为 $10p+q$ 。

例 1 三个连续整数的平方和是 50，求这三个整数。

解 设这三个连续整数是 $k-1$ 、 k 、 $k+1$ ，

由题意得 $(k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 = 50$.

整理得 $k^2 = 16$,

$$k = \pm 4.$$

$\therefore$ 三个连续整数是 3、4、5 或 -5、-4、-3.

例 2 有一个三位数，它的十位数字比个位数字大 2，百位数字比个位数字小 2，又这个三位数等于三个数字之和的 17 倍，求这个三位数.

解 设这个三位数的个位数字是 x ，则十位数字是 $x+2$ ，百位数字是 $x-2$.

由题意得 $100(x-2) + 10(x+2) + x$
 $= 17(x+x+2+x-2),$

整理得 $60x = 180,$

$$x = 3.$$

$\therefore$ 所求的三位数是 153.

注意：这一类问题，应把多位数同各个数位上的数字两者区分清楚.

例 3 求 24、63、294 的最大公约数和最小公倍数.

解 $24 = 2^3 \times 3;$

$$63 = 3^2 \times 7;$$

$$294 = 2 \times 3 \times 7^2.$$

$\therefore$ 24、63、294 的最大公约数是 3.

$$24、63、294 \text{ 的最小公倍数是 } 2^3 \times 3^2 \times 7^2 = 3528.$$

注意：几个正整数的最大公约数和最小公倍数的求法：1. 把每一个正整数分解为质因数的乘积；2. 取各数公有的质因数，而且选取最低的指数，它们相乘的积，就是最大公约数；3. 取各数所有的质因数，而且选取最高指数，它们相乘的积，就是最小公倍数.

§ 2 有理数

整数、分数总称为有理数。

每一个有理数都可以表示为 $\frac{n}{m}$ 的形式，其中的 m 、 n 均为整数，且 $m \neq 0$ 。

每一个有理数 $\frac{n}{m}$ 都可以化为有限小数或者无限循环小数。反过来，每一个有限小数或者无限循环小数都可以化为 $\frac{n}{m}$ 的形式，

例如 $0.\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99}$ 、 $0.45\dot{2}\dot{3} = \frac{4523 - 45}{9900} = \frac{2239}{4950}$ 。

例 4 计算
$$\frac{3\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{17} - 0.125 \div \frac{17}{3}}{1.25 \div 5\frac{2}{3}}$$

解 原式 =
$$\frac{\left(\frac{7}{2} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \times \frac{3}{17}}{\frac{5}{4} \times \frac{3}{17}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{4}}$$
$$= \frac{6-1}{10} = \frac{1}{2}.$$

注意：1. 有理数运算的问题中，如果既有分数，又有小数，常将小数化为分数，较为方便。最好能熟记下列换算： $0.5 = \frac{1}{2}$ ， $0.25 = \frac{1}{4}$ ， $0.125 = \frac{1}{8}$ ， $0.75 = \frac{3}{4}$ ；2. 几个有理数相加减，如果它们有公因数，则提取公因数，可减少运算手续；3. 如果分子分母都是分数，则同乘以一个适当整数，也可简化运算。

例 5 求证 $\sqrt{2}$ 不是有理数。

证明 (反证法) 假定 $\sqrt{2}$ 是有理数，则 $\sqrt{2}$ 必可表示为 $\frac{n}{m}$ 的

形式(m, n 是互质的整数, 且 $m \neq 0$).

两边平方得 $2 = \frac{n^2}{m^2}$, 即 $n^2 = 2m^2$. 可知 n^2 是偶数, n 必定也是偶数, 令 $n = 2k$, (k 是整数)代入得 $(2k)^2 = 2m^2$, $2k^2 = m^2$, 又可知 m^2 是偶数, m 也是偶数.

m, n 就有公约数 2, 与假定矛盾. 因此, $\sqrt{2}$ 不可能是有理数.

§ 3 实数

无限不循环小数称为无理数. 有理数和无理数总称为实数.

任何实数可以用数轴上的一个点来表示; 反过来, 数轴上的任何一个点都表示一个实数. 即实数与数轴上的点成一一对应关系.

