

机械设计现代方法

张文贵 王玉良 韩常绵 编

华中工学院出版社

机械设计现代方法

张文贵 王玉良 韩常绵 编
责任编辑 黎秋萍

*

华中工学院出版社出版发行
(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销
武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 19.5 字数: 401,000

1987年7月第1版 1987年7月第1次印刷

印数: 1—5 000

ISBN 7—5609—0060—7/TH·11

统一书号: 15255—085 定价: 3.25元

内容提要

本书系统地介绍了机械设计现代方法的理论和实践。全书分为三篇：第一篇为机械设计电算方法，介绍通用机械零部件的程序设计方法，给出了十种零部件的程序框图及参考程序；第二篇为机械优化设计，简要叙述有关数学理论基础，介绍二十余种常用的无约束、约束最优化方法；第三章为机械的可靠性设计，述及可靠性数学、机械强度的可靠性设计、置信度等内容。

本书内容翔实，深入浅出，简明易懂，实例多，各章后面附有习题。

本书可作为工科院校机械类专业高年级学生、研究生的选修课教材或参考书，亦可作为工程技术人员培训教材和自学读本。

前 言

当前，新的技术革命浪潮以其磅礴之势，在一切科学技术领域向传统观念提出了挑战。在机械设计领域，常规的设计方法受到很大冲击，用科学的设计方法代替经验的、类比的设计方法已势在必行。缩短设计周期、提高设计质量、发展设计理论、改进设计技术及方法就成为当前机械设计领域中的重点研究内容之一。

近二十年来，电子计算机技术的发展，为所有学科提供了极其有用的工具。在机械设计领域，出现了电子计算机辅助设计、机械优化设计、可靠性设计、设计系统学、设计方法学、有限元分析法等现代设计方法以及相应的学科。其中，计算机辅助设计、机械优化设计、机械可靠性设计现已在理论上和方法上都达到了一定的水平，并在应用中取得了极其显著的经济效果。本书将对这三种设计方法作较为详尽的介绍，并佐以实例，以帮助广大读者尽快掌握它们，并运用于实践。

本书旨在介绍和推广“方法”，尽量避免繁杂的理论论证和数学推演，并给出了较多的实例、习题和参考程序。因此，本书除适宜作大专院校学生和研究生选修教材外，还可作工程技术人员的培训教材和自学读本。

本书分为三篇。第一篇机械设计电算方法，由王玉良同志编写；第二篇机械优化设计，由张文贵同志编写；第三篇机械的可靠性设计，由韩常绵同志编写。

限于编者的水平和经验，书中难免有错误和不妥之处，编者恳请读者给予指教。

在编写本书的过程中，编者曾得到有关同志的大力帮助，在此一并表示诚挚的谢意。

编 者

1986年5月

目 录

前 言

第一篇 机械设计电算方法

第一章 设计自动化基础

- 1-1 数据表的程序化 (2)
- 1-2 线图资料的程序化 (3)
- 1-3 资料图表的公式化 (4)
- 1-4 常见问题的处理方法 (5)
- 1-5 常用算法 (7)

第二章 机械零件的程序设计

- 2-1 轴的强度计算与刚度计算 (19)
- 2-2 三角胶带传动的设计 (26)
- 2-3 标准圆柱齿轮传动的强度计算 (33)
- 2-4 普通圆柱蜗杆传动的强度计算 (42)
- 2-5 滚动轴承的选择计算 (47)
- 2-6 用有限差分法求解滑动轴承的油膜压力分布及承载能力 (53)
- 2-7 两级减速器的程序设计 (58)
- 2-8 套筒滚子链传动的设计计算 (65)
- 2-9 受轴向变载荷的螺栓的强度计算 (72)
- 2-10 圆柱螺旋弹簧的设计 (76)

- 参考书目 (87)

第二篇 机械优化设计

第三章 机械优化设计概论

- 3-1 数学模型 (89)
- 3-2 设计变量 (89)
- 3-3 设计约束 (90)
- 3-4 实际问题举例 (90)
- 3-5 最优化设计问题的几何解释 (93)
- 3-6 机械优化设计的步骤 (94)

第四章 机械优化设计的基本理论

- 4-1 函数的方向导数 (95)
- 4-2 函数的梯度 (96)
- 4-3 二次型与正定矩阵 (97)
- 4-4 多元函数的泰勒展开式 (99)
- 4-5 无约束的极值条件 (100)
- 4-6 凸集与凸函数 (102)

