数学

SHUXUE

高考复习用书

浙江人民出版社

高考复习用书

数　学

浙江教育学院数学组
杭州市教育局教研室　编

浙江人民出版社

高考复习用书
数　学
*
浙江人民出版社出版
浙江新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本：787×1092　1/32　印张：18
1979年2月第一版
1980年2月第二版
1980年2月第二次印刷
印数：270,001—541,000
统一书号：7103·1039
定　价：1.12元

说　　明

为了帮助我省中学生和广大知识青年系统地复习中学数学基础知识，我们编写了这本中学数学复习用书.

本书是以教育部制订的《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》为依据，并参照1979年全国高等学校招生考试复习大纲进行编写的.

全书分代数、三角、平面几何、立体几何、解析几何等五部分. 每一章都安排了基础知识的复习以及范例、习题. 结合范例指出解题规律. 每一部分之后又有复习题，以培养学生综合运用知识的能力. 全书最后附有习题答案和部分习题提示.

参加本书编写的有：周成熙、何永培、毛倩、王文昭、王农林、王志明、王鎔庚、陈达权、杜亦广、张友于、金增炎、段友苇、唐魁信、贺元泰、夏金锵、童友豁等同志. 赵高厅、过伯祥、杨象富三同志参加了书稿的审阅修改工作. 最后由浙江教育学院数学组定稿.

由于编写时间仓促，同时我们水平有限，错误在所难免，希望读者批评指出.

编　　者

一九七八年十一月

目　　录

代　　数

平　面　三　角

平　面　几　何

立　体　几　何

解　析　几　何

代　　数

第一章　数

数概念的系统表

$$
\begin{array}{c}\text{复数}\\(a+bi)\end{array}\begin{cases}
\begin{array}{c}\text{实数}\\(a+bi,\ \text{当}\ b=0)\end{array}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数(正整数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数(正、负)}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数(正、负)—无限不循环小数}\end{cases}\\
\begin{array}{c}\text{虚数}\\(a+bi,\ \text{当}\ b\neq 0)\end{array}\begin{cases}\begin{array}{l}\text{纯虚数}\\(a+bi,\ \text{当}\ a=0,\ b\neq 0)\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{非纯虚数}\\(a+bi,\ a\neq 0,\ b\neq 0)\end{array}\end{cases}
\end{cases}
$$

§ 1　整数

正整数(自然数)、零、负整数总称为**整数**.

个位数字是 q，十位数字是 p 的两位数，表示为 $10p+q$.

例 1　三个连续整数的平方和是50，求这三个整数.

解　设这三个连续整数是 $k-1$、k、$k+1$,

由题意得　$(k-1)^2+k^2+(k+1)^2=50$.

整理得　　$k^2=16$,

$k=\pm 4$.

∴　三个连续整数是 3、4、5 或 -5、-4、-3.

例 2　有一个三位数，它的十位数字比个位数字大 2，百位数字比个位数字小 2，又这个三位数等于三个数字之和的17倍. 求这个三位数.

解　设这个三位数的个位数字是 x，则十位数字是 $x+2$，百位数字是 $x-2$.

由题意得　$100(x-2)+10(x+2)+x$

$=17(x+x+2+x-2)$,

整理得　　$60x=180$,

$x=3$.

∴　所求的三位数是 153.

注意：这一类问题，应把多位数同各个数位上的数字两者区分清楚.

例 3　求 24、63、294 的最大公约数和最小公倍数.

解　$24=2^3\times 3$;

$63=3^2\times 7$;

$294=2\times 3\times 7^2$.

∴　24、63、294 的最大公约数是 3 .

24、63、294 的最小公倍数是 $2^3\times 3^2\times 7^2=3528$.

注意：几个正整数的最大公约数和最小公倍数的求法：1.把每一个正整数分解为质因数的乘积；2.取各数公有的质因数，而且选取最低的指数，它们相乘的积，就是最大公约数；3.取各数所有的质因数，而且选取最高指数，它们相乘的积，就是最小公倍数.

§2　有理数

整数、分数总称为**有理数**.

每一个有理数都可以表示为$\frac{n}{m}$的形式，其中的m、n均为整数，且$m\neq0$.

每一个有理数$\frac{n}{m}$都可以化为有限小数或者无限循环小数．反过来，每一个有限小数或者无限循环小数都可以化为$\frac{n}{m}$的形式，例如$0.\dot{2}\dot{3}=\frac{23}{99}$、$0.45\dot{2}\dot{3}=\frac{4523-45}{9900}=\frac{2239}{4950}$.

例 4　计算 $\dfrac{3\frac{1}{2}\div2\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{17}-0.125\div\frac{17}{3}}{1.25\div5\frac{2}{3}}$.

解　原式$=\dfrac{\left(\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\times\frac{3}{17}}{\frac{5}{4}\times\frac{3}{17}}=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{4}}$

$=\dfrac{6-1}{10}=\dfrac{1}{2}$.

注意：1.有理数运算的问题中，如果既有分数，又有小数，常将小数化为分数，较为方便．最好能熟记下列换算：$0.5=\frac{1}{2}$，$0.25=\frac{1}{4}$，$0.125=\frac{1}{8}$，$0.75=\frac{3}{4}$；2.几个有理数相加减，如果它们有公因数，则提取公因数，可减少运算手续；3.如果分子分母都是分数，则同乘以一个适当整数，也可简化运算.