实数 a 的绝对值记作 $|a|$, 它定义为:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{如果 } a > 0; \\ 0 & \text{如果 } a = 0; \\ -a & \text{如果 } a < 0. \end{cases}$$

$|a|$ 可以看作: 数轴上与实数 a 对应的点到原点之间的距离.

例 6 怎样的实数 x , 能使 $|x-3| + |x-8| = 5$ 成立?

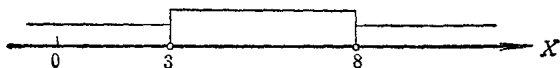


图 1-1

解 把数轴分成三段 $x < 3$; $3 \leq x \leq 8$ 及 $x > 8$ 来考察.

若 $x < 3$, 则 $|x-3| = -(x-3) = 3-x$,

$$|x-8| = -(x-8) = 8-x.$$

原式化为: $3-x+8-x=5$,

得 $x=3$, 与假设矛盾舍去;

若 $3 \leq x \leq 8$, 则原式可化为 $x-3+8-x=5$,
得 $0 \cdot x=0$, x 可取大于、等于 3 且小于等于 8 的一切实数.

若 $x > 8$, 则原式可化为 $x-3+x-8=5$,
得 $x=8$, 与假设矛盾舍去.

$\therefore$ 使 $|x-3|+|x-8|=5$ 成立的实数 x 的范围是:
 $3 \leq x \leq 8$.

注意: 为了去掉几个绝对值的符号, 常采用在数轴上分段讨论的办法. 讨论时不要漏掉转折点代表的数, 如本题中的 3、8.

§ 4 复数

(1) 复数的意义

虚数单位 i 具有这样的性质: $i^2 = -1$, 并且它和实数在一起可以按照通常的四则运算法则进行运算.

很明显, i 就是 -1 的一个平方根, 因此当 k 是整数时, 有:

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i.$$

形式如 $a+bi$ 的数中 (a, b 是实数), 若 $b \neq 0$ 叫做 **虚数**; $a=0$ 的虚数称为 **纯虚数**.

实数和虚数总称为 **复数**. 复数的一般形式为 $a+bi$ (其中 a, b 为实数). a 称为 **实部**, b 称为 **虚部**. 每一个复数 $z=a+bi$ 和复数平面 (图 1-2) 上的点 M 或向量 OM 成一一对应的关系, 其中实轴 $X'X$ 上的点与实数一一对应, 被实轴所分开的上、下两个半平面上的点 (除实轴外) 和虚数一一对应; 虚数轴 $Y'Y$ 上的点和虚数中的纯虚数一一对应 (除去原点).

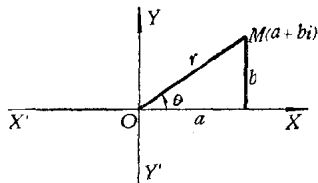


图 1-2

向量 OM 的长 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, 叫做复数 $a + bi$ 的绝对值 (或模), 记作 $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. 复数的绝对值 (或模) 是一个非负的实数. 向量 OM 与 x 轴的正方向所夹的角 θ , 叫做复数 z 的幅角, 不等于零的复数有无数多个幅角, 即 $2k\pi + \theta$, (k 为整数), 其中适合于 $0 \leq \theta < 2\pi$ 的幅角的值 θ , 叫做幅角的主值.

(2) 复数的性质:

(i) 当且只当 $a = c$, $b = d$ 时, 复数 $a + bi = c + di$; 复数 0 可以看作是 $0 + 0i$, 所以当且只当 $a = 0, b = 0$ 时, 复数 $a + bi = 0$;

(ii) 复数没有顺序, 即两个复数中只要有一个不是实数, 就不规定它们的大小;

(iii) 任意两个复数的和、差、积、商 (除数不为零)、幂及方根总是复数;

(iv) $a + bi$ 和 $a - bi$ 称为共轭复数. 两个共轭复数的和、积都是实数.

例 7 若 $|x| - x = 1 + 2i$, 求 x .

解 设 $x = a + bi$,

得 $\sqrt{a^2 + b^2} - (a + bi) = 1 + 2i$,

即 $(\sqrt{a^2 + b^2} - a) + (-b)i = 1 + 2i$.

根据复数相等的条件

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} - a = 1, \\ -b = 2. \end{cases}$$

解这个方程组, 得

$$a = \frac{3}{2}, b = -2.$$

所以 $x = \frac{3}{2} - 2i$.