| | | |
|---------------------------|----------------------|---------|
| 4-7 | 约束问题的最优解条件 | (103) |
| 4-8 | 最优化方法和收敛条件 | (105) |
| 第五章 一维搜索的最优化方法 | | |
| 5-1 | 一维搜索的概念 | (108) |
| 5-2 | 黄金分割法 | (108) |
| 5-3 | 费波纳契 (FIBONACCI) 法 | (111) |
| 5-4 | 进退法 | (115) |
| 5-5 | 切线法 | (117) |
| 5-6 | 二次插值法 | (118) |
| 第六章 无约束最优化方法 | | |
| 6-1 | 无约束最优化问题的求解方法 | (124) |
| 6-2 | 梯度法 | (125) |
| 6-3 | 牛顿法 | (128) |
| 6-4 | 共轭方向法 | (132) |
| 6-5 | 共轭梯度法 | (135) |
| 6-6 | 变尺度 (DFP) 法 | (138) |
| 6-7 | 坐标轮换法 | (143) |
| 6-8 | 鲍威尔 (POWELL) 法 | (145) |
| 6-9 | 单纯形法 | (149) |
| 第七章 约束最优化方法 | | |
| 7-1 | 约束最优化问题的求解方法 | (154) |
| 7-2 | 随机方向搜索法 | (154) |
| 7-3 | 可行方向法 | (160) |
| 7-4 | 复合形法 | (163) |
| 7-5 | 拉格朗日乘子法 | (167) |
| 7-6 | 外点惩罚函数法 | (176) |
| 7-7 | 内点惩罚函数法 | (179) |
| 7-8 | 混合惩罚函数法 | (184) |
| 7-9 | 多目标的优化设计问题 | (185) |
| 第八章 最优化方法在机械设计中的应用 | | |
| 8-1 | 齿轮减速器的优化设计 | (189) |
| 8-2 | 平面连杆机构的优化设计 | (196) |
| 参考书目 | | |
| | | (201) |

第三篇 机械的可靠性设计

第九章 可靠性数学基础

| | | |
|-----|-----------|---------|
| 9-1 | 可靠性概念 | (203) |
| 9-2 | 基本知识 | (203) |
| 9-3 | 概率密度曲线 | (205) |
| 9-4 | 频率分布统计特征量 | (207) |
| 9-5 | 可靠度函数 | (208) |
| 9-6 | 二项分布 | (210) |

| | | |
|-----------------------|--------------|---------|
| 9-7 | 泊松分布 | (211) |
| 9-8 | 正态分布 | (214) |
| 9-9 | 正态分布函数的代数运算 | (217) |
| 9-10 | 威布尔分布 | (220) |
| 第十章 机械强度的可靠性设计 | | |
| 10-1 | 静强度设计中的参数 | (227) |
| 10-2 | 应力-强度模型 | (227) |
| 10-3 | 静强度的可靠性设计 | (233) |
| 10-4 | 安全系数的确定 | (240) |
| 10-5 | 疲劳极限图 | (242) |
| 10-6 | 零件的疲劳极限 | (253) |
| 10-7 | 疲劳强度的可靠性设计 | (258) |
| 10-8 | 机械零件刚度的可靠性设计 | (266) |
| 第十一章 置信度 | | |
| 11-1 | 抽样检验 | (274) |
| 11-2 | 两类错误及风险 | (274) |
| 11-3 | 置信度 | (278) |
| 11-4 | 假设检验 | (286) |
| 参考书目 | | (301) |

第一篇

机械设计电算方法

目前，电子计算机在设计计算、工业管理、自动控制、金融、服务诸方面的应用得到发展，因而可使设计人员从繁重的手算劳动中解脱出来。用电子计算机进行自动设计计算（简称电算）需要编制程序，这是设计师们急待解决的问题。本篇在掌握了计算机算法语言的基础上，进一步解决如何编制自动设计程序，如何将曲线、图表、标准规范程序化，如何处理设计参数及数据结果诸问题；并介绍工程中常用的一些基本算法；对常用机械零件的电算设计方法也作了详尽的叙述。

编制计算机程序时，有很多处理规则，作者试图避免对程序本身作更多的理论论证，着重讲解编制的技巧与方法，在所有的实例中都给出了框图及参考程序，以利于读者尽快掌握所学知识。

书中所列的BASIC程序均在TRS-80或APPLE-Ⅰ机上通过。

第一章 设计自动化基础

在进行机械设计时，经常需要用到各种数据表和线图资料，如载荷系数线图，应力集中系数线图，材料性能表，ISO标准及国家标准数据表等。为了使计算机能应用这些资料，必须将数据表及线图程序化。

所谓程序化，就是根据计算机的要求，编制出查找和检取数据的子程序。根据原数据表和线图的来源不同，可以有以下几种处理方法。

1-1 数据表的程序化

数据表可以用数组的方法将其程序化。表1-1为齿轮的标准模数系列表，属于一维数表。其数据在程序化时可用一维数组 $M(I)$ 表示， M 为数组名，它可以是任何一个或两个英文字母或一个字母加上一个数字。括号中的 I 是下标变量， $M(1), M(2), M(3), \dots, M(18)$ 分别表示模数系列中的1, 1.25, 1.5, \dots , 50。如 $I=1$ 时，标识 $m=1\text{mm}$ ； $I=2$ 时，标识 $m=1.25\text{mm}$ 等。

表1-1 齿轮模数系列 (GB1357-78) 单位: mm

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|---|------|-----|---|-----|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 第一系列 | 1 | 1.25 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 16 | 20 | 25 | 32 | 40 | 50 |
|------|---|------|-----|---|-----|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|