例 5　求证$\sqrt{2}$不是有理数.

证明　(反证法)假定$\sqrt{2}$是有理数，则$\sqrt{2}$必可表示为$\frac{n}{m}$的

形式(m，n 是互质的整数，且 $m\neq0$).

两边平方得 $2=\dfrac{n^2}{m^2}$，即 $n^2=2m^2$. 可知 n^2 是偶数，n 必定也是偶数，令 $n=2k$，(k 是整数)代入得 $(2k)^2=2m^2$，$2k^2=m^2$，又可知 m^2 是偶数，m 也是偶数.

m，n 就有公约数 2，与假定矛盾. 因此，$\sqrt{2}$ 不可能是有理数.

§ 3　实数

无限不循环小数称为**无理数**. 有理数和无理数总称为**实数**.

任何实数可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的任何一个点都表示一个实数. 即实数与数轴上的点成一一对应关系.

实数 a 的绝对值记作 $|a|$，它定义为：

$$|a|=\begin{cases}a & \text{如果 } a>0;\\ 0 & \text{如果 } a=0;\\ -a & \text{如果 } a<0.\end{cases}$$

$|a|$ 可以看作：数轴上与实数 a 对应的点到原点之间的距离.

例 6　怎样的实数 x，能使 $|x-3|+|x-8|=5$ 成立？

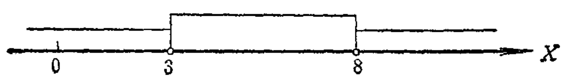

图 1-1

解　把数轴分成三段 $x<3$；$3\leqslant x\leqslant8$ 及 $x>8$ 来考察.

若　$x<3$，则　$|x-3|=-(x-3)=3-x$，

$$|x-8|=-(x-8)=8-x.$$

原式化为：$3-x+8-x=5$，

得　　　$x=3$，　与假设矛盾舍去；

若　$3\leqslant x\leqslant 8$，则原式可化为　$x-3+8-x=5$，

得　　$0\cdot x=0$，x 可取大于、等于 3 且小于等于 8 的一切实数.

若　$x>8$，则原式可化为　$x-3+x-8=5$，

得　　$x=8$，与假设矛盾舍去.

∴　使　$|x-3|+|x-8|=5$ 成立的实数 x 的范围是：

$3\leqslant x\leqslant 8$.

注意：为了去掉几个绝对值的符号，常采用在数轴上分段讨论的办法. 讨论时不要漏掉转折点代表的数，如本题中的 3、8.

§4　复数

（1）复数的意义

虚数单位 i 具有这样的性质：$i^2=-1$，并且它和实数在一起可以按照通常的四则运算法则进行运算.

很明显，i 就是 -1 的一个平方根，因此当 k 是整数时，有：

$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i.$$

形式如 $a+bi$ 的数中（a，b 是实数），若 $b\neq 0$ 叫做**虚数**；$a=0$ 的虚数称为**纯虚数**.

实数和虚数总称为**复数**. 复数的一般形式为 $a+bi$（其中 a，b 为实数）. a 称为实部，b 称为虚部. 每一个复数 $z=a+bi$ 和复数平面（图 1-2）上的点 M 或向量 OM 成一一对应的关系，其中实轴 $X'X$ 上的点与实数一一对应，被实轴所分开的上、下两个半平面上的点（除实轴外）和虚数一一对应；虚数轴 $Y'Y$ 上的点和虚数中的纯虚数一一对应（除去原点）.

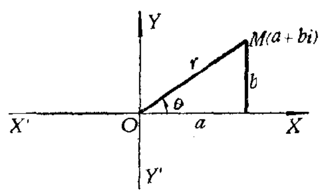

图 1-2

向量 OM 的长 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，叫做复数 $a+bi$ 的绝对值（或模），记作 $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$. 复数的绝对值（或模）是一个非负的实数. 向量 OM 与 x 轴的正方向所夹的角 θ，叫做复数 z 的幅角，不等于零的复数有无数多个幅角，即 $2k\pi+\theta$，(k 为整数)，其中适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的幅角的值 θ，叫做幅角的主值.

(2) 复数的性质：

(i) 当且只当 $a=c$，$b=d$ 时，复数 $a+bi=c+di$；复数 0 可以看作是 $0+0i$，所以当且只当 $a=0, b=0$时，复数 $a+bi=0$；

(ii) 复数没有顺序，即两个复数中只要有一个不是实数，就不规定它们的大小；

(iii) 任意两个复数的和、差、积、商(除数不为零)、幂及方根总是复数；

(iv) $a+bi$ 和 $a-bi$ 称为共轭复数. 两个共轭复数的和、积都是实数.

例 7　若 $|x|-x=1+2i$，求 x.

解　设　$x=a+bi$,

得 $$\sqrt{a^2+b^2}-(a+bi)=1+2i,$$

即 $$(\sqrt{a^2+b^2}-a)+(-b)i=1+2i.$$

根据复数相等的条件

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=1,\\ -b=2.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$a=\frac{3}{2}、b=-2.$$

所以 $$x=\frac{3}{2}-2i.$$