机械设计手册和许多产品样本中的大多数数据表属于二维数表。如表1-2，参数有蜗杆的特性系数 q 、模数 m 及相应的 qm^3 值，程序化时可用一个二维数组 $A(I, J)$ 来标识。 $A(I, J)$ 中下标变量 I 是行下标，下标变量 J 是列下标。本数组是三行二十列， $A(1, 10), A(2, 10), A(3, 10)$ 分别表示 $m=6, q=9, qm^3=1944$ 。

表1-2 m 和 q 及相应的 qm^3 值 (JZ64-60)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|-----|-----|-----|-----|-------|-----|-------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| m | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | (3.5) | 4 | (4.5) | 5 | 6 | (7) | 8 | (9) | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 25 |
| q | 14 | 14 | 13 | 12 | 12 | 12 | 11 | 11 | 10 | 9 | 9 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 8 | 8 | 8 |
| qm^3 | 14 | 47 | 104 | 188 | 324 | 515 | 704 | 1002 | 1250 | 1944 | 3087 | 4096 | 5832 | 8000 | 13824 | 24696 | 36864 | 46656 | 64000 | 125000 |

注：括号内的模数尽可能不用。

如将表1-2中的数据输入计算机内，它的BASIC程序为：

```

10 DIM A(3, 20)
20 FOR I=1 TO 3
30 FOR J=1 TO 20
40 READ A(I, J)
50 NEXT J, I
60 DATA 1, 1.5, 2, ..., 25, 14, 14, 13, ..., 8, 14, 47, 104, ..., 125000
    
```

如何将计算结果输出呢？下举例说明。根据蜗杆的强度计算得出 $m^3q \geq 3912$ ，要求计算机自行检索、打印出数表中的 m 、 q 值来，其框图及程序如下：

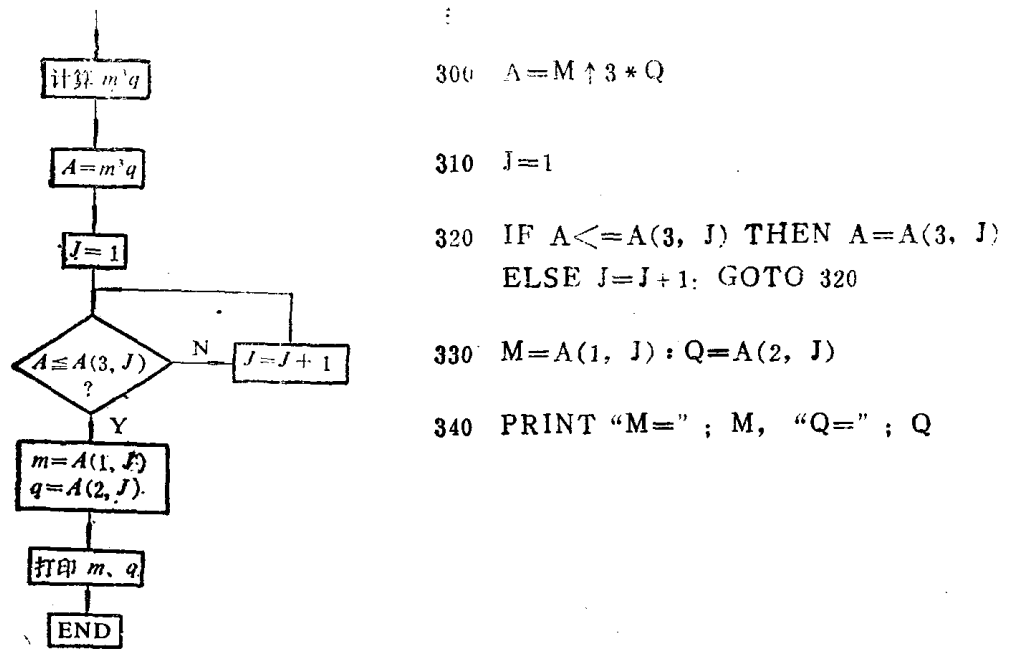


图1-1

1-2 线图资料的程序化

在设计资料中，经常可见到表示各参数间关系的线图。线图不能直接存贮在计算机中，在编制程序时必须将线图程序化。线图程序化可采用两种方法，一是将线图变换成相应数表；二是将线图公式化。

对于各种曲线，将其化为数表比较方便。例如，对表示齿轮载荷分布系数 K_β 值的曲线（图1-2），可在其上取一些结点，把这些结点的横、纵坐标排列起来就得到一个一维数表。图1-2中的四条曲线（每条曲线又分硬齿面、软齿面）可化为八个一维数表，组合在一起就成为一个二维数表（见表2-15）。

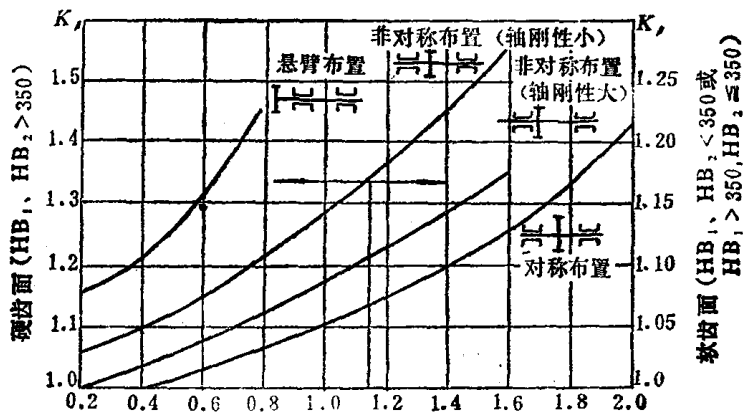


图1-2

- 注：1) 8级精度齿轮， K_β 由图中选取；
 2) 高于8级精度的齿轮， K_β 值应降低5~10%，但不得小于1；
 3) 低于8级精度的齿轮， K_β 值应增大5~10%。

曲线化为数表后，即可按 1-1 节所述方法编制程序。

1-3 资料图表的公式化

1. 对有理论公式的数表和线图的处理办法

机械设计中用到的有些公式非常复杂，为了节省手算时间，又能直观表达参数间的关系及变化规律，才编制成数表或线图。但计算机却善于运用计算表达式，既可使得运算精度高，又可减少内存和占机时间。因此，对于原来已有计算公式的图表可直接用其公式来编制程序。如，在用计算机进行齿轮强度计算时，对材料系数 Z_E 、节点啮合系数 Z_H 、重合度 ε_a 均直接采用公式，而不必将 Z_E 、 Z_H 、 ε_a 的图表程序化。

2. 对于没有理论公式的数表和线图的处理办法

对于一些试验曲线、经验修正曲线、特别是直线、折线，很容易建立它们的函数关系式。例如，齿轮传动的动载荷系数 K_v 值与 $v z_1 / 100$ 的关系是一条直线（见图 1-3）。下面仅就七级精度的直齿轮，介绍将 K_v 直线公式化的方法。

由两点式

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x}{y_2 - y}$$

任取两点 $x_2 = 10$, $y_2 = 1.91$, $x_1 = 2$, $y_1 = 1.19$ 代入后得

$$y = 0.09x + 1,$$

即 $K_v = (0.09v z_1 / 100) + 1.$

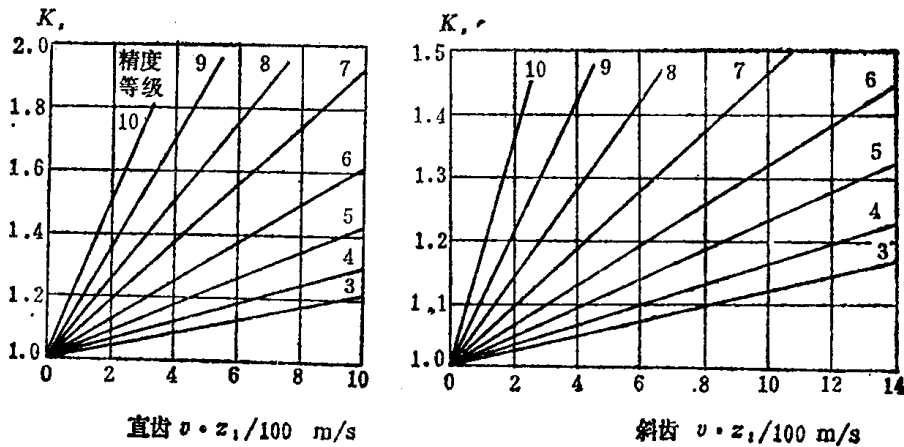


图 1-3

应当注意，有些线图采用的是对数坐标，如图 1-4 中，齿轮寿命系数 K_{Nb} 的坐标公式化时，应将坐标值取对数后代入两点式，即

$$\frac{\lg K_{Nb} - \lg K_{Nb1}}{\lg N - \lg N_1} = \frac{\lg K_{Nb2} - \lg K_{Nb1}}{\lg N_2 - \lg N_1}.$$

对于第二条直线，取坐标点 $(3 \times 10^6, 1)$ ， $(10^3, 2.5)$ 代入两点式，有

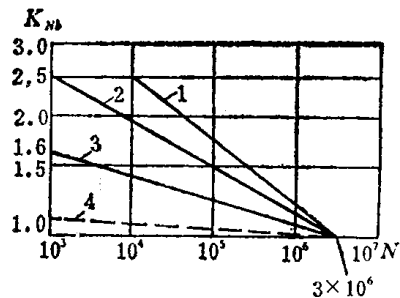


图 1-4 1—常化、调质；2—渗碳、表面淬火；3—氮化钢气体氮化；4—调质钢液体氮化

$$\frac{\lg K_{Nb} - \lg 2.5}{\lg N - \lg 10^3} = \frac{\lg 1 - \lg 2.5}{\lg 3 \times 10^8 - \lg 10^3}$$

整理得 $K_{Nb} = 5.5 / N^{0.114}$ 。

在齿轮强度计算中，疲劳强度极限推荐采用ISO值。由于材料性能的离散性很大，ISO标准中疲劳强度极限 σ_{FLim} 、 σ_{HLim} 都以方框给出（参见ISO标准草案）。鉴于我国材料制造及热处理水平，建议取方框的中下限。这样把方框改成一条直线，得出直线方程，列于表1-3中，供电算时参考。

应特别指出的是，一般对于线图资料的使用，比较精确的方法是不用数组标识检取，而是采用曲线拟合和插值方法来处理。因曲线拟合可将数表、图线公式化编入程序中，故不仅可以减少内存，而且可以按连续变化的变量来检取相应的数值。当然在实际使用时，还要注意这种曲线拟合给出的数据和原数据间误差的大小，若偏差过大则需进行校正，即进行第二次拟合计算。当曲线形状较复杂时，为了提高拟合曲线的精确度，可以分段进行拟合。

表1-3 齿根弯曲疲劳极限 σ_{FLim} 及齿面接触疲劳强度极限 σ_{HLim} (N/mm²)

| 材料种类 | 热处理方法 | 齿芯硬度 | 齿面硬度 | σ_{FLim} | σ_{HLim} |
|-------|-------|-----------|----------|-----------------|-----------------|
| 球墨铸铁 | 常 化 | HB150~300 | | 0.67HB+240 | 1.45HB+185 |
| 灰 铸 铁 | | HB170~270 | | 0.4 HB+60 | 1.05HB+147 |
| 铸 钢 | 常 化 | HB156~229 | | 0.78HB+175 | 0.81HB+206 |
| 碳 钢 | | HB162~217 | | 0.78HB+224 | 1 HB+250 |
| 铸 钢 | 调 质 | HB241~269 | | 0.6 HB+240 | 1 HB+280 |
| 碳 钢 | | HB217~255 | | 0.6 HB+290 | 0.93HB+349 |
| 合金铸钢 | 调 质 | HB197~248 | | 0.6 HB+260 | 1.45HB+250 |
| 合 金 钢 | | HB241~360 | | 0.8 HB+300 | 1.5HB+320 |
| 合 金 钢 | 表面 淬火 | | HRC48~55 | 12 HRC+15 | 14 HRC+400 |
| 合 金 钢 | 渗碳 淬火 | HB300~350 | HRC58~62 | 750 | 1400 |
| 合 金 钢 | 调质后氮化 | HB255~320 | HV>850 | 650 | 950 |

1-4 常见问题的处理方法

1. 数字圆整

在机械设计中，有的尺寸（如齿轮分度圆直径）要求十分准确，尾数不能随意舍去；有的尺寸（如外形及结构尺寸）为安装制造方便应尽可能圆整为整数。这些工作都由计算机取整函数INT(X)完成，但应根据具体需要，用一定的技巧灵活使用。

(1) 如果圆整为不超过计算值的最大整数，例，使数字10.9圆整为10；使-10.9圆整为-11，则可直接应用取整函数：INT(10.9)=10，INT(-10.9)=-11。

(2) 如果对计算值的小数部分进行四舍五入，其方法是：

当计算值>0时，采用INT(X+0.5)；

当计算值<0时，采用-INT(ABS(X)+0.5)。

例如计算出齿轮宽度为54.4，想圆整为54，

则 $\text{INT}(54.4 + 0.5) = 54$;

如果计算出齿轮宽度为54.6, 想圆整为55,

则 $\text{INT}(54.6 + 0.5) = 55$ 。

(3) 如果圆整为不比计算值小的整数, 则采用: $-\text{INT}(-X)$, 如 $-\text{INT}(-54.4) = 55$ 。

(4) 如果圆整为不比计算值小的偶数整数, 则采用: $-2 * \text{INT}(-X/2)$, 如 $-2 * \text{INT}(-54.4/2) = 56$ 。

(5) 如果圆整为不小于计算值的, 以0或5结尾的整数, 例如减速机中心距计算得 $A = 102$, 欲圆整为105, 其程序可采用:

```
100 IF A/5=INT(A/5) THEN A=A
```

```
110 A=INT(A/5)+5
```

(6) 如果圆整为标准数据系列, 则将标准数组输入机内, 按1-1节方法进行。

2. 角度化弧度, 弧度化角度

计算机对三角函数的计算, 要求以弧度来表示角度, 而设计资料中大都是以角度作单位的, 因此在程序中, 计算时应将角度化成弧度, 而在输出时又应当把弧度化为角度。

(1) 角度化弧度 如果角度以小数表示, 则化弧度的方法是将角度乘以0.01745, 如 $\cos 14.2^\circ = \cos(14.2 * 0.01745)$ 。

如果角度以度、分、秒给出, 例如 $14^\circ 20' 5''$, 则可由 $\cos 14^\circ 20' 5'' = \cos((14 + 20/60 + 5/3600) * 0.01745)$, 运算得出函数值来。

(2) 弧度化角度 设 x 表示弧度, A 、 B 、 C 分别表示度、分、秒, 则公式为:

$$A = x \times 180/\pi \text{ 的整数部分,}$$

$$B = (x \times 180/\pi - A) \times 60 \text{ 的整数部分,}$$

$$C = [(x \times 180/\pi - A) \times 60 - B] \times 60.$$

程序为

```
10 A=INT(X * 180/3.1416)
```

```
20 B=INT(X * 180/3.1416 - A) * 60
```

```
30 C=((X * 180/3.1416 - A) * 60 - B) * 60
```

3. 变量比较

机械设计中往往要求出多个设计参数, 在此情况下, 可以预先假定某些参数, 然后采用迭代方法, 使这些参数逐渐逼近真实值。在电算中采用迭代法, 不断地将第 K 次迭代值与第 $K-1$ 次迭代值进行比较, 并使所得结果的相对误差或绝对误差小于预先给定的精度 E , 则可使计算精度达到设计者所需求的精度。

程序中利用判断语句来控制迭代过程, 如果

$$\left| \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{x^{(k)}} \right| \leq E,$$

则停机, 否则继续迭代。

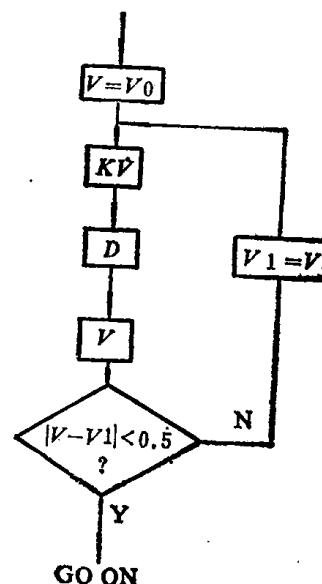


图1-5

例如，在齿轮设计时，欲求齿轮分度圆直径 d ，必须先求出动载荷系数 K_v ，而 K_v 与齿轮速度 v 有关， v 又决定于齿轮直径 d 。电算时，可预先假定一个速度 v_0 ，采用迭代方法，将变量 V 与 V_1 比较，迭代过程如图1-5所示。

1-5 常用算法

一、用牛顿迭代法求方程的根

迭代法的几何描述：对于方程 $y=f(x)$ ，可用作图法估计根的大致范围，参见图1-6。在此范围内，给定初始点 x_n ，过 $(x_n, f(x_n))$ 点作函数曲线的切线交 x 轴于 x_{n+1} 点，

$$\text{则 } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

过 $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ 点再作曲线的切线，可得到点 x_{n+2} ，这样继续进行下去，依次得到点 x_{n+2}, x_{n+3}, \dots ，一直趋近于方程的根 x^* 。

例 计算一端固定、一端铰支压杆的临界载荷。其临界载荷计算公式为

$$P_{cr} = \frac{x^2 EI}{L^2}$$

式中 x 是方程 $\text{tg}x - x = 0$ 在非零点的根。

计算机五次迭代后得出 $x = 4.49341$ ，

因此

$$P_{cr} \approx \frac{4.493^2 \cdot EI}{L^2}$$

其迭代过程见图1-7，计算程序及结果如下。

```

10 REM NEWTON PROGRAM
20 INPUT X0, E, N
30 LPRINT "INPUT X0, E, N=? ";
40 LPRINT X0, " ", E, " ", N
50 K=1 : X=X0
60 A=TAN(X)-X
70 B=1/(COS(X)^2)-1
80 Y=X-A/B
90 IF ABS(Y-X)<=E THEN 130
100 IF K=N THEN 150
110 X=Y
120 K=K+1 : GOTO 60
130 LPRINT "K=" ; K, "Y=" ; Y
140 GOTO 160
150 LPRINT "CONVERGENCE TOO SLOWLY"

```

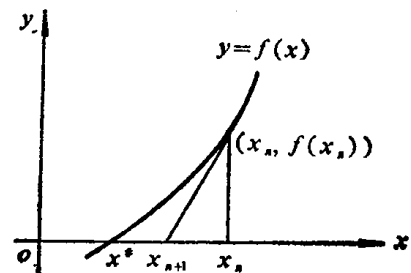


图1-6

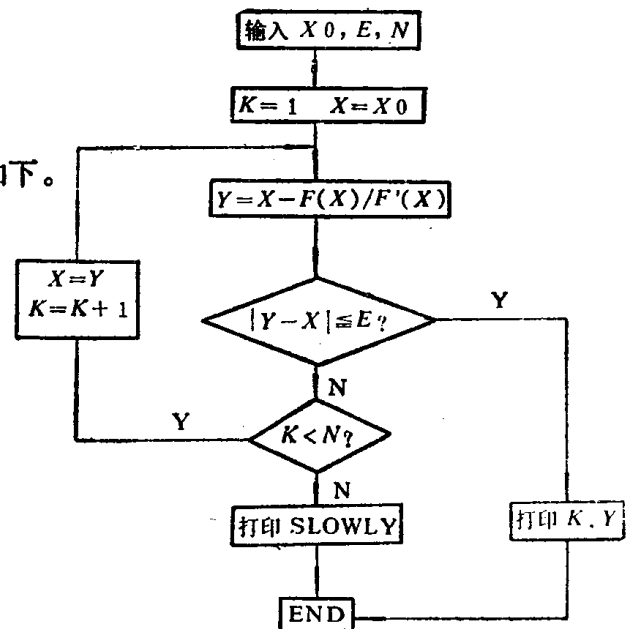


图1-7

INPUT X0, E, N=? 4.6, 1E-05, 40

K=5 Y=4.49341

程序中的标识符说明:

X0——初始点数; E——计算精度; N——限定的最多迭代次数。

二、函数插值

实际问题中遇到的函数 $y = f(x)$ 往往是很复杂的, 虽然可以肯定它在某个区间 $[a, b]$ 上是存在的, 但是很难找到它的具体表达式。在很多场合下, 自变量和函数值是通过实验得到的, 只是一些离散点 x_i 上的函数值

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)。$$

如何根据这些离散点的函数值, 求出 $f(x)$ 在给定点的函数值, 这就是插值法所要解决的问题。插值法的基本思想是, 设法构造某个简单函数 $p(x)$ 来作为 $f(x)$ 的近似表达式(亦称逼近函数), 然后计算 $p(x)$ 的值, 此值即为 $f(x)$ 的近似值。

本节中, 主要采用多项式来完成逼近的任务, 并介绍电子计算机上常用的插值法。

1. 线性插值

已知函数 $f(x)$ (图1-8) 在 x_1 和 x_0 处所对应的函数值 y_1, y_0 。要用一次多项式 $p_1(x)$ 来逼近 $f(x)$, 要求 $p_1(x)$ 在点 x_0, x_1 处的值满足条件:

$$p_1(x_1) = f(x_1), \quad p_1(x_0) = f(x_0)。$$

$p_1(x)$ 的直线方程为:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) = p_1(x)$$

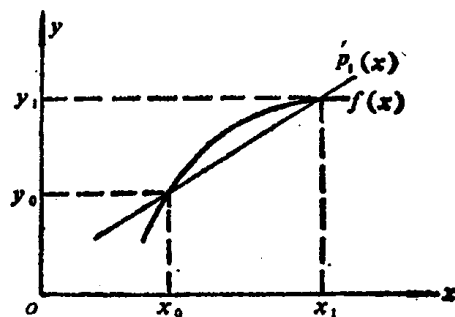


图1-8

$p_1(x)$ 是 x 的一次函数, 称为一次插值多项式, 因此两点插值又称为线性插值。对于工程计算所用图表, 若是两点相距较近, 则可用线性插值法求出两点间某点的函数值。

2. 抛物线插值

对于图1-9所示的函数 $y = f(x)$, 已知自变量 x_0, x_1, x_2 所对应的函数值分别为 y_0, y_1, y_2 。过三点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 作抛物线 $p_2(x)$ 来逼近 $f(x)$, 这种方法称为抛物线插值, 也称二次插值。显然, 二次插值比一次插值有较高的精度。

抛物线插值公式为

$$p_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}。$$

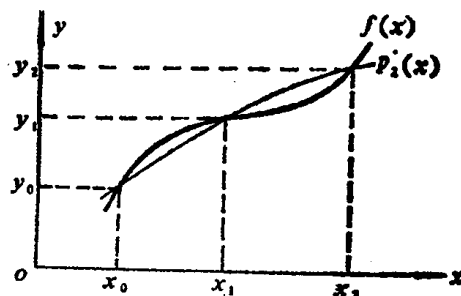


图1-9

3. 拉格朗日插值

类似抛物线插值, 对于 $N+1$ 个结点, 可构造出一个 N 次拉氏插值多项式 $L(x)$ 。设已知函数 $y(x)$ 的结点值为 $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, 对应的函数值为 $y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$; 对于给定的不

是结点的 x ，用拉氏插值法可计算其对应的函数值 $y(x)$ ，其准确性比前两种插值方法的要高。

拉氏插值公式如下：

$$y(x) = y_0 L_0^{(n+1)}(x) + y_1 L_1^{(n+1)}(x) + \dots + y_n L_n^{(n+1)}(x),$$

$$\text{其中 } L_i^{(n+1)}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (i=0,1,2,\dots,n).$$

三、线性方程组的解法

许多工程上的问题，最终都可归结为对线性代数方程组求解的问题。某些微分方程，如轴（梁）的变形方程、滑动轴承计算时所用的雷诺方程，经差分处理后也可化为线性方程组。由于这样的方程组中未知数较多，计算工作量很大，甚至不可能手算，因此，在电算时常采用数值计算法来求得方程组的近似解。求解的方法很多，下面仅介绍两种重要迭代方法：简单迭代法与高斯-赛德尔法。

1. 简单迭代法

设有由 N 个方程组成的线性方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \right\} [1]$$

把[1]式化为便于迭代的形式

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) / a_{11}, \\ x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) / a_{22}, \\ \vdots \\ x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}) / a_{nn}. \end{aligned} \right\} [2]$$

选取一组初始值 $X^0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$ 作为第0次迭代值，把 X^0 代入[2]式右边，求得解的第一次迭代值 $X^{(1)} (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ ；再将 $X^{(1)}$ 代入[2]式右边，求得解的第二次迭代值 $X^{(2)} (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ ……经过反复迭代，直至得到 $X^{(k)} (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ 。如果 X^0 、 $X^{(1)}$ 、 $X^{(2)}$ 、…、 $X^{(k)}$ 的极限存在，即

$$\lim X^{(k)} = X^*,$$

则 X^* 是[2]式的解。

在计算中，只要限制本次迭代值与前次迭代值的绝对误差小于给定的精度 E 即可，即，若

$$|X^{(k)} - X^{(k-1)}| \leq E,$$

则可结束计算。

电算中可以连续打印迭代结果，若经过数次迭代之后，相对误差越来越小，则此方法是收

敛的，否则就是发散的。

简单迭代法流程图见框图1-10，图中的标识符说明如下：

N ——未知数个数； M ——最大允许迭代次数； E ——要求精度； $B(N, N+1)$ ——化为便于迭代形式的增广矩阵。

$X^0(0,0,0)$ 在程序中没有赋值，因不赋值的变量在TRS-80机和APPLE-1机上按零处理。

例 用简单迭代法解方程组

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10. \end{cases} \quad [3]$$

计算程序和结果如下：

```

10 REM ITERATION OF SIMPLICITY
15 READ N, M, E
20 DIM B(N, N+1), X(N), Y(N)
25 FOR I=1 TO N
30 FOR J=1 TO N+1
35 READ B(I, J)
40 NEXT J
45 NEXT I
50 K=1
52 D=0
55 FOR I=1 TO N
60 Y(I)=B(I, N+1)
65 FOR J=1 TO N
70 Y(I)=Y(I)+B(I, J)*X(J)
75 NEXT J
80 G=ABS(Y(I)-X(I))
85 IF G<=D THEN 95
90 D=G
95 NEXT I
100 IF D<=E THEN 145
105 IF K<=M THEN 120
110 PRINT "CONVERGENCE TOO SLOWLY"
115 GOTO 145
120 K=K+1
125 FOR I=1 TO N
130 X(I)=Y(I)
135 NEXT I
140 GOTO 52
145 PRINT "K=" ; K-1
150 PRINT "NUMBER", "NOW VALUE", "LAST VALUE"

```

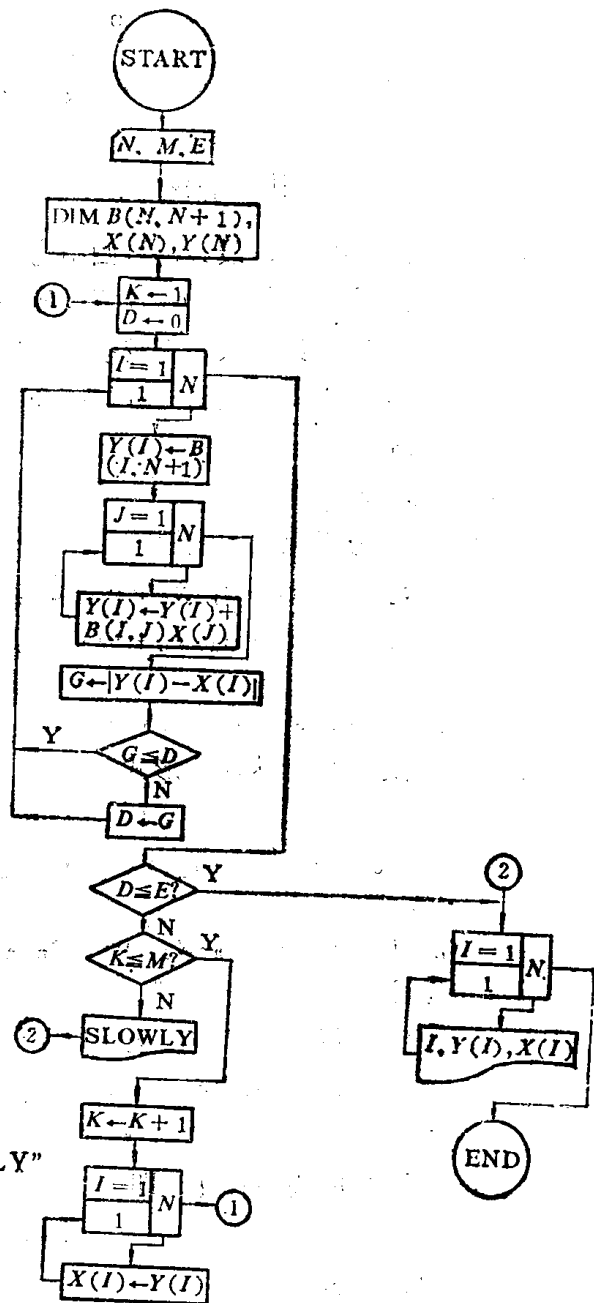


图1-10